الفصل الاول : الاعداد المركبة

العمليات الاربعة والتطبيقات عليها

2000 دور 1/ اذا كانت $x = 2 + 3i, y = 3 - i$ جد قيمة $x^2 + 2y^2$

sol : $x^2 + 2y^2 = (2 + 3i)^2 + 2(3 - i)^2 = (4 + 12i + 9i^2) + 2(9 - 6i + i^2) = (-5 + 12i) + 2(8 - 6i)$
$= (-5 + 12) + (16 - 12i) = 11 + 0i$

2004 دور 1 / جد الصيغة العادية للعدد المركب $(1 - \sqrt{3}i)^2 - (2 - \sqrt{3}i)^2$

sol : $(1 - \sqrt{3}i)^2 - (2 - \sqrt{3}i)^2 = (1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2) - (4 - 4\sqrt{3}i + 3i^2) =$
$(-2 - 2\sqrt{3}i) - (1 - 4\sqrt{3}i)(-2 - 2\sqrt{3}i) + (-1 + 4\sqrt{3}i) = -3 + 2\sqrt{3}i$

sol : $(3 + 4i)^2 + (5 - 3i)(1 + i) = (9 + 24i + 16i^2) + (5 + 5i - 3i - 3i^2)$
$= (-7 + 24i) + (8 + 2i) = 1 + 26i = (1,26)$

ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(3 + 4i)^2 + (5 - 3i)(1 - i)$

sol : $(3 + 4i)^2 + (5 - 3i)(1 - i) = (9 + 24i + 16i^2) + (5 - 5i - 3i + 3i^2) =$
$= (-7 + 24i) + (2 - 8i) = -5 + 16i$

1998 دور 1 / ضع بالصورة العادية للعدد المركب $(1 + 3i)^2 + (3 - 2i)^2$

sol : $(1 + 3i)^2 + (3 - 2i)^2 = (1 + 6i + 9i^2) + (9 - 12i + 4i^2) = (-8 + 6i) + (5 - 12i) = -3 - 6i$

2002 دور 1/ ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي $(3 + 2i)(-2 + i)$

sol : $c = (3 + 2i)(-2 + i) = -6 + 3i - 4i + 2i^2 = -8 - i$
$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{-8 - i} = \frac{1}{-8 - i} \cdot \frac{-8 + i}{-8 + i} = \frac{-8 + i}{64 + 1} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$

2003 دور 1 / جد النظير الضربي للعدد المركب 3+5i ثم ضعه بالصورة العادية

sol : $c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3 + 5i} = \frac{1}{3 + 5i} \cdot \frac{3 - 5i}{3 - 5i} = \frac{3 - 5i}{9 + 25} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$

2005 دور 2 / اذا كانت $x = -1 + 2i$ جد قيمة $x^2 + 3x + 5$ بالصيغة الديكارتية (ارجاند)

sol : $x^2 + 3x + 5 = (-1 + 2i)^2 + 3(-1 + 2i) + 5$
$= (1 - 4i + 4i^2) + (-3 + 6i) + 5$
$= (-3 - 4i) + (2 + 6i) = -1 + 2i = (-1,2)$

2007 خارج القطر / اذا كان $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

sol : $x^2 + 2x + 6 = (-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 6 = (1 - 4i + 4i^2) + (-2 + 4i) + 6$
$= (-3 - 4i) + (4 + 4i) = 1 + 0i$

2012 دور 2 / ضع العدد بالصيغة العادية للعدد المركب $(1 + i)^5 - (1 - i)^5$

sol : $(1 + i)^5 = (1 + i)^4(1 + i) = [(1 + i)^2]^2(1 + i) = (1 + 2i + i^2)^2(1 + i)$
$= (2i)^2(1 + i) = 4i^2(1 + i) = -4(1 + i) = -4 - 4i$
$(1 - i)^5 = (1 - i)^4(1 - i) = [(1 - i)^2]^2(1 - i) = (1 - 2i + i^2)^2(1 - i)$
$= (-2i)^2(1 - i) = 4i^2(1 - i) = -4(1 - i) = -4 + 4i$
$(1 + i)^5 - (1 - i)^5 = (-4 - 4i) - (-4 + 4i) = (-4 - 4i) + (4 - 4i) = 0 - 8i$

يمكنكم حل السؤال بجزء واحد بشرط ترك الاشارة السالبة الى نهاية الحل وبعده تحويل طرفيها الى الصيغة الجبرية ومن ثم تحويل الطرح الى جمع كما في الخطوة الاخيرة من الحل .

2013 خارج القطر / ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

sol : $\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{(1-i)^{12}(1-i)}{64} = \frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64} = \frac{(1-2i+i^2)^6(1-i)}{64}$
$= \frac{(-2i)^6(1-i)}{64} = \frac{64i^6(1-i)}{64} = \frac{-64(1-i)}{64} = -(1 - i) = -1 + i$

2006 تمهيدي / اذا كان $x = 3 + 2i, y = 1 - i$ اثبت ان $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$

sol :
LHS : $\overline{x + y} = \overline{(3 + 2\imath) + (1 - \imath)} = \overline{4 + \imath} = 4 - i$
RHS : $\bar{x} + \bar{y} = \overline{(3 + 2\imath)} + \overline{(1 - \imath)} = (3 - 2i) + (1 + i) = 4 - i \Rightarrow LHS = RHS$

2018 د 2 احيائي داخل / اذا علمت ان $x = 8 - i, y = 2 + i$ تحقق ان $\overline{xy} = \bar{x}.\bar{y}$.

sol : $\overline{xy} = \overline{(2 + \imath)(8 - \imath)} = \overline{16 - 2\imath + 8\imath - \imath^2} = \overline{17 + 6\imath} = 17 - 6i$
$\bar{x}.\bar{y} = \overline{(2 + \imath)}.\overline{(8 - \imath)} = (2 - i)(8 + i) = 16 + 2i - 8i - i^2 = 17 - 6i$

2020 احيائي و 2 تكميلي / اذا كان $x = 3 + i, y = 1 - i$ تحقق ان $\overline{xy} = \bar{x}, \bar{y}$ بنفس اسلوب السؤال السابق .

2019 د 3 احيائي / اذا كان $x = (3 - 2i)^2, y = \frac{3-i}{1+i}$ جد كلا من x,y بالصيغة العادية ثم اثبت ان $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$.

sol : $x = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i$
$y = \frac{3-i}{1+i} = \frac{3-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i+i^2}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$
$\overline{x + y} = \overline{(5 - 12\imath) + (1 - 2\imath)} = \overline{6 - 14\imath} = 6 + 14i$
$\bar{x} + \bar{y} = \overline{(5 - 12\imath)} + \overline{(1 - 2\imath)} = (5 + 12i) + (1 + 2i) = 6 + 14i$

2017 د 1 احيائي داخل / اثبت ان : $\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{-6}{25}$

sol : $\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{1}{1+4i+4i^2}+\frac{1}{1-4i+4i^2}=\frac{1}{-3+4i}+\frac{1}{-3-4i}=\frac{(-3-4i)+(-3+4i)}{9+16}=\frac{-6}{25}$

بعد تحويل كل من المقامين الى الصيغة الجبرية يمكن ضرب كل كسر بمرافقه ثم جمع النتائج للحصول على نفس النتائج

2020 احيائي د 1 داخل / ضع بالصيغة العادية (الجبرية) للعدد المركب $\frac{i}{(\sqrt{2}+i)^2}+\frac{i}{(\sqrt{2}-i)^2}$

sol : $\frac{i}{(\sqrt{2}+i)^2}+\frac{i}{(\sqrt{2}-i)^2}=\frac{i}{2+2\sqrt{2}i+i^2}+\frac{i}{2-2\sqrt{2}i+i^2}=\frac{i}{1+2\sqrt{2}i}+\frac{i}{1-2\sqrt{2}i}$

$=\frac{i(1-2\sqrt{2}i)+i(1+2\sqrt{2}i)}{(1+2\sqrt{2}i)(1-2\sqrt{2}i)}=\frac{(i-2\sqrt{2}i^2)+(i+2\sqrt{2}i^2}{1+8}=\frac{(2\sqrt{2}+i)+(-2\sqrt{2}+i)}{9}=\frac{2i}{9}=0+\frac{2}{9}i$

يمكن حل السؤال بطريقة اخرى وذلك بتبسيط كل كسر بضرب البسط والمقام بمرافق المقام للوصول الى نفس النتائج .

الاسئلة الخاصة بتساوي عددين مركبين

2010 تمهيدي / اذا كان $a+bi=\frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3+b^3)=7$

sol : $a+bi=\frac{2+i}{1-i}=\frac{2+i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}=\frac{2+2i+i-1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

$a=\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}\Rightarrow 2(a^3+b^3)=2\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)=2(\frac{28}{8})$

2006 تمهيدي / جد قيمتي x,y الحقيقتين التي تحقق $(x+i)(y-3i)=-1-13i$

sol : $xy-3ix+iy-3i^2=-1-13i$

$(xy+3)+(-3x+y)i=-1-13i$

$xy+3=-1\Rightarrow xy=-4\ldots\ldots(1)$

$-3x+y=-13\Rightarrow y=3x-13\ldots\ldots(2)in\ 1$

$x(3x-13)=-4\Rightarrow 3x^2-13x+4=0\Rightarrow(3x-1)(x-4)=0$

$either\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3\left(\frac{1}{3}\right)-13=1-13=-12$

$or\ x=4\Rightarrow y=12-13=-1$

1999 دور 2/ جد قيمتي x,y الحقيقتين التي تحقق $(3x+2yi)^2=\frac{200}{4+3i}$

sol: $(3x+2yi)^2=\frac{200}{4+3i}\Rightarrow 9x^2+12xyi+4y^2i^2=\frac{200}{4+i}.\frac{4-3i}{4-3i}$

$(9x^2-4y^2)+(12xy)i=8(4-3i)$

$(9x^2-4y^2)+(12xyi)=32-24i$

$9x^2-4y^2=32\ldots..(1),12xy=-24\Rightarrow y=\frac{-2}{x}\ldots..(2)in\ (1)$

$9x^2-4\left(\frac{-2}{x}\right)^2=32\Rightarrow\left[9x^2-\frac{16}{x^2}=32\right].x^2$

$9x^4-16=32\,x^2\Rightarrow 9x^4-32x^2-16=0$

$(9x^2+4)(x^2-4)=0\Rightarrow either\ 9x^2+4=0$ غير ممكن لانه مجموع مربعين

$$OR\ x^2=4\ \Rightarrow\begin{cases}x=2\rightarrow y=-1\\x=-2\rightarrow y=1\end{cases}$$

2006 دور 2 / جد قيمتي x,y الحقيقتين التي تحقق $(3x-i)(2y+i)+11=7i$

sol : $6xy+3xi-2yi-i^2=-11+7i \Rightarrow (6xy+1)+(3x-2y)i=-11+7i$

$6xy+1=-11 \Rightarrow 6xy=-12 \Rightarrow y=\frac{-2}{x} \ldots.(1) in\ (2)$

$3x-2y=7 \ldots.(2) \Rightarrow \left[3x+\frac{4}{x}=7\right].x \Rightarrow 3x^2+4=7x$

$3x^2-7x+4=0 \Rightarrow (3x-4)(x-1)=0$

$either\ x=\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{-2}{\frac{4}{3}}=-2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{-3}{2}\ or\ x=1 \Rightarrow y=-2$

1996 دور 1 / جد قيمتي $x,y \in R$ التي تحقق $(2x+i)(y-2i)=-2-9i$

sol : $(2x+2)(-4x+y)i=-2-9i$

$2xy+2=-2 \Rightarrow 2xy=-4 \ldots\ldots(1)$

$-4x+y=-9 \Rightarrow y=4x-9 \ldots\ldots.(2) in (1)$

$2x(4x-9)=-4 \Rightarrow [8x^2-18x+4=0] \div 2 \Rightarrow 4x^2-9x+2=0$

$(4x-1)(x-2)=0 \Rightarrow 4x-1=0$

$either\ 4x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}\ \therefore y=1-9=-8$

$OR\ x-2=0 \Rightarrow x=2\ \therefore y=8-9=-1$

2006 دور1/ جد قيمتي $x,y \in R$ التي تحقق $(2x+i)(y+2i)=2+9i$ واجب بنفس الاسلوب

$Ans: x=\frac{1}{4} \longrightarrow y=8, x=2 \longrightarrow y=1$

2000 دور 1 / جد قيمتي x,y الحقيقيتين التي تحقق $x(x+i)+y(y-i)+i=13$

sol : $(x^2+xi)+(y^2-yi)=13-i \Rightarrow (x^2+y^2)+(x-y)i=13-i$

$x^2+y^2=13 \ldots.(1), x-y=-1 \Rightarrow x=y-1 \ldots.(2) in\ 1$

$(y-1)^2+y^2=13 \Rightarrow y^2-2y+1+y^2-13=0 \Rightarrow 2y^2-2y-12=0$

$y^2-y-6=0 \Rightarrow (y-3)(y+2)=0$

$either\ y=3 \Rightarrow x=3-1=2\ OR\ y=-2 \Rightarrow x=-2-1=-3$

2020 احيائي د2 تكميلي / جد قيمتي x,y الحقيقيتين التي تحقق $x(x+i)+y(y-i)-i^3=13$

2008 دور 2 / جد قيمتي x,y الحقيقيتان التي تحقق $y+5i=(2x+i)(x+i)$

sol : $y+5i=2x^2+2xi+xi+i^2 \Rightarrow y+5i=(2x^2-1)+3xi$

$2x^2-1=y \ldots.(1), 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}\ in\ (1) \Rightarrow 2\left(\frac{25}{9}\right)-1=y$

$y=\frac{50}{9}-1=\frac{50-9}{9}=\frac{41}{9}$

2009 تمهيدي / جد قيمتي x,y الحقيقيتان التي تحقق $(3+2i)^2y=(x+3i)^2$

sol : $(9+12i+4i^2)y=(x^2+6ix+9i^2)$

$(5+12i)y=(x^2-9)+6ix \Rightarrow 5y+12yi=(x^2-9)+6ix$

$5y=x^2-9 \ldots.(1), 12y=6x \Rightarrow x=2y \ldots.(2) in\ 1$

$5y = 4y^2 - 9 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0 \Rightarrow (4y - 9)(y + 1) = 0$

$either\ y = \frac{9}{4} OR\ y = -1 \Rightarrow x = -2$

2010 دور 1 / جد قيمتي x,y الحقيقيتان التي تحقق $12 + 5i = (x + 3i)(y - 2i)$

sol : $12 + 5i = xy - 2xi + 3yi - 6i^2 \Rightarrow 12 + 5i = (xy + 6) + (-2x + 3y)i$

$xy + 6 = 12 \Rightarrow xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x} \ldots..(1) in\ 2\ , -2x + 3y = 5\ ..(2)$

$-2x + 3\left(\frac{6}{x}\right) = 5 \Rightarrow -2x^2 + 18 = 5x \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0$

$(2x + 9)(x - 2) = 0$

$either\ \ x = \frac{-9}{2} \Rightarrow y = 6\left(\frac{-2}{9}\right) = \frac{-4}{3}\ OR\ x = 2 \Rightarrow y = 3$

2018 تمهيدي احيائي / جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+9}{x+3i}$

sol : $\frac{x^2-9i^2}{x+3i} = \frac{y}{1+i} \Rightarrow \frac{(x-3i)(x+3i)}{x+3i} = \frac{y}{1+i}$

$\Rightarrow x - 3i = \frac{y}{1+i} \Rightarrow (x - 3i)(1 + i) = y$

$\Rightarrow (x + 3) + (\ x - 3)i = y + 0i$

$x + 3 = y \ldots\ldots(1)\ , x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3\ \Rightarrow y = 3 + 3 = 6$

2016 تمهيدي / جد قيمتي x,y الحقيقيتان التي تحقق المعادلة $\frac{125}{11+2i}x + (1 - i)^2 y = 11$

sol : $\frac{125}{11+12i}.\frac{11-2i}{11-2i}x + (1 - 2i + i^2)y = 11\ \Rightarrow \frac{125(11-2i)}{125}x + (-2i)y = 11$

$(11x - 2xi) + (0 - 2yi) = 11 \Rightarrow (11x) + (-2x - 2y)i = 11 + 0i$

$11x = 11\ \Rightarrow x = 1$

$-2x - 2y = 0 \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow -1 - y = 0 \Rightarrow y = -1$

هناك طرق اخرى لحل السؤال كأن تضرب كل المعادلة في $(11+2i)$ للتخلص من المقامات او ان نجعل العدد 125 بالصورة التالية:

$125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11 + 2i)(11 - 2i)$ **ثم تختصر مع المقام.**

1998 دور 2 / جد قيمتي x,y الحقيقيتين التي تحقق $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

sol : $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i} \Rightarrow (-2x + 2i - x^2 i + xi^2) = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$

$(-2x - x) + (2 - x^2)i = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i} \Rightarrow (-3x) + (2 - x^2)i = 3y - 7i$

$-3x = 3y \Rightarrow -x = y \ldots.(1)$

$2 - x^2 = -7 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$x = 3 \Rightarrow y = -3, x = -3 \Rightarrow y = 3$

2016 دور 2 / جد قيمتي $x,y \in R$ اذا علمت ان $(x+2i)(x-i)=\frac{121+9y^2}{11+3yi}$

sol : $(x^2-xi+2xi-2i^2)=\frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$

$(x^2+2)+(-x+2x)i=\frac{(11-3yi)(11+3yi)}{11+3yi}$

$(x^2+2)+(x)i=11-3yi\,,x^2+2=11\ \Rightarrow x^2=9\ \Rightarrow x=\ \pm 3$

$x=-3y\Rightarrow x=3\ \Rightarrow 3=-3y\Rightarrow y=-1,,,,,,x=-3\Rightarrow -3=-3y\Rightarrow y=1$

يمكن تبسيط الطرف الايمن من خلال الضرب بالعامل المرافق كما موضح ادناه :

تأكيد /

$$\frac{121+9y^2}{11+3yi}.\frac{11-3yi}{11-3yi}=\frac{(121+9y^2)(11-3yi)}{(121+9y^2)}=11-3yi$$

2017 د 2 تطبيقي داخل / اذا كان العددان $\frac{5+i}{2-i}\,,\frac{x+yi}{3+4i}$ مركبان مترافقان , جد قيمتي $x,y \in R$

sol: $\frac{x+yi}{3+4i}=\overline{\left(\frac{5+i}{2-i}\right)}\Rightarrow\frac{x+yi}{3+4i}=\frac{5-i}{2+i}\Rightarrow(x+yi)(2+i)=(5-i)(3+4i)$

$(x+yi)(2+i)=15+20i-3i+4\Rightarrow(x+yi)(2+i)=19+17i$

$(x+yi)=\frac{19+17i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i}\Rightarrow(x+yi)=\frac{38-19i+34i+17}{4+1}\Rightarrow(x+yi)=\frac{55+15i}{5}\Rightarrow(x+yi)$

$=11+3i\Rightarrow x=11\,,y=3$

2020 تطبيقي د 2 داخل / 2017 د 3 احيائي داخل / اذا كان $\frac{3-2i}{i}\,.\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان جد قيمتي x,y الحقيقيتان .

sol : $\frac{x-yi}{1+5i}=\overline{\left(\frac{3-2i}{i}\right)}\Rightarrow\frac{x-yi}{1+5i}=\left(\frac{3+2i}{-i}\right)\Rightarrow\frac{x-yi}{1+5i}=\left(\frac{3+2i}{-i}.\frac{i}{i}\right)$

$\frac{x-yi}{1+5i}=\left(\frac{3i+2i^2}{1}\right)\Rightarrow\frac{x-yi}{1+5i}=(-2+3i)$

$(x-yi)=(-2+3i)(1+5i)\Rightarrow x-yi=-2-10i+3i+15i^2$

$\Rightarrow x-yi=\ -17-7i\ \Rightarrow x=-17,-y=-7\Rightarrow y=7$

2012 دور 1 / جد قيمتي x,y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{2+i}{3-i}\,,\frac{5}{x+yi}$ مترافقان

sol : $\overline{\left(\frac{3+i}{3-i}\right)}=\frac{5}{x+yi}\Rightarrow\left(\frac{2-i}{3+i}.\frac{3-i}{3-i}\right)=\frac{5}{x+yi}\Rightarrow\left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{10}\right)=\frac{5}{x+yi}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{5}{x+yi}\Rightarrow 1-i=\frac{10}{x+yi}\Rightarrow x+yi=\frac{10}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}\Rightarrow x+yi=\frac{10(1+i)}{2}$

$x+yi=5+5i\Rightarrow x=5\,,y=5$

2019 د 1 احيائي خارج / جد قيمتي $x,y \in R$ اذا علمت ان $\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$

sol : $\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}\Rightarrow\frac{x-yi}{x+yi}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$

$\frac{x-yi}{(x-yi)(x+yi)}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}\Rightarrow\frac{1}{x+yi}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$

$x+yi=(1+xi)(3+i)\Rightarrow x+yi=3+i+3xi+xi^2$
$x+yi=(3-x)+(1+3x)i$
$x=3-x\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$
$1+3x=y\Rightarrow 1+\frac{9}{2}=y\Rightarrow y=\frac{11}{2}$

2019 احيائي د 1 داخل/ جد قيمتي كل من x,y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة $\frac{6}{x+yi}+(2-i)^2=4-3i$

sol : $\frac{6}{x+yi}+(2-i)^2=4-3i\Rightarrow\frac{6}{x+yi}+(4-4i+i^2)=4-3i$
$\frac{6}{x+yi}+(3-4i)=4-3i\Rightarrow\frac{6}{x+yi}=(4-3i)-(3-4i)$
$\frac{6}{x+yi}=(4-3i)+(-3+4i)\Rightarrow\frac{6}{x+yi}=1+i$
$(x+yi)(1+i)=6\Rightarrow x+yi=\frac{6}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}$
$x+yi=\frac{6(1-i)}{2}\Rightarrow x+yi=3-3i\Rightarrow x=3\,,y=-3$

2020 احيائي دور 1/ جد قيمتي $x,y\in R$ اذا علمت ان $\frac{-2}{x+yi},\frac{1-5i}{3-2i}$ مترافقان

sol : $\frac{-2}{x+yi}=\overline{\left(\frac{1-5i}{3-2i}\right)}\Rightarrow\frac{-2}{x+yi}=\frac{1+5i}{3+2i}\Rightarrow(x+yi)(1+5i)=-6-4i$
$x+yi=\frac{-6-4i}{1+5i}.\frac{1-5i}{1-5i}=\frac{-6+30i-4i+20i^2}{1+25}=\frac{-26+26i}{26}=-1+i$
$x=-1\,,y=1$

الاسئلة الوزارية من تمارين (1-1)

2020 احيائي د 1 خارج / جد قيمتي $x,y\in R$

Q2/ (a) $y+5i=(2x+i)(x+2i)$
sol : $y+5i=(2x^2-2)+(4x+x)i\Rightarrow y+5i=(2x^2-2)+5xi$
$2x^2-2=y\ldots\ldots\ldots(1)$
$5x=5\Rightarrow x=1\ \Rightarrow 2(1)^2-2=y\Rightarrow y=0$

2020 تطبيقي د 1 خارج / 2012 خارج القطر / 2015 تمهيدي / Q2/© $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$

sol : $\left(\frac{1-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}\right)+(x+yi)=(1+4i+4i^2)\Rightarrow\left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right)+(x+yi)=(1+4i-4)$
$(0-i)+(x+yi)=-3+4i\ \Rightarrow x+yi=-3+5i$
$x=-3\,,y=5$

2005 دور 2/ 2004 دور 2/ Q2/ (d) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

sol : $\left(\frac{2-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i}\right)y=\left(\frac{1}{i}.\frac{-i}{-i}\right)$
$\left(\frac{2-2i-i+i^2}{1+1}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)y=-i$
$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi\right)+(y-yi)=0-i$

$\left(\frac{1}{2}x+y\right)+\left(-\frac{3}{2}x-y\right)i=0-i$

$\frac{1}{2}x+y=0\Rightarrow x+2y=0\Rightarrow x=-2y\ldots(1)$

$-\frac{3}{2}x-y=-1\Rightarrow -3x-2y=-2\ldots\ldots(2)$

$6y-2y=-2\Rightarrow 4y=-2\Rightarrow y=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=(-2)\left(\frac{-1}{2}\right)=1$

2020 احيائي د 1 خارج /

Q3/(a) $=\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

sol : $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{1}{4-4i+i^2}-\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$

$=\frac{1}{3-4i}.\frac{3+4i}{3+4i}-\frac{1}{3+4i}.\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{3+4i}{9+16}-\frac{3-4i}{9+16}$

$=\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)-\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)=\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)+\left(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)=\frac{8}{25}i$

2012 دور 3 / 2002 دور 1 /

Q3/(B) $\frac{(1-I)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

sol: $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\frac{1-2i+i^2}{1-i}+\frac{1+2i+i^2}{1-i}=\frac{-2i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}+\frac{2i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}$

$=\frac{-2i+2i^2}{1+1}+\frac{2i+2i^2}{1+1}=(-1-i)+(-1+i)=-2$

2020 تطبيقي د 2 تكميلي / 2013 دور 1/ اثبت ان $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$ Q3/©

sol : $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=(1-i)(1+1)((1+i)=(2)(1+1)=(2)(2)=4$

2015 دور 3 / س 5/ جد قيمتي x,y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{3+i}{2-i},\frac{6}{x+yi}$ مترافقان :

sol : $\overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)}=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow\left(\frac{3-i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i}\right)=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow\left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{5}\right)=\frac{6}{x+yi}$

$1-i=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow x+yi=\frac{6}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}\Rightarrow x+yi=\frac{6(1+i)}{2}$

2020احيائي د 3/

$x+yi=3+3i\Rightarrow x=3,y=3$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالجذران التربيعيان

طريقة الفرضية

2009 دور ثاني / جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

sol : $\frac{14+2i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}=\frac{14-14i+2i-2i^2}{2}=\frac{16-12i}{2}=8-6i$

نفرض x+yi هو الجذر التربيعي للعدد المركب $8-6i$

$8-6i=(x+yi)^2$

$8-6i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=8\ldots\ldots(1)$

$2xy=-6\ldots.(2), y=\frac{-6}{2x}=\frac{-3}{x}\ldots(3) in\ (1)$

$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=8\Rightarrow\left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right]$: وبضرب الطرفين في $x^2\neq 0$ ينتج

$x^4-9=8x^2\Rightarrow x^4-8x^2-9=0$

$(x^2-9)(x^2+1)=0\ either\ x^2+1=0$ يهمل

$OR\ x^2-9=0\Rightarrow x^2=9\ \Rightarrow x=\pm 3\Rightarrow y=\left(\frac{3}{\mp 3}\right)\Rightarrow y=\ \mp 1$

x	3	-3
y	-1	1

الجذران التربيعيان العدد المركب $8-6i$ هما {± (3-i)}

2007 دور اول / جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $3+4i$

نفرض $x+yi$ هو الجذر التربيعي للعدد المركب $3+4i$

sol : $3+4i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=3\ldots.(1), 2xy=4\ldots.(2)\ , y=\frac{4}{2x}=\frac{3}{x}\ldots(3) in\ (1)$

$x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=3\ \left[x^2-\frac{4}{x^2}=3\right]$: وبضرب الطرفين في $x^2\neq 0$ ينتج

$x^4-4=3x^2\Rightarrow x^4-3x-4=0\Rightarrow(x^2-4)(x^2+1)=0$

either $x^2+1=0$ يهمل

OR $x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow y=\left(\frac{2}{\pm 2}\right)\Rightarrow y=\pm 1$

الجذران التربيعيان للعدد المركب 3+4i هما $\{\pm(2+i)\}$

1997 دور اول / اذا كان $c,d \in R$ وكان $c+di=\frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c-di}$.

sol : $c+di=\frac{7-4i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i}=\frac{14-7i-8i-4}{4+1}=\frac{10-15i}{5}=2-3i$

$c=2,d=-3 \Rightarrow \sqrt{2c-di}=\sqrt{4+3i}$

$4+3i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=4\ldots.(1\ ,2xy=3\ldots..(2\ ,y=\frac{3}{2x}\ldots.(3\ in\ (1)$

$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right]$

$\Rightarrow 4x^4-9=16x^2 \Rightarrow 4x^4-16x^2-9=0$

$(2x^2-9)(2x^2+1)=0 \Rightarrow 2x^2+1=0$ يهمل

$OR\ 2x^2-9=0 \Rightarrow 2x^2=9 \Rightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\left(\frac{3}{\pm 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}\right) \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ans : $\sqrt{4+3i}=\left\{\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}$

2019 / احيائي دور 1 خارج / اذا كان $a,b \in R$ $a+bi=\frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2a-bi}$

2010 دور ثاني / جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(-1+7i)(1+i)$

sol : $(-1+7i)(1+i)=-1-i+7i+7i^2=-8+6i$

نفرض x+yi هو الجذر التربيعي للعدد المركب 8+6i-

$-8+6i=(x+yi)^2$

$-8+6i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=-8\ldots(1$

$2xy=6\ldots(2\ ,y=\frac{6}{2x}=\frac{3}{x}\ldots.(3\ in\ (1$

$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=-8 \Rightarrow [x^2-\frac{9}{x^2}=-8$: ينتج $x^2\neq 0$ وبضرب الطرفين في

$x^4-9=-8x^2 \Rightarrow x^4+8x^2-9=0$

$(x^2+9)(x^2-1)=0 \Rightarrow either\ x^2+9=0$ يهمل

$OR\ x^2-1=0 \Rightarrow x^2+1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\left(\frac{3}{\pm 3}\right) \Rightarrow y=\pm 1$

x	1	-1
y	3	-3

الجذران التربيعيان للعدد المركب 8+6i- هما {±(1+3I)}

الاسئلة الوزارية لموضوع حل المعادلات في C

2005 تمهيدي | حل المعادلة $x^3-8i=0$ في c

$Sol: x^3+8i^3=0 \Rightarrow (x+2i)(x^2-2ix+4i^2)=0$

$x=-2i \quad OR\ x^2-2ix-4=0$

$a=1\ ,b=-2i\ \ ,c=-4$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2i)\pm\sqrt{(-2i)^2-4.1.(-4)}}{2.1}$

$=\frac{2i\pm\sqrt{-4+16}}{2}=\frac{2i\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2i\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{\pm2\sqrt{3}+2i}{2}=\pm\sqrt{3}+i$

$ans=\{\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}+i,-2i\}$

2005 دور 1 | حل المعادلة $x^3+8i=0$ في c

$Sol: x^3-8i=0\Rightarrow(x-2i)(x^2+2ix+4i^2)=0$

$x=2i \quad OR\ x^2+2ix-4=0$

$a=1, b=2i\ , c=-4$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2i)\pm\sqrt{(2i)^2-4.1.(-4)}}{2.1}$

$=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+16}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2i\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{\pm\sqrt{3}-2i}{2}=\pm\sqrt{3}-1$

$ans:\{\sqrt{3}-i\ ,\sqrt{3}-i\ ,2i\}$

2009 دور ثاني / حل المعادلة $z^4+13z^2+36=0$ في c

$sol: z^4+13z^2+36=0\Rightarrow(z^2+9)(z^2+4)=0$

$either\ z^2=-9\Rightarrow z=\pm3i \quad or\ z^2=-4\ \Rightarrow z=\pm2i$

2017 د 2 احيائي داخل / جد مجموعة حل المعادلة التالية في c : $z^2+2i(3-2i)=3z$

$sol: z^2-3z+6i-4i^2=0\Rightarrow(z^2-4i^2)-3(z-2i)=0$

$(z-2i)(z+2i)-3(z-2i)=0\Rightarrow(z-2i)(z+2i-3)=0$

$either\ z=2i\ or\ z=3-2i\ \rightarrow ans:\{2i,3-2i\}$

2001 دور ثاني / جد الجذور التكعيبية للعدد 27 (تلميح في وقتها لم تكن مبرهنة ديموا فر موجودة في المنهج)

$sol: let\ z=\sqrt[3]{27}\Rightarrow z^3=27\Rightarrow z^3-27=0$

$(z-3)(z^2+3z+9)=0\ \rightarrow z=3\ OR\ z^2+3z+9=0\ \ a=1,b=2,c=9$

$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(3)\pm\sqrt{(3)^2-4.1.9}}{2.1}=\frac{-3\pm\sqrt{9-36}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-29}}{2}$

$=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}=\frac{-3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow ans:\{3,\frac{-3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\frac{-3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$

الاسئلة الوزارية لموضوع المعادلة التربيعية

2017 د 2 احيائي خارج / اذا كان (1+2i) هو احد جذري المعادلة $x^2-(3-i)x+a=0$ فما جذرها الثاني وما قيمة a

sol : $x^2-(h+k)x+hk=0$ المعادلة التربيعية

$x^2-(3-i)x+a=0, \quad let\ h=1+2i$ الجذر الاول , k الجذر الثاني

$h+k=3-i \Rightarrow (1+2i)+k=3-i \Rightarrow k=(3-i)-(1+2i)$

$k=(3-i)+(-1-2i)=2-3i$

$hk=a \Rightarrow (1+2i)(2-3i)=a \Rightarrow a=2-3i+4i+6 \Rightarrow a=8+i$

2015 دور ثاني / اذا كان 2-4i هو احد جذري المعادلة $2x^2-x-bx+c-6$ جد قيمتي b,c∈ R .

الحل : بما ان المعاملات حقيقية فان الجذران مترافقان

$h=2-4i, k=2+4i$

$h+k=(2-4i)+(2+4i)=4$

$h.k=(2-4i)(2+4i)=4+16=20)$

$x^2-(h+k)x+hk=0$

$x^2-4x+20=0 \Rightarrow 2x^2-8x+40=0$

$2x^2-(1+b)x+(c-6)=0$

$1+b=8 \Rightarrow b=7, c-6=40 \Rightarrow c=46$

2018 د 2 احيائي خارج / اذا كان احد جذري المعادلة التربيعية $x^2+x-bx+c+8=0$ هو 1-3i جد قيمتي $b,c \in R$

$h=1-3i, k=1+3i$

$h+k=(1-3i)+(1+3i)=2$

$hk=(1-3i)(1+3i)=1+9=10$

$x^2-(-1+b)x+(c+8)=0, x^2-(h+k)x+hk=0$

$h+k=-1+b \Rightarrow 2=-1+b \Rightarrow b=3$

$hk=c+8 \Rightarrow 10=c+8 \Rightarrow c=2$

2020 تطبيقي د 2 داخل / اذا كان احد جذري المعادلة $x^2+(1-a)x+b+8=0$ هو جد قيم $a,b \in R$

2019 احيائي تمهيدي / اذا علمت (2+i) احد جذري المعادلة $x^2-hx+5-5i=0$ جد قيمة h حيث $h \in C$ وما هو الجذر الاخر

الحل / بما ان المعاملات ليست حقيقية فان الجذران غير مترافقان فاذا كان الجذر الاول $M=2+i$ نفرض الجذر الاخر L .

$x^2-hx+5-5i=0, x^2-(M+L)x+ML=0$

$(2+i).L=5-5i$

$L=\frac{5-5i}{2+i}=\frac{5-5i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i}=\frac{10-5i-10i+5i^2}{4+1}=\frac{5-15i}{5}=1-3i$ الجذر الاخر

$h=M+L=(2+i)+(1-3i)=3-2i$

2018 د 3 احيائي داخل : كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية اذا كان احد جذريها $(\sqrt{3}-i)^2$.

sol : $h=(\sqrt{3}-i)^2=3-2\sqrt{3}i+i^2=2-2\sqrt{3}i \Rightarrow k=2+2\sqrt{3}i$

مجموع الجذرين $h+k=(2-2\sqrt{3}i)+(2+2\sqrt{3}i)=4$

حاصل ضرب الجذرين $hk=(2-2\sqrt{3}i)(2+2\sqrt{3}i=4+12=16$

المعادلة التربيعية $x^2-(h+k)x+hk=0 \Rightarrow x^2-4x+16=0$

2019 احيائي د 2/ اذا كان 3-41 احد جذري المعادلة $x^2-nx+10-5i=0$ فما الجنس الآخر وما قيمة n .

الحل \ نفرض ان احد الجذرين ` $h=3-4i$ نفرض ان الجذر الأخر يساوي k

عند المقارنة يمكن استنتاج $x^2-nx+10-5i=0$, $x^2-(h+k)x+hk=0$

$h.k=10-5i*(3-4i)k=10-5t \rightarrow k=\frac{10-5i}{3-4i}.\frac{3+4i}{3+4i} \Rightarrow \frac{30+40i-15i-20i^2}{9+16}$

$k=\frac{50+25i}{25}=2+i$

ويمكن حل السؤال عند طريق $h+k \Rightarrow n(3-4i)+(2+i) \Rightarrow n=5-3i$ ومن ثم إيجاد الجذر الآخر . n جعل الجذر المعلوم محقق للمعادلة التربيعية للإيجاد قيمة .

2020 احيائي وتطبيقي د 1 داخل/ جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها العدد المركب 3-4i

sol :h = 3 − 4i , k = 3 + 4i

h + k = (3 − 4i) + (3 + 4i) = 6

h.k = (3 − 4i)(3 + 4i) = 9 + 16=25

المعادلة التربيعية $x^2-(h+k)x+hk=0 \rightarrow x^2-6x+25=0$

2020 احيائي د 3/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1-i)$, $(1+2i)$

$let\ M=1+2i, L=1-i$

$M+L=(1+2i)+(1-i)=2+i$

$ML=(1+2i)(1-i)=1-i+2i-2i^2=3+i$

$x^2-(M+L)x+ML=0$

المعادلة التربيعية $x^2-(2+i)x+3+i=0$

الاسئلة الوزارية من تمارين (1-2)

2020 احيائي د 1 خارج / حل العادلة في مجموعة الاعداد المركبة Q1/(f)

$z^2 - 2zi + 3 = 0$

sol: $a = 1, b = -2i, c = 3$

$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2-4.1.3}}{2.1} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i$

$z = i + 2i = 3i$ OR $z = i - 2i = -i$ ans : $\{3i, -i\}$

$OR\ z^2 - 2zi + 3 = 0 \Rightarrow z^2 - 2zi - 3i^2 = 0 \Rightarrow (z - 3i)(z + i) = 0 \Rightarrow z = 3i\ or\ z = -i$

2020 احيائي د 2 داخل / جد المعادلة التربيعية التي جذراها $2 + 2i, -2 - 2i$

sol: $h = 2 + 2i, k = -2 - 2i$

$(h + k) = (2 + 2i) + (-2 - 2i) = 0$

$h.k = (2 + 2i)(-2 - 2i) = (-4 + 4) + (-4 - 4)i = -8i$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

$x^2 - 8i = 0$ المعادلة هي

---

5 - اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax(5 + 5i) = 0$ فما قيمة a وما هو الجذر الآخر

الطريقة الأولى \ يتم كتابة الصورة القياسية ثم اجراء المقارنة وبما ان حاصل ضرب الجذرين معلوم فنبدأ بحاصل ضرب الجذرين ثم الانتهاء بمجموعهما على اعتبار ان احد الجذرين $h = 3 + i$ ونفرض الجذر الأخر k

2020 احيائي د 2 داخل / 2011 دور اول /

$x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$

$x^2 - (h + k)x + hk = 0$

عند المقارنة بالصورة القياسية يتضح ان $h + k = a, h.k = 5 + 5i$.

$K(3 + i) = 5 + 5i \Rightarrow K = \frac{5+5i}{3+i} \Rightarrow K = \frac{5+5i}{3+i}.\frac{3-i}{3-i} \Rightarrow k = \frac{(15+5)+(-5+15)i}{9+1} = 2 + i$

$\backslash k + (3 + i) = a \Rightarrow (2 + i) + (3 + i) = a \Rightarrow a = 5 + 2i$

الطريقة الثانية \ أي جذر من جذور المعادلة يحقق تلك العادلة

let $a \in C$

$(3 + 1)^2 - a(3 + i) + (5 + 5i) = 0 \Rightarrow (9 + 6i + {}^2) + (5 + 5i) = a.(3 + i)$

$(8 + 6i) + (5 + 5i) = a.(3 + i) \Rightarrow (13 + 11i) = a.(3 + i)$

$$a = \frac{13 + 11i}{3 + i} \Rightarrow a = \frac{13 + 11i}{3 + i}.\frac{3 - i}{3 - i} \Rightarrow a = \frac{39 - 13i + 33i - 11i^2}{10} = 5 + 2i$$

اذا كان 1 + 3 = h هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الآخر هو K

$x^2 - (5 + 2i)\,x + (5 + 5i) = 0$

$x2 - (h + k)x + hk = 0 \Rightarrow h + K = 5 + 21$

$(3 + i) + K = 5 + 2i \Rightarrow K = (5 + 2i) - (3 + 1)$

$\Rightarrow K = (5 + 2i) + (-3 - i) \Rightarrow K = 2 + i$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالصيغة القطبية

س : عبر عن الاعداد التالية بالصورة القطبية

(a - 2 + 2i

2011 خارج القطر / 2013 دور 1 /

sol: $||z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعة

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ الصورة القطبية

---

b) $2\sqrt{3} - 2i$

2015 د 2 نازحين / 2014 نازحين / 2013 خارج القطر

sol: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

$sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{6}$ والسعة

$z = r(cos\theta + i\,sin\,\theta) = z = 4(cos\frac{11\pi}{6} + i\,sin\frac{11\pi}{6}$ الصورة القطبية)

2020 تطبيقي د 1 خارج | 2001 دور اول / ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الأساسية

sol : $z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i} = \frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{1+12} = \frac{13-13\sqrt{3}i}{12} = 1 - \sqrt{3}i$

$||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||x||} = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{||x||} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الرابع

2002 دور 2/ أذا كان $z = (-\sqrt{3}, 1)$ عددا مركبا اكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

$sol: z = -\sqrt{3} + i$

$= Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ الثاني بالربع تقع السعة لان

2006 دور 2/ اذا كان $z = (1 + \sqrt{3})$ عددا مركبا اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

$sol: z = (1, \sqrt{3})$

$Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = cos\ \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2008 خارج/ اذا كان $z = -1 + \sqrt{3}i$ عددا مركبا جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة :

$sol: Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = cos\ \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2003 دور 2 /اذا كان z عددا مركبا مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ ؟ جد الشكل الديكارتي (ارجاند) والشكل الجبري له

$sol: z = r(cos\ \theta + i\ sin\theta) = 3\ (cos\frac{\pi}{3} = + i\ sin\frac{\pi}{3}) = 3\ (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

2006 دور1 / اذا كان z عدد مركبا مقياسه 4 وسعته $\frac{5\pi}{6}$ جد كل من الشكل الديكارتي والجبري له

$sol: z = r(cos\ \theta + i\ sin\theta) = 4\ (cos\frac{5\pi}{6} + i\ sin\frac{5\pi}{6}) = 4\ (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$= -2\sqrt{3} + 2\,i = (-2\sqrt{3}, 2)$

2008 دور 1 / جد القياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+3i)^2$

$sol: z = 1 + 2\sqrt{3}\,i + 3\,i^2 = -2 + 23\,i$

$||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = cos\,\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ تقع بالربع الثاني $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

2007 دور 2 / جد القياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

$sol: \frac{2i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i} = \frac{2i - 2i^2}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$

$||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = cos\,\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{\pi}{4}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2008دور 2 / جد القياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$sol: \frac{4}{1-\sqrt{3}i}.\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4} = 1+\sqrt{3}i$

$||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = cos\,\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

2015 تمهيدي / عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2 - 2\sqrt{3}i$

$||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = \cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{2}{4}$, $\sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ والسعة هي زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

$r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ الصورة القطبية

2015 دور 3 اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3-3\sqrt{3}i$

$sol: \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+(-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

$\cos\theta = \cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\arg(z) = 0 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ الاسناد هي والسعة

$r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ الصورة القطبية

2012 تمهيدي / احسب ما ياتي $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

$sol: \left[\cos\frac{5}{24}r + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4 = COS\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = +i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2014 دور 3 / جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5-5i$

$sol: mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

$\cos\theta = \cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع

$= 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

2016د 1 خارج / اكتب العدد $z = (1+3i)^2$ بالصيغة القطبية

الطريقة الاولى/

$sol: C = 1+\sqrt{3}i = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الاول

$c = 2(\cos\frac{\pi}{3} + isin\ \frac{\pi}{3})$

$z = C^2 = 2^2(cos\frac{\pi}{3} + i\ sin\ \frac{\pi}{3}) = 4(cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$Z = (1+3i)^2 = 1+2\sqrt{3}i+3i^2 = -2+2\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

الطريقة الثانية |

$\cos\theta = \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الثاني وزاوية الاسناد تساوي $\frac{\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow Z = 4(cos\frac{2\pi}{3} + isin)\frac{2\pi}{3}$

2020 احيائي د2 تكميلي/ اذا كان $z = -z + bi$ حيث z عددا مركبا القيمة الأساسية لسعته $\frac{4\pi}{3}$ بد قيمة b

**الطريقة الأولى **

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \ Cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{2}{r} = -cos\frac{\pi}{3} - \frac{2}{r} \Rightarrow = -\frac{1}{2} \Rightarrow \ 4 = r$$

$$sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow sin\frac{4\pi}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow -sin\frac{\pi}{3} = \frac{b}{4} \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{4} \Rightarrow 2b = -4\sqrt{3} \Rightarrow b = -2\sqrt{3}$$

**الطريقة الثانية **

$$= r(-cos\frac{\pi}{3} - i\, sin\frac{\pi}{3})\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\frac{cos4\pi}{3} + i\, sin\frac{cos4\pi}{3})$$

$$z = r\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) = -\frac{1}{2}r - \frac{\sqrt{3}}{2}\, ri$$

$$-\frac{1}{2}\, r - \frac{\sqrt{3}}{2}\, ri = -2 + bi \Rightarrow -\frac{1}{2}r = -2 \Rightarrow r = 4$$

$$-\frac{3}{2}r = b \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\,(4) = b \Rightarrow b = -2\sqrt{3}$$

**الطريقة الثالثة **

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{-2}{\sqrt{4+b^2}} \Rightarrow -\cos\frac{\pi}{3} = \frac{-2}{\sqrt{4+b^2}} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{-2}{\sqrt{4+b^2}}$$

$\sqrt{4+b^2} = 4$ **بتربيع الطرفين** $\Rightarrow 4 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 12$

تهمل لأن السعة تقع بالربع الثالث ويجب ان تكون الإشارة سالبة $either\ b = 2\sqrt{3}$

$$\text{or b} = -2\sqrt{3}$$

الاسئلة الوزارية الخاصة بمبرهنة ديموافر

تمهيدي 2014 /ضع في ابسط صورة المقدار $\frac{(cos2\theta+i\ sin2\theta)^5}{(cos5\theta+i\ sin5\theta)^2}$

$$sol: \frac{(cos2\theta + i\ sin2\theta)5}{(cos5\theta + i\ sin5\theta)2} = \frac{[(cos\theta + i\ sin\theta)^2]^5}{[(cos\theta + i\ sin\theta)^5]^2} = \frac{(cos\theta\ +\ i\ sin\ \theta\ )^{10}}{(cos\theta + i\sin\theta)^{10}} = 1$$

2017 د 2 احيائي موصل / باستخدام مبرهنة ديمو افر بسط ما يأتي : $\frac{(\cos2\theta - i\sin2\theta)^{-5}}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2} + 1$

$$\text{Sol}: \frac{(\cos2\theta - i\sin2\theta)^{-5}}{(\cos5\theta + i\sin5\theta)^2} + 1 = \frac{(\cos2\theta + i\sin2\theta)^5}{(\cos5\theta + i\sin5\theta)^2} + 1 = \left[\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}\right] + 1 = 1 + 1 = 2$$

2017 د 1 تطبيقي داخل /اثبت ان $\left[\frac{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^4}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}\right](cos\theta - isin\ \theta)^2$

$$Sol: \left[\frac{(cos3\theta+i\ sin30)^4}{(cos5\theta+\ isin5\theta)^2}\right](cos\theta\ -\ isin\theta)^2 = \left[\frac{(cos\theta+i\ sin\theta)^{12}}{(cos\theta+i\ sin\theta)^{10}}\right](cos\theta - isin\theta)^2 = (cos\theta - isin\theta)^2(cos\theta - isin\theta)^2 = (cos\theta\ +\ isin\theta)^2\ (cos\theta\ +\ isin\theta)^{-2} = (cos\theta\ +\ isin\theta)^0 = 1$$

2016 د 2 خارج/ هل ان : $\frac{(\cos2\theta+\ i\sin2\theta)^5}{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^2} - (\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^2 = 0$ اثبت ذلك

$$Sol: \frac{(\cos2\theta+\ i\sin2\theta)^5}{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^2} - (\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^2 = \frac{[(\cos\theta+\ i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^4]^2} - (\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^2$$

$$\frac{(cos\theta + isin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^8} - (\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^2 = (\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^2 - (\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^2 = 0$$

2017 د 2 احيائي داخل / باستخدام مبرهنة ديموافر بسط ما يأتي : $\frac{(\cos2\theta+\ i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^2}$

$$sol: \frac{(\cos2\theta+\ i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^2} = \frac{[(\cos\theta+\ i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^3]^2} = \frac{(\cos2\theta+\ i\sin2\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^6} = (\cos\theta\ +\ i\sin\theta)^4 = \cos4\theta\ +\ i\sin4\theta$$

2018 د 3 احيائي داخل / اثبت أن : $\frac{(cos2\theta+i\ sin2\theta)^3}{cos5\theta+i\ sin5\theta}.(cose\ -\ i\ sin\theta) = 1$

$$Sol: \frac{(cos2\theta + i\ sin2\theta)^3}{cos5\theta + i\ sin5\theta}.(cose\ -\ i\ sin\theta)\frac{(cos0 + i\ sine)^6}{(\ cos\theta + isin\theta)^5}.(cose + i\ sin\theta)^{-1}$$

$$= (cos\theta + i\ sin\theta)(cos\theta\ +\ i\ sin\theta)^{-1} = (cos\theta + i\ sin\theta)^0 = 1$$

2018 د1 احيائي داخل/ ضع بأبسط صورة $(\cos\theta - i\sin\theta)^4 \frac{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^2}$

sol: $(\cos e - i\sin o)^4 \frac{(\cos50+i\sin50)2^2}{(\cos30+i\sin30)2}$

$= [(cos\theta + i\,sin\theta)^{-1}]^4 \frac{[(cos\theta + i\,sin\theta)^5]^2}{[(cos\theta + i\,sin\theta)^3]^2}$

$(cos\theta + i\,sin\theta)^{-4} \frac{(cos\theta + i\,sin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^6}$

$\frac{(cos\theta + i\,sin\theta)^6}{(cos\theta + isin\theta)^6} = 1$

باستخدام مبرهنة ديموافر جد باسط صورة

2017 د 2 احيائي داخل / $\left(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8}\right)^4$

sol : $\left(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8}\right)^4 = \left(cos4\frac{3\pi}{8} + isin4\frac{3\pi}{8}\right)$

$\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = 0 - i$

2018 د 2 احيائي داخل | $\left(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8}\right)^{-4}$

Sol: $\left(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8}\right)^{-4} = \left(cos\frac{12\pi}{8} - isin\frac{12\pi}{8}\right) = cos\frac{3\pi}{2} - isin\frac{3\pi}{2} = 0 + i$

2019 تمهيدي تطبيقي / 2011 دور ثاني/2020 احيائي د 1 خارج / $(1 + i)^{11}$

sol: $z = 1 + i = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$arg(z) = 0 = \frac{\pi}{4}$ السعة تساوي زاوية الاسناد لان المركب العدد يقع بالربع الاول

$z = \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)\right] \Rightarrow z^{11} = \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{11}$

$z^{11} = \left[(z)^{11}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{11} = 32\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4} + isin\frac{11\pi}{4})$

$= 32\sqrt{2}(\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}) = 32\sqrt{2}(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})$

$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 32(-1 + i) = -32 + 32i$

2018 د 2 تطبيقي داخل | $\frac{1}{(1-3i)^4}$

sol: $\frac{1}{(1-\sqrt{3}\,i)^4} = (1-\sqrt{3}\,i)^{-4}$

$let\ z = 1-\sqrt{3}\,i \Rightarrow p(z) = (1,-\sqrt{3})$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ هي الاسناد زاوية

$\cos\theta = \frac{?}{r} = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد هي

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الرابع $\Rightarrow z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} - isin\frac{5\pi}{3})$

$z^{-4} = [2(\cos\frac{5\pi}{3} - isin\frac{5\pi}{3})]^{-4} = \frac{1}{16}(\cos\frac{20\pi}{3} - isin\frac{20\pi}{3})$

$= \frac{1}{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - isin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$

أحيائي تمهيدي 2018 | جد باستخدام مبرهنة او ديموافر التعميم $(1+i)^{-5}$

sol: $let = 1+i = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ لان السعة تقع بالربع الاول

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$z^{-5} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-5} = (\sqrt{2})^{-5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$

2018 د 1 تطبيقي داخل / باستخدام مبرهنة ديموافر جد $(-\sqrt{3}+i)^5$

Sol: $let\ z = -\sqrt{3} + i = p(z) = (-\sqrt{3}, i)$

$= r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}$ هي الاسناد زاوية

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$z^5 = \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^5 = 2^5(\cos\frac{25\pi}{6} + i\sin\frac{25\pi}{6})$

$= 32\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(32\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 16\sqrt{3} + 16i$

2018 د1 احيائي خارج / باستخدام مبرهنة ديموافر ، احسب $(-1-\sqrt{-1})^{-3}$

$(sol)\ z=-1-\sqrt{-1}\rightarrow z=-1-i$

$=\ r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=2$

$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}},\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{\pi}{4}$ هي الاسناد زاوية

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$z^{-3}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^{-3}=(\sqrt{2})^{-3}(\cos\frac{15\pi}{4}-i\sin\frac{15\pi}{4})$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

2020 احيائي د 2 تكميلي /باستخدام مبرهنة ديموافر او التعميم احسب $\sqrt{2}\left[cos\frac{5\pi}{24}+isin\frac{5\pi}{24}\right]^{-6}$

$Sol:\sqrt{2}\left[cos\frac{5\pi}{24}+isin\frac{5\pi}{24}\right]^{-6}=\sqrt{2}\left[cos\frac{30\pi}{24}-isin\frac{30\pi}{24}\right]=\sqrt{2}\left[cos\frac{5\pi}{4}-isin\frac{5\pi}{4}\right]$

$=\sqrt{2}\left[-cos\frac{\pi}{4}-isin\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-1+i$

2020 احيائي د 1 / 2019 احيائي د 1 داخل / باستخدام مبرهنة ديموافر احسب : $(2\sqrt{3}-2i)^{-2}$

$Sol:r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-2}{4}\Rightarrow\frac{-1}{2}$

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{6}$ هي والسعة تقع بالربع الرابع

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$z^{-2}=\left[(4)^{-2}\left(\cos\frac{22\pi}{6}-i\sin\frac{22\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{6}(\cos\frac{11\pi}{6}-i\sin\frac{11\pi}{6})$

$z^{-2}=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i\right)$

2018 د 2 تطبيقي خارج/ اذا كان $(\cos\theta + i\sin\theta)$ ان اثبت $(1 + \bar{Z})Z = 1 + Z$

(sol) $(1 + \bar{Z})Z = [1 + \overline{(\cos\theta + i\sin\theta)}](\cos\theta + i\sin\theta)$

$= [1 + (\cos\theta - i\sin\theta)](\cos\theta + i\sin\theta)$

$= [(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)]$

$= [(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)]$

$= [(\cos\theta + i\sin\theta) + 1] = z + 1 = 1 + z$

بعد التوزيع يمكن تجنب القاعدة الذهبية لإستنتاج ان

$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = 1$ **وذلك عن طريق التبسيط التالي :**

$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$

2019 احيائي د2/ اذا كان $z = \cos\theta + i\sin\theta$ اثبت ان $\frac{z^2}{1+z^{2n}} = \frac{1}{2\cos n\theta}$

$sol : LHS : \frac{z^2}{1+z^{2n}} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1+(\cos n\theta + i\sin n\theta)^{2n}} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta}$

$\frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+2\cos^2 n\theta - 1 + i(2\sin n\theta\cos n\theta)} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos^2 n\theta + i(2\sin n\theta\cos n\theta)}$

$\frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = \frac{1}{2\cos n\theta} = RHS$

ملاحظة \ توجد طرق أخرى لحل هذا السؤال منها

$\frac{z^2}{1+z^{2n}} = \frac{z^2}{1+z^{2n}} \cdot \frac{z^{-n}}{z^{-n}} = \frac{1}{Z^{-n}+z^2} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin 0)^{-n}(\cos\theta + i\sin 0)^n}$

$\frac{1}{(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{2\cos n\theta}$

2019 احيائي د 1 خارج/ اذا كان $z = \cos 2x + i\sin 2x$ فاثبت ان $\frac{2}{1+z} = 1 - i\tan x$

LHS: $\frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta} = \frac{2}{1+\cos^2\theta - 1 + 2i\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{2}{2\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{i\sin\theta}{\cos\theta} = 1 - i\tan\theta$

الاسئلة الوزارية الخاصة بنتيجة ديموافر

2014 دور 1/اوجد الصيغة القطبية للعدد المركب $(3+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له

$sol: z = \sqrt{3} + i \Rightarrow ||z|| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ لان السعة تقع بالربع الاول

$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z^{\frac{2}{5}} = (z^2)^{\frac{1}{5}}\} = \left[2^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}} = [4\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right]^{\frac{1}{5}}$

$= [4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]^{\frac{1}{5}}$

$z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}); k = 0,1,2,3,4$

$if\ k=0 = z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}) = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})$

$if\ k=1 = z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15})$

$if\ k=2 = z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15})$

$if\ k=3 = z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15})$

$if\ k=4 = z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

ملاحظة | استفد من استنتاجات نتيجة ديموافر ادناه في ايجاد جميع الجذور في الاسئلة المرفقة

$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}); k = 0,1,2,\ldots,n-1$

$[r(\cos\theta - i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} - i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}); k = 0,1,2,\ldots,n-1$

$[r(\cos\theta - i\sin\theta)]^{\frac{-1}{n}} = = r^{\frac{-1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} - i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}); k = 0,1,2,\ldots,n-1$

$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{-1}{n}} = = r^{\frac{-1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}); k = 0,1,2,\ldots,n-1$

2015 د 1 نازحين / 2010 دور اول / باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد المركب 8i

$sol: z = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}) ; k = 0,1,2$

$if\ k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\ \frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$if\ k = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\ \frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

$if\ k = 2 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\ \frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\ \frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i) = -2i$

2015 د 4 / جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة ديموافر : $x^3 - 8i = 0$

$sol: x^3 = 8i = 8\ (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$x = \sqrt[3]{8}\ (\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}); k = 0,1,2$ ثم نكمل بنفس الاسلوب السابق

2013 تمهيدي / جد الجذور التربيعية للعدد المركب $(-8i)$

2011 / خارج القطر : باستخدام مبرهنة ديموافر حل المعادلة التالية في c $x^2 - 8i = 0$ فتصبح $x^2 = 8i$

$sol: z = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\ \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right); k = 0,1$

$if\ k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\ \frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + 2i$

$if\ k = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\ \frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2 - 2i$

$ans: \{\pm(2 - 2i)\}$

2019 تمهيدي احيائي / 2015 د 2 خارج / جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر

الطريقة الاولى :

$sol: z = 1 + i \Rightarrow mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin = \frac{y}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4}$ السعة تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \Rightarrow z^2 = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^2$

$z^2 = [(\sqrt{2})^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2] = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$(z^2)^{\frac{1}{3}} = [2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\right]^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right);\ k = 0,1,2$

$k = 1 \to (z^2)^{\frac{1}{3}} = k = 0 \to (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$k = 2 \to (z^2)^{\frac{1}{3}} =$

$\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = \sqrt[3]{2}(0 - i)$

الطريقة الثانية /

$z = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$(z)^{\frac{1}{3}} = [2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\right]^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + is\square n\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right);\ k = 0,1,2$

$k = 1 \to (z^2)^{\frac{1}{3}} = k = 0 \to (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$k = 2 \to (z)^{\frac{1}{3}} =$

$\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = \sqrt[3]{2}(0 - i)$

2015 د 1 / 2019 احيائي د2 / 2020 تطبيقي د 2 داخل /جد الجذور التكعيبية للعدد 125i باستخدام مبرهنة ديموافر

$sol: z = 125i = 125\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{3}} = \left[125\left(\cos\frac{\pi}{2} + + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

$::r = 125\,, \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow z^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}); k = 0,1,2\,3$

$if\ k = 0 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 5\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

$if\ k = 1 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}) = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

$if\ k = 2 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}) = 5\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$= 5(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 5(0 - i) = -5i$

2017 د 3 تطبيقي داخل / احسب الجذور التكعيبية للعدد المركب (-125)

$sol: z = -125 = 125\,(-1) = 125\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$(z)^{\frac{1}{3}} = \left[(125)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right]; k = 0,1,2$

$if\ k = 0 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

$if\ k = 1 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}) = 5\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -5$

$if\ k = 2 \rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = 5(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}) = 5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

2018 تمهيدي تطبيقي داخل / باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر، جد الجذور التكعيبية للعدد $64i$

$sol: z = 64i = 64\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$(z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}\,(cos\ \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + isin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3});\ k = 0,1,2$

$if\ k = 0 \to (z)^{\frac{1}{3}} = 4(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

$if\ k = 1 \to (z)^{\frac{1}{3}} = 4(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}) = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i$

$if\ k = 2 \to (z)^{\frac{1}{3}} = 4\left(cos\frac{9\pi}{6} + isin\frac{9\pi}{6}\right) = 4(\cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}) = 4(0 - i) = -4i$

2020 /2 تكميلي باستخدام نتيجة ديموافر حل المعادلة $z^3 - 64i$ حيث $z \in c$

2017 د 1 احيائي داخل / احسب باستخدام مبرهنة ديموافر: $(\sqrt{3} + i)^{-\frac{3}{2}}$

$Sol: let\ z = \sqrt{3} + i$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ السعة تساوي زاوية الاسناد لانها تقع بالربع الاول

$z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$

$z^{-\frac{3}{2}} = (z^{-3})^{\frac{1}{2}} = [\,2^{-3}(\cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})^{-3}]^{\frac{1}{2}} = [\frac{1}{8}(\cos\frac{3\pi}{6} - isin\frac{3\pi}{6}]^{\frac{1}{2}}$

$= [\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2})]^{\frac{1}{2}}$

$z^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} - isin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3});\ k = 0,1$

$if\ k = 0 \to (z)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - isin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

$if\ k = 1 \to (z)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{2} - isin\frac{\frac{5\pi}{2}}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\frac{5\pi}{4} - isin\frac{5\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

تأكيد / السؤال الوزاري السابق كان محل جدل من خلال وجود أكثر من طريقة واحدة للحل وتعدد هذه الطرق اوجبتها القيمة السالبة للاس النسبي وهو مالم يذكره المنهج بشكل صريح عند تطبيق الجذور النونية.

لذا يمكن للطالب تطبيق القانون الموجب المذكور في المنهج من خلال اعادة $=\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$ إلى صيغتها الجبرية تم اعادة تشكيلها قطبيا لتصبح

$$=\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})=\frac{1}{8}\ (0-i)=-\frac{1}{8}\ i=\frac{1}{8}\ (\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$$

وبعد تطبيق قانون الجذران التربيعيان ستظهر نفس النتائج باختلاف الترتيب ، وعلى العموم أصبح بإمكان الطالب الآن بعد هذا السؤال ان يستخدم الاستنتاجات التالية لنتيجة ديموافر .

$$[r\ (\cos\theta\ +\ i\sin\theta\ )]^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ ;k=0,1,2\ldots.,n-1$$

$$[r\ (\cos\theta-\ i\sin\theta\ )]^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}-i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ ;k=0,1,2\ldots.,n-1$$

$$[r\ (\cos\theta\ +\ i\sin\theta\ )]^{\frac{-1}{n}}=r^{\frac{-1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ ;k=0,1,2\ldots.,n-1$$

$$[r\ (\cos\theta\ +\ i\sin\theta\ )]^{\frac{-1}{n}}=r^{\frac{-1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ ;k=0,1,2\ldots.,n-1$$

2017 د 2 تطبيقي خارج/ حل المعادلة $x^3\ +\ i=0$ باستخدام نتيجة ديموافر

$$Sol: x^3\ +\ i\ =\ 0\ \rightarrow\ x^3\ =\ -\ i\ \rightarrow\ x^3\ =\ (\cos\frac{3\pi}{2}\ +\ i\ sin\ \frac{3\pi}{2}\ )$$

$$x\ =\ \left(cos\frac{3\pi}{2}\ +\ i\ sin\ \frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x=(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3})\ ;k=0,1,2$$

$$if\ k=0\rightarrow\ x=(cos\frac{3\pi}{6}+isin\frac{3\pi}{6})=(\cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2})=i$$

$$if\ k=1\rightarrow\ x=(cos\frac{7\pi}{6}+isin\frac{7\pi}{6})=(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})$$

$$if\ k=2\rightarrow\ x=(cos\frac{11\pi}{6}+isin\frac{11\pi}{6})=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})$$

على الرغم من ان السؤال ليس نصا من الكتاب الا ان فكرته منهجية لوجود مثال مقارب له في المنهج وهو حل المعادلة $x^3+1=0$ وابسط طريقة للتحقق من صحة الحل في كلا السؤالين يكون مجموع جميع الجذور صفرا .

2017 د 2 احيائي موصل/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب (2i-)

أولا : طريقة الفرضية :

$$Sol: -2i = (x + yi)^2 \rightarrow -2i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$
$$x^2 - y^2 = 0 \ldots . (1)$$
$$2xy = -2 \rightarrow y = -\frac{1}{x} \ldots . . (2) in (1) \left[x^2 - \frac{1}{x} = 0\right] . x2$$
$$x^4 - 1 = 0 - x^4 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1 , x = -1 \rightarrow y = 1$$
$$\sqrt{-2i} = \{1 - i, -1 + i\}$$

ثانيا : طريقة نتيجة ديموافر :

$$Sol: z = -2i = 2(-i)\ 2(cos\frac{3\pi}{2} + i\ sin\frac{3\pi}{2})$$
$$z^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + isin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2})\ ; k = 0,1$$
$$if\ k = 0 = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(cos\ \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} + i\ sin\ \frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(cos\ \frac{3\pi}{4} + i\ sin\ \frac{3\pi}{4})$$
$$if\ k = 1 = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\ (\ cos\ \frac{\frac{7\pi}{2}}{2} + + i\ sin\frac{\frac{7\pi}{2}}{2}\ ) = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + i\ sin\frac{7\pi}{4})$$
$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 - i$$

2018 د 3 تطبيقي داخل / جد حل المعادلة التالية باستخدام نتيجة ديموافر $\frac{x^3}{3} - 9i = 0$

$$sol: \left[\frac{x^3}{3} - 9i = 0\right] . 3 \rightarrow x^3 - 27i = 0 \rightarrow x^3 = 27i$$
$$x3 = 27\left(\cos\ \frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = \left[27\left(cos\ \frac{\pi}{2} + isin\ \frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$x = 3\left(\cos\ \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right);\ k\ 0,1,2$$
$$if\ k = 0 = x = 3\left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\ (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = (\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\ )$$

$$if\ k = 1 = x = 3\left(cos\ \frac{5\pi}{6} + i\ sin\ \frac{5\pi}{6}\right) = 3\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\ \right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)$$
$$if\ k = 2 = x = 3\ (cos\ \frac{9\pi}{6} + i\ sin\ \frac{9\pi}{6}) = 3\ (cos\frac{3\pi}{2} + i\ sin\ \frac{3\pi}{2}) = -3i$$

2018 د1 احيائي داخل / باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر حل المعادلة التالية $x^4+16=0$ حيث ان $x \in R$

$(sol:) x^4 = -16 = x^4 = 16(-1) = x^4 = 16(cos\pi + i\,sin\pi)$

$x = [(16)^{\frac{1}{4}}(cos\ \frac{\pi+2k\pi}{4} + Isin\frac{\pi+2k\pi}{4})]$

$if\ k = 0 = x = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$if\ k = 1 = x = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$if\ k = 2 = x = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$if\ k = 3 = x = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$

2018 د 1 تطبيق خارج / حل المعادلة $z^3 - 64i = 0$ باستخدام نتيجة ديموافر.

$sol: z^3 = 64i = z^3 = 64\,(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$

$z = \left[64\left(64\ \frac{\pi}{2} + isin\right)\right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}(cos\ \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + isin\ \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$

$k = 0 = z_1 = 4\,(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}) = 4\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2\sqrt{3}\,i + 2$

$k = 1 = z_2 = 4\,(cos\ \frac{5\pi}{6} + i\,sin\ \frac{5\pi}{6}) = 4(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -2\sqrt{3} + 2i$

$k = 2 = z_3 = 4\,(cos\ \frac{9\pi}{6} + i\,sin\ \frac{9\pi}{6}) = 4\,(cos\ \frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2})$

$= 4(0 - i) = -4i$

2018 د 2 احيائي خارج / جد الجذور التربيعية للعدد $(3\sqrt{3} - 3i)$ بطريقة ديموافر.

$sol: z = 3\sqrt{3} - 3i = p(z) = (3\sqrt{3}, -3i)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$

$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) = 6(cos\ \frac{11\pi}{6} + i\,sin\ \frac{11\pi}{6})$

$z^{\frac{1}{2}} = \left[6\left(cos\frac{11\pi}{6} + isin\ \frac{11\pi}{6}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 6\left(\cos\ \frac{11\pi}{6} + isin\ \frac{11\pi}{6}\right)$

$k = 0 \rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}(\cos\frac{11\pi}{12} + isin\frac{11\pi}{12})$

$k = 1 \rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}(\cos\frac{23\pi}{12} + isin\frac{23\pi}{12})$

الاسئلة الوزارية الخاصة تمارين ديموافر والصيغة القطبية

2012 تمهيدي

1- احسب مايلي :

$$a - \left(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}\right)^4 = \left(\cos\frac{20\pi}{24} + isin\frac{20\pi}{24}\right)$$
$$= \left(\cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,..$$

2017 الدور الثاني احيائي خارج /

$$b - (\cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12})^{-3} = (\cos\frac{21\pi}{12} - isin\frac{21\pi}{12})$$
$$= (\cos\frac{7\pi}{4} - isin\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

احسب باستخدام مبرهنة دي موافر مايلي :

2017 تطبيقي د 2 داخل / 2020 تطبيقي داخل / 2013 تمهيدي / 2012 دور 1 / 2015 دور 1 خارج /

$a - (1 - i)^7$

$Sol: let\ z = 1 - i\ Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin = \frac{y}{||z_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع

$z = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$

$\rightarrow z^7 = [\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})]^7 = (\sqrt{2})^7(\cos\frac{49\pi}{4} + isin\frac{49\pi}{4})$

$= 8\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}) = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 8 + 8i$

2012 خارج القطر / 2014 دور 2/

$b - \left(\sqrt{3} + i\right)^{-9}$

$sol: let: z = \sqrt{3} + i = Mod\ z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ لان السعة تقع بالربع الاول

$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})$

$$z^{-9} = \left[2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-9} = (2)^{-9}\left(cos\frac{9\pi}{6} - i\,sin\frac{9\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{512}(\cos\frac{3\pi}{2} - isin\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{512}(0 + i) = \frac{1}{512}i$$

3) بسط ما يأتي بطريقتين :

$a = \frac{(cos2\theta + isin2\theta)^5}{(cos3\theta + isin3\theta)^3}$

$sol: \frac{(cos2\theta + i\,sin2\theta)^5}{(cos3\theta + i\,sin3\theta)^3} = \frac{[(cos2\theta + i\,sin2\theta)^2]^5}{[(\cos\,3\theta + isin3\theta)^3]^3} = \frac{(cos2\theta + i\,sin2\theta)^{10}}{(cos2\theta + i\,sin2\theta)^9} = (cos\theta + i\,sin\theta)$

$OR \frac{(cos2\theta + i\,sin2\theta)^5}{(cos3\theta + i\,sin3\theta)^3} = \frac{cos10\theta + i\,sin10\theta}{cos9\theta + i\,sin9\theta}$

$= (cos10\theta + i\,sin10\theta).(cos9\theta + i\,sin9\theta)^{-1}$

$=[(cos10\theta + i\,sin10\theta).(cos9\theta - i\,sin9\theta)$

$= [\cos 10\theta.cos0\theta + sin10\theta.sin9\theta] + [sin10\theta.cos9\theta - cos10\theta.sin9\theta]i$

$= \cos(10\theta - 9\theta) + isin(10\theta - 9\theta) = cos\theta + isi\theta$

2013 دور 2 /

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\theta + isin\theta)}{r_2(cos\beta + isin\beta)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta - \beta) + isin(\theta - \beta)]$

$\frac{(cos2\theta + i\,sin2\theta)^5}{(cos3\theta + i\,sin3\theta)3} = \frac{cos10\theta + i\,sin10\theta}{cos9\theta + i\,sin9\theta} = \cos(10\theta - 9\theta) + isin(10\theta - 9\theta) = cos\theta + isin\theta$

2015 دور 1 خارج /

$b - (\cos\,\theta + isin\theta)^8\,.\,(cos\theta - isin\theta)^4$

$sol: (cos\theta\, +\, i\,sin\theta)^8.(cos\theta\, -\, i\,sin\theta)^4 = (cos\theta\, +\, i\,sin\theta)^8.(cose\, +\, i\,sine)^{-4} = (cos\theta + isin\theta)^4$

$= cos4\theta + isin4\theta$

$OR\ (cos\theta\, +\, i\,sin\theta)^8\,.\,(cos\theta\, -\, i\,sin\theta)^4$

$= (cos\theta\, +\, i\,sin\theta)^4.[(cos\theta\, +\, i\,sin\theta)^4(cos\theta - i\,sin\theta)]^4$

$= (cos4\theta\, +\, i\,sin4\theta)(\cos^2\theta\, + \sin^2\theta)^4 = (cos4\theta\, +\, i\,sin4\theta)$

$OR\ (cos4\theta\, +\, i\,sin4\theta)^8.(cos4\theta - i\,sin4\theta)^4$

$= (cos8\theta + isin8\theta)(cos4\theta - isin4\theta)$

$= [cos\theta.cos4\theta + sin8\theta.sin4\theta] + [sin8\theta.cos4\theta - cos8\theta.sin4\theta]i$

$cos(8\theta - 4\theta) + is\,n(8\theta - 4\theta) = cos4\theta + isi4\theta$

2017 د 3 احيائي داخل / 2020 احيائي د 2 داخل / 2014 خارج : باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ ثم جد الجذران التربيعيان

$sol: z = -1+\sqrt{3}\,i \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$, $\sin = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد $\rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ القيمة الاساسية للسعة

$z\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) \rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3})\,; k = 0,1$

$if\ k = 0 = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

$if\ k = 0 = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

2020 تطبيقي د 3 /

$Sol: \sqrt{-1+\sqrt{3}i} = x+yi$ بتربيع الطرفين

$-1+\sqrt{3}\mathrm{i} = (\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2)+(2\mathrm{xy})\mathrm{i}$

$x^2 - y^2 = -1 \ldots\ldots (1\,, 2xy = \sqrt{3} \ldots\ldots\ldots (2\; y = \frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{x}} \ldots\ldots (3$

$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = -1 \rightarrow \left[x^2 - \frac{3}{4x^2} = -1\right].4x^2 \rightarrow 4x^4 - 3 = -4x^2 \rightarrow 4x^4 + 4x^2 - 3 = 0$

$\rightarrow (2x^2+3)(2x^2-1) = 0$ يهمل

$OR\ 2x^2 - 1 = 0 = 2x^2 = 1 = x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm\frac{2}{\sqrt{2}}}\right) \rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$

$= \{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right)\}$

2019 د 3 تطبيقي | باستخدام نتيجة ديموافر جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $1 - -\sqrt{3}$

$sol: z = 1 - \sqrt{-3} = 1 - \sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}, \sin = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ لان السعة تقع بالربع الرابع

$z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) \rightarrow z^{\frac{1}{2}} = [z(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})]^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}); k = 0,1$

$if\ k = 0 = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}i$

$if\ k = 1 = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{-1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

2019 تطبيقي دور 1 خارج / (5 -) باستخدام نظرية ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $27i$

$sol: z = 27i = 27\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$z^{\frac{1}{3}} = \left[27\left(\cos\frac{\pi}{2} + + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

$r = 27, \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow z^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}); k = 0,1,2$

$if\ k = 0 = z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$if\ k = 1 = z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$

$if\ k = 2 = z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = (\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 3(0 - i) = -3i$

$\left\{-3i, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right\}$ مجموعة الحل هي

2019 تطبيقي دور 1 داخل/ حل المعادلة التالية في c باستخدام نتيجة مبرهنة ريموافر $\frac{x^3}{i} - 27 = 0$ يبدأ الحل بضرب كل المعادلة في (i) و من ثم جعلها $x^3 = 27i$ ثم اخذ الجذر التكعيبي للطرفين

نفس الحل السابق عندها تستبدل $(z^{\frac{1}{3}})$ ب (x)

2019 د 3 احيائي / بإستخدام نتيجة ديموافر حل المعادلة التالية في c $x^3 + 1 = 0$

$sol: x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1 = x^3 = \cos\pi + i\sin\pi \rightarrow x = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$

$r = 1, \theta = \pi = x = (1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right); \square = 0,1,2$

$if\ k = 0 = x = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$

$if\ k = 1 = x = \left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

$if\ k = 2 = x = \left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

مجموعة الحل هي $\{-1\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

الدكتور محمد الربيعي

اثرائيات

النموذج الاول

س1\ حل المعادلة التالية في c $\mathrm{i}\,x^2 + 3x + \sqrt{-16} = 0$

س 2 \ اذا كان $x = 3 + 4\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$ مثل على شكل ارجاند x-y

س 3 \ جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها العدد المركب الذي مقياسه 2 وسعته الأساسية $\frac{5\pi}{6}$

س 4 \ باستخدام مبرهنة ديموافر جد $(-1 - i)^4$

س 5 \ اذا كان $1 - 2i$ احد جذري العادلة $x^2 + 2x - 2ix + k = 0$ فما الجذر الآخر وماقيمة $k \in C$.

النموذج الثاني

س 1 \ اذا كان $x = -3 + 4\mathrm{i}, y = 1 + 2i$ مثل على شكل ارجاند x+y

س 2 \ اذا كان $-3 + 4i$ احد جذري العادلة $x^2 + bx + 5 + 10\mathrm{i} = 0$ فما الجذر الآخر وما قيمة $b \in C$.

س 3 \ جد الجذران التربيعيان للعدد الركب .. $\frac{1-i}{1+i}$

س 4 \ جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $\frac{1-2i}{1+i}x + \frac{3-\mathrm{i}}{1-i}y = 3 - 21\mathrm{i}$

س 5 \ باستخدام مبرهنة ديموافر حل المعادلة التالية في C

$$2x^4 + 162\,i = 0$$

النموذج الثالث

س1\ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب 2i- باستخدام نتيجة ديموافر

س 2\ جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $\frac{1-2i}{1+i}y + \frac{3-i}{1-i}x = 3 - 21I$

س 3\ جد مجموعة حل المعادلة التالية في c $x^2 - ix + 6 = 0$

س 4\ جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{3+i}{1+i}, (2 - 3i)^2$

س 5\ اذا كان $x = 1 - 3i, y = 2 + i$ اثبت ان $\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

النموذج الرابع

س1\ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{10}{3-i}+\frac{5}{i}$

س2\ جد قيمتي $x,y \in R$ اذا علمت ان $\frac{9-2i}{1+i}, \frac{85}{x+yi}$ مترافقان

س3\ اذا كان احد جذري المعادلة $z^2-(3+i)z+a+2i=0$ حقيقيا ، جد الجذر الآخر وقيمة a الحقيقية اذا كان $Z=\cos\theta+i\sin\theta$

س4\ برهن ان $\frac{2iz}{x^2-1}=csc\theta$ ضمن مجالها

س5\ اذا كان $z=\left(\frac{2+3i}{3-\sqrt{-4}}\right)^{17}$ جد باستخدام ديموافر قيمة $(z-1)^{-5}$

النموذج الخامس

س1\ جد قيم $x,y \in R$ اذا علمت ان x^2+y+4i, ix^2y-3 مترافقا

س2\ باستخدام نتيجة ديموافر جد جميع قيم $(\cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4})^{\frac{1}{2}}$

س3\ اذا كان $a+1-2i,-b+2i$ جذري المعادلة التربيعية $x^2+2x+c=0$ جد قيم $a,b,c \in R$

س4\ اذا كان $Z=cos\theta-i\,sin\theta$ اثبت ان $z^2\frac{1-\tan\theta}{1+tan\theta}$

س5\ جد العدد المركب Z اذا علمت ان $\mod(z)=2, \mod(z-3)=3$

النموذج السادس

س1اثبت ان $\frac{(2a+b)+bi}{a+(a+b)i}=1-i$ حيث $a,b \in R\backslash\{0\}$

س2\ اذا كان $x=-3+4i, y=1+2i$ مثل على شكل ارجاند $x+y$

س3\ حل المعادلة التالية في c $\frac{x^3+i}{x-i}+\frac{x^2+1}{x+i}=1$

س4\ اذا كان $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ اثبت ان $\frac{(1+\cos6\theta+t\sin6\theta)^4}{16\cos^4 3\theta}=z^{12}$

س5\ جد قيمتي $x,y \in R$ التي تحقق $\frac{(xi+y)(x^3-iy^3)}{x^2+y^2}=\frac{13}{2-3i}$

الفصل الثاني : القطوع المخروطية

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع المكافئ

2006 دور1 / جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(3,6),(-3,6)$ ثم جد معادلة دليله .

الحل / بما ان النقطتان تقعان بالربعين الاول والثاني في بؤرة القطع المكافئ تقع على المحور الصادي الموجب

معادلة الدليل $y=-\frac{3}{8}$, البؤرة $f\left(0,\frac{3}{8}\right) \Rightarrow p=\frac{3}{8} \Rightarrow x^2=4py \Rightarrow 9=24p$

معادلة القطع المكافئ $\Rightarrow x^2=4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow x^2=\frac{3}{2}y$

2006 دور 1 / جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,3)(1,-3)$ ثم جد معادلة دليله .

الحل/ بما ان القطع المكافئ يمر بنقطتين تقعان في الربعين الاول والرابع فان بؤرته تقع على محور السينات الموجب

معادلة القطع المكافئ $y^2=4px \Rightarrow 9=4p \Rightarrow p=\frac{9}{4} \Rightarrow y^2=9x$

معادلة الدليل $x=-p \Rightarrow x=-\frac{9}{4}$, البؤرة $f(p,0)=\left(\frac{9}{4},0\right)$

2018 د 3 تطبيقي داخل / قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2=hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6\ ,3)$ جد قيمة h

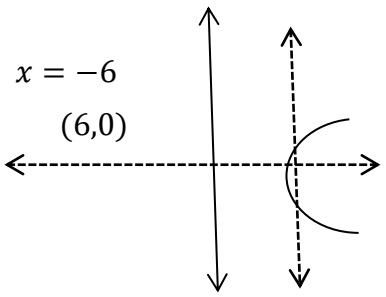
$Sol: \frac{1}{4}y^2=hx \Rightarrow y^2=4hx$ (معادلة قطع مكافئ بؤرته تقع على محور السينات)

$\because x=-6$ معادلة الدليل $\Rightarrow F(6,0)$ البؤرة $\Rightarrow p=6$

$\Rightarrow x=-6$ معادلة الدليل $\Rightarrow f(6,0)$ البؤرة $\Rightarrow p=6$

$y^2=4px \Rightarrow y^2=4hx$

$\Rightarrow 4h=4p \Rightarrow h=p \Rightarrow h=6$



2004 دور 2 / جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة (1 , 4) ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة

الحل/ بما ان النقطة تقع في الربع الأول وبؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات فان معادلته

معادلة القطع المكافئ $y^2=4px \Rightarrow 16=4p \Rightarrow p=4 \Rightarrow y^2=16x$

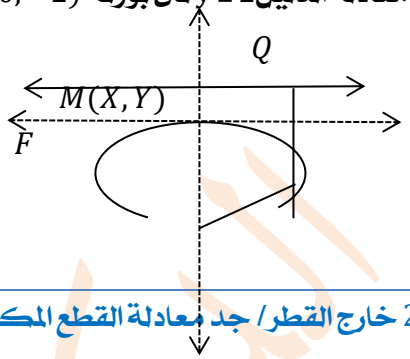
نقطة التماس $(1,4)$, ميل المماس للمنحني $2yy'=16 \Rightarrow y'=\frac{8}{y} \Rightarrow m=\frac{8}{4}=2$

$(y-y_1)=m(x-x_1) \Rightarrow (y-4)=2(x-1)$

2018 د 2 تطبيقي داخل/ بإستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله ؟

$$2y - 4 = 0$$

بما ان معادلة الدليل y = 2 فان بؤرته $f(0,-2)$ و $Q(x,2)$



$$\overline{MF} = \overline{MQ}$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-2)^2}$$
$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = y^2 - 4y + 4$$
$$x^2 = -8y$$ معادلة القطع المكافئ

2007 خارج القطر/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته نقطة الانقلاب للدالة

$f(x) = (x-1)^3$

$sol: f(x) = (x-1)^3 + f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x-1)$

$6(x,1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow (1,0)$ نقطة الانقلاب وهي بؤرة القطع المكافئ

$p = 1 \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4x$ معادلة القطع المكافئ

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

2017 د1 احيائي موصل / جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ودليله المار بالنقطة (1 ، - 2) يوازي محور الصادات

الحل/ بما ان النقطة (2,-1) تنتمي الى الدليل وكانت البؤرة تقع على محور السينات فإن معادلة الدليل x =2

$f(-2,0)$ بؤرة القطع المكافئ $\rightarrow p = 2$

$y^2 = -4px \rightarrow y^2 = -8x$ معادلة القطع المكافئ

2019 احيائي د2/ جد معادلة القطع المكافئ بطريقة التعريف اذا كانت بؤرته نقطة انقلاب الدالة $f(x) = x^3 + 6x^2 - 16$ ورأسه نقطة الأصل .

$sol: f(x) = x^3 + 6x^2 - 16 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x \Rightarrow f''(x) = 6x + 12$

$6x + 12 = 0 \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 24 - 16 = 0$

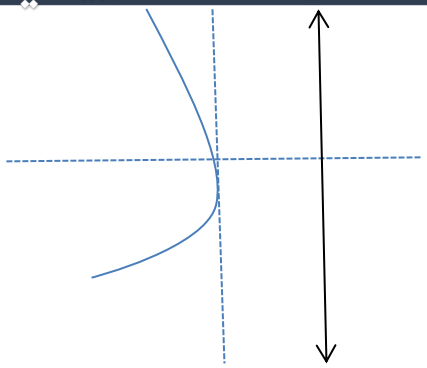
$(-2,0)$ نقطة انقلاب

وللتحقق من كونها نقطة انقلب (يستحب) اختبارها على خط الاعداد ولو ان من المنطق ان النقطة هي مؤكدة نقطة انقلاب

ولكن من اجل اخذ الاحتياط في تحصيل الدرجة الكاملة

إشارة المشتقة الثانية $\longleftarrow$ ----------(-2)++++++++++++++ $\longrightarrow$

للإيجاد معادلة قطع مكافئ بؤرته (0 ، -2) ومعادلة دليله هي x = 2 بالتعريف



$\overline{MF} = \overline{MP}$

$\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-y)^2}$

$(x+2)^2+(y)^2 = (x-2)^2$

$x^2+4x+4+y^2 = x^2-4x+4 = y^2 = -8x$

2020 تطبيقي د 1 خارج / جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطة (2 , 5 -) ورأسه نقطة الأصل وبؤرته تقع على احد المصورين الاحداثيين .

الاحتمال الأول / اذا كانت البؤرة تقع على محور السينات والنقطة تقع بالربع الثاني فإن معادلته

$y^2 = -4px$ هي

$25 = -4p(-2) \Rightarrow 25 = 8p \rightarrow p = \frac{25}{8}$

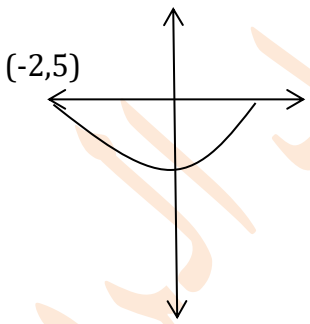
$\Rightarrow y^2 = -4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = -\frac{25}{2}x$ معادلة القطع المكافئ

الاحتمال الثاني | اذا كانت البؤرة تقع على محور الصادات والنقطة تقع بالربع الثاني فإن معادلته

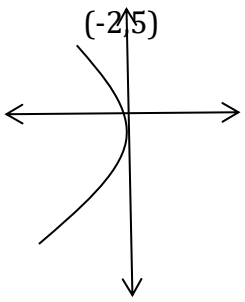
$x^2 = 4py$ هي

$4 = 4p(5) \Rightarrow 4 = 20p \Rightarrow p = \frac{1}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5}y$ معادلة القطع المكافئ

الاحتمال الثاني



الاحتمال الأول



2020 احيائي د 3 / جد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2 + 4y = 0$ والمار بالنقطة (1 , 1)

(1 , 1) ∈ القطع المكافئ $\rightarrow A(1)^2 + 4(1) = 0 \Rightarrow A = -4$

$-4x^2 = -4y \Rightarrow x^2 = y, x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

البؤرة $F(0,p) = \left(0,\frac{1}{4}\right)$, معادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

الاسئلة الوزارية من تمارين (2-1)

5 - أوجد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر بالنقطة $(1,2)$ ثم ارسم القطع

2020 احيائي د 1 خارج / 2019 تطبيقي د 2 | 2018 تمهيدي أحيائي

$sol: (1,2) \in Parabola = A(1)^2 = -8(2) = A = -16$

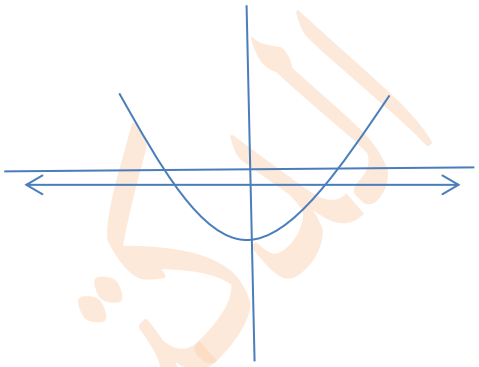
$-16x^2 = -8y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y , x^2 = 4py$

$4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$

$f\left(0,\frac{1}{8}\right)$ البؤرة , $v(0,0)$ الرأس

$y = \frac{-1}{8}$ معاملة الدليل , $x = 0$ معادلة المحور

x	0	±1
y	0	2



2011 الدور 1 / جد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ المار بالنقطة $(2,1)$.

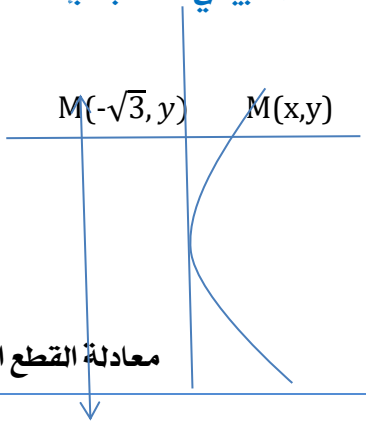
الحل / أي نقطة تنتمي الى القطع المكافئ تحقق معادلته

$Ax^2 + 8y = 0 \Rightarrow 4A + 8 = 0 \Rightarrow 4A = -8 \rightarrow A = -2$

$-2x^2 = -8y \rightarrow x^2 = 4y , x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 4 \rightarrow p = 1$

معادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = -1$, بؤرة القطع المكافئ $f(0,p) = (0,1)$

2020 تطبيقي د 1 / جد باستخدام التعريف معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(\sqrt{3}, 0)$



MF=MQ

$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$

$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + (y-0)^2}$

$(x-\sqrt{3})^2 + (y)^2 = (x+\sqrt{3})^2$

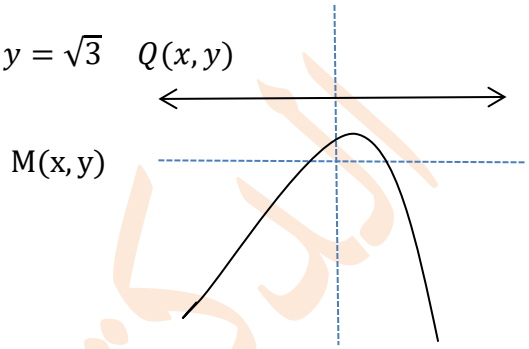
$= x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 + 3 \Rightarrow y^2 = 4\sqrt{3}x$ معادلة القطع المكافئ

2005 تمهيدي

ب- معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ والرأس في نقطة الأصل

بما ان معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ فان بؤرته $F(0, -\sqrt{3})$

2020 تطبيقي د 2 داخل /



$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(X-0)^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$$

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3$$

$$x^2 = -4\sqrt{3}\,y$$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص

2002 دور 1 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة

واجب بيتي H.W / معادلة القطع الناقص $ans: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2006 تمهيدي / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة النصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 12 وحدة والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول

واجب بيتي H .W/ معادلة القطع الناقص $ans: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ **وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات**

الحل/ في القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x, y^2 = 4Px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow P = 3$

بؤرة القطع المكافئ هي (3,0) أي ان بؤرتي القطع الناقص في (3,0) ، (3, 0 -) أي ان $c = 3$

2020 تطبيقي د 1 خارج / 2019 د 3 تطبيقي/

في القطع الناقص $2b = 10 \Rightarrow b = 5, c = 3$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

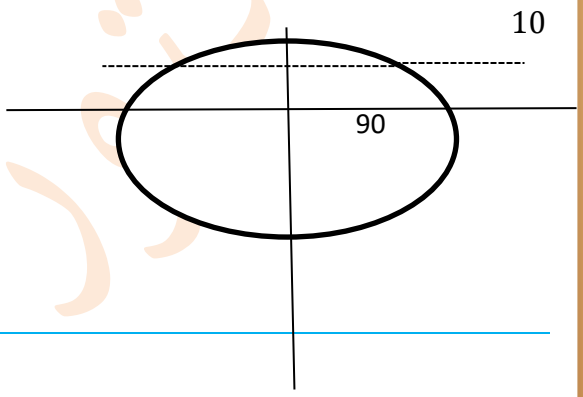
2014 تمهيدي / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2015 تمهيدي / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 16y = 0$ وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة

واجب بيتي H . W / معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20}$

2016 دور 2 خارج / يدور القمر حول الارض في مدار على صورة قطع ناقص سيني البؤرتين. تقع الارض في احدى بؤرتيه فإذا كانت اطول مسافة بين الارض والقمر 90 km وأقصر مسافة بينهما 10 km جد الاختلاف المركزي للقطع الناقص



$2a = 90 + 10 \Rightarrow 2a = 100 = a = 50$

$2c = 90 - 10 \Rightarrow 2c = 80 \Rightarrow c = 40$

$e = \frac{c}{a} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

2010 دور 2/ اذا كانت z $Ky^2 + 3x^2 = z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علما ان مساحة منطقته $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد قيمتي K,Z

$sol: if\ x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3} \rightarrow (0, \sqrt{3}) \in Ellipse$

$b = \sqrt{3}$ لأن البؤرة تقع على محور السينات

$$2\sqrt{3}\pi = \square b\pi \rightarrow 2\sqrt{3}\pi = \sqrt{3}a\pi \rightarrow a = 2$$

$$[Ky^2 + 3x^2 = Z] \div Z \frac{y^2}{\frac{z}{k}} + \frac{x^2}{\frac{z}{3}} = 1 \rightarrow a^2 = \frac{z}{3}, b^2 = \frac{z}{k}$$

$$4 = \frac{z}{3} \Rightarrow Z = 12,3 = \frac{z}{k} \rightarrow 3 = \frac{12}{k} \rightarrow k = 4$$

2008 دور1 / قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = K$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة K = c

$sol: 2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$$= [4x^2 + 2y^2 = k] \div k \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{k}{2}, b^2 = \frac{k}{4}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow [\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3] . 4 \Rightarrow 2k = k + 12 = k = 12$$

2003 دور 1 / قطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طول محوريه واحداثيي رأسيه وبؤرتيه

$sol: [x^2 + 4y^2 = 4] \div 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b^2 = 1 \Rightarrow b = 1, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = 1 + c^2$

$c^2 = 3 + c = \sqrt{3}$

طول المحور الصغير 2b=2 , طول المحور الكبير 2a = 4

بؤرتي القطع الناقص $(\pm\sqrt{3}, 0)$, رأسي القطع الناقص $(\pm 2,0)$

2012 دور 2/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة

$sol: A = ab\pi = 24\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 24$

الجزء المقطوع من محور السينات يمثل (اما المحور الكبير 2a) او (المحور الصغير 2b)

if $2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 4b = 24 \Rightarrow b = 6$ تهمل

$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 4a = 24 \Rightarrow a = 6$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات يمثل المحور الصغير فان البؤرتين والرأسين يقعان على محور الصادات اي ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$

2014 دور 4 انبار / اذا كانت $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احد بؤرتيه $(0, d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e + id\|$

$sol: e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{4 + 4i + 2i + 2i^2}{1+1} = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i \Rightarrow e = 1, d = 3$

$2\|e + id\| = 2\|1 + 3i\| = 2\sqrt{1+9} = 2\sqrt{10}$

$(0, d) = (0,3)$ احدى بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3$

$2a = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 1$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

عزيزي الطالب ... هل تتذكر ان مطلق العدد المركب هو مقياس ذلك العدد حيث ان $\|z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

2018 د 2 احيائي داخل/ اذا كان $\frac{11+2i}{1+2i} = d + ei$ جد معادلة القطع الناقص الذي رأسه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه (0,e) وطول محوره الكبير $2\| d + ie \|$

$sol: \frac{11+2i}{1+2i} = \frac{11+2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{11-22i+2i-4i^2}{1+4} = 3 - 4i$

$d + ei = 3 - 4i \rightarrow d = 3, e = -4$

$F(0, e) = (0, -4)$ احدى بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 4 \in y - axis$

$2a = 2\|d + ie\| = 2\|3 - 4i\| = 2\sqrt{9+16} = 2(5)\ 10 \rightarrow a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 + b^2 = 9$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2014 تمهيدي/ جسر على شكل نصف قطع ناقص ، المسافة بين نهايتي قاعدته (24m) وارتفاعه | (9 m) جد ارتفاع الجسر عند النقطة التي تبعد عن بدايته (6m)

الحل/ نفرض ان مركز الجسر هو نقطة الاصل فيكون طول الجسر الافقي هو المحور الكبير للقطع الناقص وارتفاعه هو نصف المحور الصغير $2a = 24 \Rightarrow a = 12, b = 9$

وعلى اعتبار ان اي نقطة تقع على القطع الناقص تحقق معادلته فان النقطة التي تبعد عن بداية الجسر6 متر هي النقطة التي تبعد عن نقطة الاصل 6 متر ايضا اي ان احداثيها السيني يساوي 6 والمطلوب اللارتفاع الذي يمثل الإحداثي الهادي للنقطة.

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{144}+\frac{y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{81}=1-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{81}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{293}{4} \Rightarrow y=\frac{9\sqrt{3}}{2}m$$

2017الدور الثالث تطبيقي داخل/ جدارية على شكل نصف قطع ناقص طول قاعدته (24m) واعلى نقطة ارتفاع لها تساوي (9m) جد ارتفاع العمود الموضوع على بعد (6m) من بداية قاعدته.

بإمكانك عزيزي الطالب ان تلاحظ تطابق الفكرة في السؤالين اعلاه ويجب عليك ان تنتبه فيما اذا كان الطلوب ايجاد الارتفاع من بداية او نهاية الجسر او الجدارية من جهة وبين الارتفاع من مركز اي منهما من جهة اخرى فإذا كان a يمثل احد الرأسين وكانت النقطة المراد معرفة ارتفاعها تبعد عن احد الرأسين (البداية او النهاية) بمقدار z فإن x = a - z اما اذا كانت النقطة تبعد عن المركز بمقدار z فإن x = z .... ارجو ملاحظة ذلك .

2015 دور 1 / جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة البصل وبورتاه النقطتان $(\pm 5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة .

$(sol): c = 5 \in x-axis, 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 25 \Rightarrow b^2 = 11$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{81}=1$ معادلة القطع الناقص

التقييم / سؤال سهل جدا جدا واعتقد ان ما كان مقدر له ان يكون باستخدام التعريف وقد تم تخفيف السؤال على الطالب بشكل كبير علما ان الطالب الذي استخدم التعريف في حله يعطى درجة كاملة.

2020 تطبيقي د 3 / 2017 الدور الثالث احيائي داخل / جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة انقلاب الدالة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$ الكبير يساوي (12) وحدة طول

$(Sol): f(x) = (x+2)(x-1)^2 = (x+2)(x^2-2x+1)$

$f'(x) = (x+2)(2x-2) + (x^2-2x+1)(1)$

$= 2x^2 - 2x + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 2 \Rightarrow (0,2)$ نقطة الانقلاب والتي هي أحدى بؤرتي القطع الناقص

$\Rightarrow c = 2, f \in y-axis$ ($0, \mp 2$) بؤرتي القطع الناقص

$2a = 12 \Rightarrow a = 6, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 32$

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{32}=1$ معادلة القطع الناقص

تأكيد / اختبار نقطة الانقلاب على خط الاعداد للمشتقة الثانية غير ملزم للطالب لأن صيغة السؤال تؤكد وجود نقطة انقلاب ، كما ان السؤال تنقصه عبارة (مركز القطع الناقص نقطة الأصل) ليكون ادق لغويا .

تأكيد | نقطة الانقلاب مفردة سيتم تعلمها ضمن مواضيع الفصل الثالث لذا يؤجل قراءة هذا السؤال لحين دراسة الفصل الثالث .

2015 دور 2 / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور الصادات ومساحته 32π وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$

$sol: : \frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \ldots\ldots (1)$

$a\,b\,\pi = 32\,\pi \Rightarrow 2b^2 = 32 \rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 8$

معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{16} = 1$

2008 دور 1 / لتكن $y^2 + 12x = 0 , y^2 - 12x = 0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات طول

$(sol: y^2 = 12x , y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$

$y^2 = -12x , y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$

معادلة دليليهما $x = 3, x = -3$ بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الناقص $(3,0), (-3,0)$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5$

$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 25 \Rightarrow a^2 = 34$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

1999 دور 2 / النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص

2020 احيائي د 2 تكميلي /

$SOL: \because (\frac{1}{3}, 2) \in$ القطع المكافئ $\Rightarrow$ تحقق معادلته

$y^2 = 4Px = 4 = 4P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 12 = 4P \Rightarrow p = 3 \Rightarrow (3,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافئ $\Rightarrow (3,0), (-3,0)$) بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{4} \ldots\ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots (2 \Rightarrow \left(\frac{5b}{4}\right)^2 = b^2 + 9 = [\frac{25b^2}{16} = b^2 + 9].16$

$25b^2 = 16b^2 + 144$

$\Rightarrow 9b^2 = 144 = b^2 = 16 \rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \frac{5}{4}.4 \Rightarrow a = 5$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2004 دور 1 / 2015 دور 2 خارج / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول

$(sol: x^2 = 24y, x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 24 \rightarrow p = 6$

$\Rightarrow (0,6)$ بؤرة القطع المكافئ $\Rightarrow (0, \pm 6)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 6 \in y - axis$

$2a - 2b = 4 \Rightarrow a - b = 2 \rightarrow a = 2 + b \ldots..(1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots..(2) \Rightarrow (2 + b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$

$4b = 32 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 10$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

2010 تمهيدي/ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير يساوي ثلاثة امثال طول محوره الصغير

sol : $y^2 = -8x, y^2 = -4px\ 2 \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow (-2,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(\pm 2,0)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 2 \in x - axis$

$2a = 3(2b) \Rightarrow a = 3b \ldots.(1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots.(2)$

$9b^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 8b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2x^2}{9} + \frac{2y^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

2010 دور 1/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20π وحدة مساحة

$sol : y^2 = 16x, y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow (4,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(4,0)$ القطع الناقص $\rightarrow$ either a = 4 OR b = 4

$ab\,\pi = 20\,\pi \rightarrow ab = 20$

$if\ a = 4 \Rightarrow 4b = 20 \Rightarrow b = 5$ تهمل

$if\ b = 4 \Rightarrow 4\square = 20 \Rightarrow a = 5$

بما أن القطب يقع على محور السينات فان البؤرتين والرأسين على محور الصادات

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2012 خارج / قطع ناقص رأساه $(\pm 5,0)$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والمار دليله بالنقطة $(-3,4)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص .

الحل/ بما ان رأسي القطع الناقص يقعان على محور السينات فإن بؤرتيه يقعان على محورالسينات ايضا اي ان بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات كذلك.

ولأن دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (4 , 3 -) فإن معادلة الدليل x = - 3

معادلة القطع المكافئ $\Rightarrow p = 3, y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 12x$ بؤرة القطع المكافئ $F(3,0)$

بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3$ $(\pm 3,0)$

دور اول خارج 2018 احيائي / رأسي القطع الناقص $\Rightarrow$ a = 5 $(\pm 5,0)$

$□^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2014 تمهيدي / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات

sol: $y^2 = 12x \, , y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow (3,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(\pm 3,0)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = 3 \in x - axis$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2017 الدور الاول احيائي موصل / قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 4\sqrt{5}\,x = 0$ ومجموع مربعي طولي محوريه (52) وحدة طول، جد معادلته

الحل/ في القطع المكافئ $y^2 + 4\sqrt{5}\,x = 0$

$y^2 = -45\,x \, , y^2 = -4px \rightarrow -4p = -4\sqrt{5} \rightarrow p = \sqrt{5}$

$f(-\sqrt{5},0)$ بؤرة القطع المكافئ $\rightarrow (\pm\sqrt{5},0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = \sqrt{5} \in x - axis$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 52 \rightarrow [4a^2 + 4b^2 = 52] \div 4 \rightarrow a^2 + b^2 = 13 \ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = b^2 + 5 \ldots\ldots (2)\ in(1)$

$b^2 + 5 + b^2 = 13 \rightarrow 2b^2 = 8 \rightarrow b^2 = 4\ in(2) \rightarrow a^2 = 9$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2020 احيائي د 1 / قطع ناقص معادلته $k\,x^2 + h\,y^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل و مجموع مربعي طولي محوريه يساوي (52) احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{5}\,x$ جد $h\,,k \in R$

الحل/ في القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{5}\,x$

$y^2 = 4\sqrt{5}\,x \, , y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 4\sqrt{5} \rightarrow P = \sqrt{5}$

$f(\sqrt{5},0)$ بؤرة القطع المكافئ $\rightarrow (\mp\sqrt{5},0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = \sqrt{5} \in x - axis$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 52 \rightarrow [4a^2 + 4b^2 = 52] \div 4 \rightarrow a^2 + b^2 = 13 \ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = b^2 + 5 \ldots\ldots (2)\ in(1)$

$b^2 + 5 + b^2 = 13 \rightarrow 2b^2 = 8 \rightarrow b^2 = 4\ in(2) \rightarrow a^2 = 9$

$[kx^2 + hy^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{\frac{36}{h}} = 1$

بما ان البؤرتين تقعان على محور السينات فإن

$a^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow 9 = \frac{36}{k} \Rightarrow 9k = 36 \Rightarrow k = 4$

$b^2 = \frac{36}{h} \Rightarrow 4 = \frac{36}{h} \rightarrow 4h = 36 \rightarrow h = 9$

2020 احيائي د1 خارج/ 2020 احيائي د 3 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل و ينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله 8 وحدات طول ومن محور الصادات جزءا طوله 12 وحدة طول ثم جد مساحته ومحيطه والمسافة بين بؤرتيه ؟

تلميح / بالتأكيد ان الجزأين المقطوعين من محوري السينات والصادات يمثلان طولي محوريه اكبرهما 2a واصغرهما 2b والبؤرتان تقعان على محوره الكبير دائما.

$sol: 2a = 12 \Rightarrow a = 6, 2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

$A = ab\pi = A = 24\pi \text{ unit}^2$ مساحة القطع الناقص

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \rightarrow P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{26}\ unit$ محيط القطع الناقص

$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow c = 2\sqrt{5}$

$2c = 4\sqrt{5}$ البعد بين بؤرتيه

2017 الدور الاول تطبيقي داخل / جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومجموع بعدي اي نقطة من نقاطه عن البؤرتين يساوي 24 وحدة

Sol : $y^2 = 16x \rightarrow y^2 = 4px \rightarrow 4p = 16 \rightarrow p = 4 \rightarrow (4,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(\mp 4, 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 4$

$2a = 24 \rightarrow a = 12$ في القطع الناقص

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 144 = b^2 + 16 \rightarrow b^2 = 128$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$ معادلة القطع الناقص

2018 تمهيدي تطبيقي/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 12x = 0$ والفرق بين طولي محوريه (2) وحدة طول

$(sol: y^2 = -12x, y^2 = -4px \rightarrow -4p = -12 \rightarrow p = 3$

$(-3,0)$ بؤرة القطع المكافئ $\rightarrow (3, \pm 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 3 \in x - axis$

$2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \ldots\ldots (1)$

$a^2 + b^2 + c^2 \ldots\ldots (1) \Rightarrow (1+b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 1 + 2b + b^2 = b^2 + 9$

$2b = 8 \Rightarrow b = 4 a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2019 د 3 احيائي/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور السينات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة

$sol: y = 0 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6 \rightarrow (6,0) \in$ القطع الناقص

$A = 24\pi \rightarrow ab\,\pi = 24\,\pi \rightarrow a\,b = 24$

$\text{if a} = 6 \rightarrow 6\text{b} = 24\,\text{b} \rightarrow \text{b} = 4$ الاحتمال مقبول

$if\ b = 6 \rightarrow 6a = 24 \rightarrow = 4a$ الاحتمال مرفوض

البؤرتين تقعان على محور السينات ← تمثل احد رأسي القطع الناقص $(6,0)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

تلميح / لايجاد نقطة تقاطع اي منحني او مستقيم مع محور السينات نفرض ان $y = 0$ ثم نعوضها بالمعادلة الاصلية للاستخراج قيمة او قيم x المقابلة لها ولإيجاد نقطة تقاطع اي منحني او مستقيم مع محور الصادات نفرض ان $x = 0$ ثم نعوضها بالمعادلة الاصلية لاستخراج قيمة او قيم y المقابلة لها، وللإيجاد نقاط تقاطع مستقيم او منحني مع المحورين الأحداثيين معا نقوم بكلتا العلميتين.

2016 دور 1 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi cm^2$ ؟

$sol: y^2 + 24x = 0 \rightarrow y^2 = -24x, y^2 = -4px \rightarrow 4p = 24 \rightarrow p = 6$ في القطع المكافئ

$2\text{p} = 12$ تمثل المسافة بين بؤرة القطع المكافئ المعطى ودليله

$2c = 2p \rightarrow 2c = 12 \rightarrow c = 6$ في القطع الناقص

$ab\,\pi = 80\,\pi \Rightarrow ab = 80 \rightarrow a = \frac{80}{b}$ في القطع الناقص

$a^2 = \text{b}^2 + \text{c}^2 \Rightarrow \left(\frac{80}{\text{b}}\right)^2 = \text{b2} + 36 \Rightarrow \left[\frac{6400}{\text{b}^2} = \text{b}^2 + 36\right].\text{b2}$

$6400 = b^4 + 36b^2 \Rightarrow b^4 + 36b^2 - 6400 = 0$

$(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 10$

بما انه لم يذكر موقع بؤرة القطع الناقص فأن المعادلة يمكن ان تكون بكلا الاحتمالين

$either\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

$or\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

2019 تطبيقي د 1 داخل / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات والبعد بين بؤرتيه يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ ودليله اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi\ cm^2$ ؟

2017 الدور الاول احيائي داخل /جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الكبير يساوي 12 cm واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2+12x=0$ بطريقة التعريف ؟

$(Sol: x^2 = 12y \Rightarrow x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$ بؤرة القطع المكافئ $(0,3)$

$\Rightarrow (0, \pm 3)$ بؤرتي القطع الناقص

let P(x,y) ∈ElliPse ; PF1 + PF2 = 2a

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = 12$

$\sqrt{x^2+y^2-6y+9} = 12 - \sqrt{x^2+y^2+6y+9}$ بتربيع الطرفين

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 144 - 24\sqrt{x^2+y^2+6y+9} + x^2 + y^2 + 6y + 9$

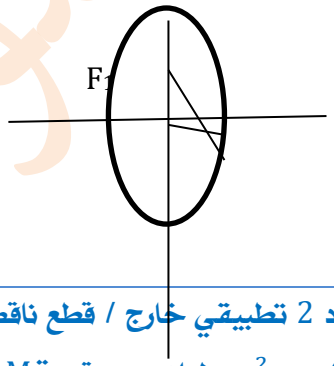
$[24\sqrt{x^2+y^2+6y+9} = 144 + 12y\ ]\ 12$ بالقسمة على

$2\sqrt{x^2+y^2+6y+9} = 12 + y$ بتربيع الطرفين

$4(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 144 + 24y + y^2$

$4x^2 + 4y^2 + 24y + 36 = 144 + 24y + y^2$

$[3y^2 + 4x^2 = 108\ ] \div 108$ معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{27} = 1$



2018 د 2 تطبيقي خارج / قطع ناقص معادلته $x^2 + 8y^2 = M$ السافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{6}\,x$ ودليله ، جد قيمة M .

$(sol:)\ y = 4\sqrt{6}\,x, y^2 = 4px \rightarrow 4p = 4\sqrt{6} \Rightarrow p = \sqrt{6}$

$\Rightarrow 2P = 2\sqrt{6}$ وهي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله

2p في القطع المكافئ = 2C في القطع الناقص $\Rightarrow 2C = 2\sqrt{6} \Rightarrow C = \sqrt{6}$

$[2x^2 + 8y^2 = M] \div M \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{M}{2}} + \frac{y^2}{\frac{M}{8}} = 1$

$a^2 = \frac{M}{2}, b2 = \frac{M}{8} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow [\frac{M}{2} = \frac{M}{8} + 6].(8)$

$4M = M + 48 \Rightarrow 3M = 48 \Rightarrow M = 16$

2018 د 3 احيائي داخل / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه $(0,6)$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = -12x$

$sol: y^2 = -12x \Rightarrow y^2 = -4px \rightarrow 4p = 12 \rightarrow p = 3$

F(-3,0) بؤرة القطع المكافئ $x = 3$ معادلة الدليل $(3,0)$ نقطة التماس

$(3,0) \in$ القطع الناقص $\Rightarrow b = 3$ لأن البؤرة تقع محور الصادات

$F(0,c) = (0,6) \rightarrow c = 6 \in y-axis$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 9 + 36 = 45$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{45} + \frac{x^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2019 تمهيدي تطبيقي / جد معادلة القطع المكافئ بإستخدام التعريف اذا كانت بؤرته هي البؤرة اليمنى للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

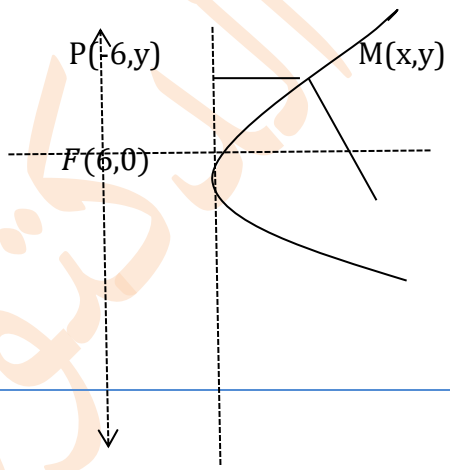
الحل |

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ معادلة القطع الناقص

$a^2=100, b^2=64 \rightarrow c^2=a^2-b^2=100-64=36 \rightarrow C=6$

$(F1\ F2)=(\mp 6,0), F1=(6,0)$ البؤرة اليمنى للقطع الناقص

معادلة دليله $x=-6$ ← بؤرة القطع المكافئ $(6,0)$



$\overline{MF}=\overline{MP}$

$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$

$\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+6)^2+(y-y)^2}$

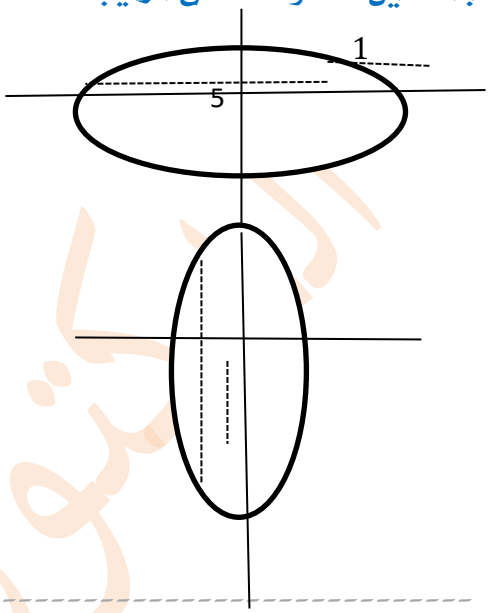
$(x-6)^2+(y)^2\ (x+6)^2$

$x^2-12x+36+y^2=x^2+12x$

$\Rightarrow y^2=24y$ معادلة القطع المكافئ

الاسئلة الوزارية الخاصة بتمارين القطع الناقص

س 1 \ جـ جد معادلة القطع الناقص الذي محوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ، 5 وحدة على الترتيب



sol : بما أن موقع البؤرة غير معلوم فيجب أخذ الاحتمالان معا

$2a = 1 + 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$2c = 5 - 1 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 = 9 \Rightarrow b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$

$either \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$ معادلة القطع الناقص

$or \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$ معادلة القطع الناقص

2014 نازحين / 2015 د 2 نازحين / جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ، 5 على الترتيب وبؤرتاه تقعان على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل.

لاحظ ان السؤال الوزاري تم تعيين موقع البؤرة لذا يجب الاكتفاء بأحد الحلين فقط عكس سؤال التمارين فانه لم يحدد موقع البؤرة لذا وجب التعامل مع كل الاحتمالين.

2020 تطبيقي د 1

س 2 / جد المعادلة القياسية للقطع الناقه الذي مركزه نقطة الأصل واختلافه المركزي يساوي $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير 12 وحدة طول

sol : بما ان موقع البؤرة غير معلوم فيجب أخذ الاحتمالان معا

$2b = 12 \Rightarrow b = 6$

$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = a$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4c^2 = 36 + c^2 \Rightarrow 3c^2 = 36 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$

$either \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

$or \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{48} + \frac{x^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

2000 دور اول | 2014 دور ثاني |

4 - جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2, 2\sqrt{3})$.

الحل/ في القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -4px \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$

بؤرة القطع المكافئ هي $(-2, 0)$ أي أن بؤرتي القطع الناقص هي $(2,0), (-2,0)$ أي ان $c = 2$

المعادلة القياسية للقطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left[\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1\right] . a^2b^2 \Rightarrow 12b^2 + 3a^2 = a^2b^2 \ldots . (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = a^2 = b^2 + 4 \ldots\ldots\ldots (2$$

$$12b^2 + 3(b^2 + 4) = (b^2 + 4)b^2 \Rightarrow 12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

$$b^4 + 4b^2 - 12b^2 - 3b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^4 - 11b^2 - 12 = 0$$

$$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0 \Rightarrow b^2 + 1 \neq 0 , b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

/ معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

2018 د1 تطبيقي خارج | 2018 د2 احيائي خارج |

5 -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3,4), (6,2)$

الحل / المعادلة القياسية للقطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left[\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1\right] . a^2\, b^2 \Rightarrow 9b^2 + 16a^2 = a^2\, b^2 \ldots . (1)$$

$$\left[\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1\right] . a^2\, b^2 \Rightarrow \mp 36b^2 \mp 4\, a^2 = \mp a^2\, b^2 \ldots . (2$$

بالطرح

$$-27b^2 + 12a^2 = 0 \Rightarrow 12a^2 = 27\, b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{4}\, b^2 \ldots . (3)$$

وذلك من تعويض المعادلة (3) في المعادلة (1)

$$9b^2 + (16\ \tfrac{9}{4}b^2) = \left(\tfrac{9}{4}\ ?^2\right) b^2$$

$$9b^2 + 36b^2 = \frac{9}{4}b^4 \Rightarrow 45b^2 = \frac{9}{4}b^4 \Rightarrow b^2 = 20 , a^2 = \left(\frac{9}{4}\right).(20) \Rightarrow a^2 = 45$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$

2016 دور 1 خارج / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (4,3), (6,2).

ans: : $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$

واجب بيتي H.W

---

6 - جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

الحل / في المنحني $x^2+y^2\,3x=16$ عن $x=0$ فان

$y^2=16\Rightarrow y=\pm4\Rightarrow(0,4),(0,-4)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c=4$

$y^2=12x, y^2=4PX\Rightarrow 4P=12\Rightarrow P=3$ في القطع المكافئ

2014 خارج / القطع الناقص $\in$ نقطة التماس $(-3,0)\Rightarrow$ معادلة الدليل $X=-3$

لأن البؤرتين تقعان على محور العادات والنقطة تقع على محور السينات $b=3$

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2=9+16\rightarrow a^2=25$

2020 احيائي د 1 /

معادلة القطع الناقص $either\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

دور اول داخل 2018 تطبيقي / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $x^2-24y=0$ ويمر من نقطتي تقاطع المنحني $x^2+y^2-16y-64=0$ مع محور السينات.

$(sol:)x^2-24y=0\Rightarrow x^2=24y, x^2=4py\rightarrow 4p=24\rightarrow p=6$

بؤرتي القطع الناقص (0 ± 6) و$(0)\rightarrow$ بؤرة القطع المكافئ $F(0,6)$

والبؤرتين تقعان على محور الصادات $c=6$

في المنحني $x^2+y^2-16y-64=0$ عندما يكون $y=0$ فإن

$x^2-64=0\Rightarrow x^2=64\rightarrow x=\pm8$

$\Rightarrow(8,0),(-8,0)$ نقطتي تقاطع المنحني مع محور السينات

لأن البؤرتين تقعان على محور الصادات $b=8$ $\Rightarrow$ القطع الناقص $\in(\pm8,0)$

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2=64+36=100$

معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$

7 - جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي احداثيها السيني (2 -)

2020 احيائي د 1 داخل 2019 احيائي د 2 داخل

الحل / في القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند $x = -2$ فان

$y^2 - 16 = 0 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (-2,4), (2,-4) \in ElliPse$

$2a = 2(2b) \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow a = 2b$ في القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

لاحظ التغيير في منطوق السؤال الوزاري

$\frac{17}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2\sqrt{17}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$ معادلة القطع الناقص

2013 خارج / جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه كنسبة 2 : 1 ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

واجب بيتي H.W

---

8 - قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h,k \in R$

الحل / في القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}x, y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 4\sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{3}$

$(\sqrt{3},0), (-\sqrt{3},0)$ بؤرتي القطع الناقص = $c = \sqrt{3}$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60 \Rightarrow [4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 15 = a^2 = 15 - b^2 \ldots.(1$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots..(2 \Rightarrow 15 - b^2 = b^2 + 3 \Rightarrow 2b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 6$

$= a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow [hx^2 + ky^2 = 36] \div \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{h} \Rightarrow 9 = \frac{36}{h} \Rightarrow h = 4$

$=, b^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow 6 = \frac{36}{k} \Rightarrow k = 6$

2017 الدور الثاني تطبيقي واحيائي داخل ...جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة

الحل/ في القطع المكافئ $x^2 = 24\,y\,, x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = 24 \Rightarrow P = 6$

بؤرتي القطع الناقص $(0,6),(0,-6) \Rightarrow c = 6$

في القطع الناقص $2a + 2b = 36 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow a = 18 - b \ldots\ldots(1)$

$□^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots(2 \Rightarrow (18 - b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 324 - 36b + b^2 + 36 = 36b = 324 - 36$

$\Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = 8$

2019 تمهيدي احيائي | 2012 تمهيدي / 2017 الدور الثاني احيائي خارج

$= a = 18 - 8 + a = 10$

معادلة القطع الناقص $either\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$

2014 دور 1 /

10- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1F_2(\pm 4,0)$ والنقطة P تنتمي اليه بحيث انمحيط المثلث PF_1F_2 يساوي 24 وحدة

$sol: (4,0) = (c,0) = c = 4$

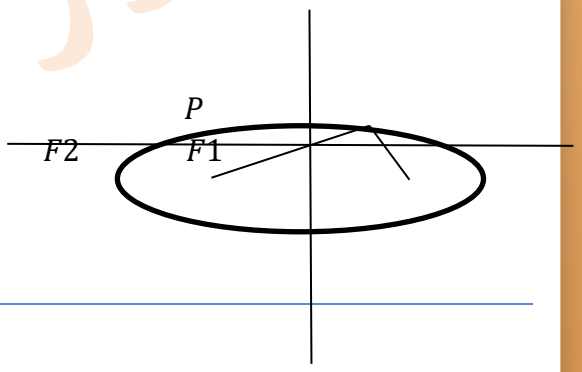
$P\,F_1 + P\,F_2 + F_1\,F_2 = 24$

$2a + 2c = 24 \Rightarrow 2a + 8 = 24$

$\rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 48$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$



واجب بيتي / 2016 دور 2 خارج/ جد معادلة القطع الناقه الذي بؤرتيه $F_1\,,F_2\ (\pm 5,0)$ والنقطة Q دور تنتمي اليه بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي 30 وحدة .

معادلة القطع الناقص $S: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$

2020 تطبيقي د2 تكميلي / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ، واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $X^2 = -16y$ والنقطة $p\ (x\,,y)$ تنتمي اليه بحيث ان محيط المثلث PF_1F_2 يساوي 24 وحدة طول

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{48} = 1$

التمارين العامة (قطع ناقص)

2011 دور 2 / 2015 د 4 رصافة / 2018 د 1 احيائي داخل

(5)جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة

Sol: مساحة القطع الناقص $A = a\,b\,\pi = 7\,\pi \rightarrow a\,b = 7 \rightarrow a = \frac{7}{b}$:

محيط القطع الناقص $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 10\pi \rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 5 \rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} = 25$

$a^2 + b^2 = 50 \ldots\ldots (2)$

$\frac{49}{b^2} + b^2 = 50 \Rightarrow 49 + b^4 = 50\,b^2 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$

$(b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0$

اما $b^2 = 49 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{7} = 1$ يهمل

او $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 7$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد

2017 د 2 تطبيقي داخل / النقطة P (6, L) تنتمي الى القطع الزائد $2x^2 = 6y^2 + 24$ جد قيمة L , وجد نصف القطر البؤري للقطع المرسوم من الجهة اليسرى من P

Sol : أي نقطة تنتمي الى منحني فانها تحقق معادلته

$[2x^2 = 6y^2 + 24] \div 2 \Rightarrow x^2 = 3y^2 + 12 \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 12$

$36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 3L^2 = 24 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm\sqrt{8}$

$p_1(6,8), p_2(6,-8) \in$ القطع الزائد

$[x^2 - 3y^2 = 12\,] \div \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 12\,, b^2 = 4\,, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$F_2(-4,0)$ البؤرة اليسرى للقطع الزائد $= P_1\,F_2$ هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليسرى

$P_1F_2 = \left(6 + \sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{8} - 0\right)^2 = \sqrt{100 + 8} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ وحدة طول

2017 الدور الثاني احيائي داخل / 2007 تمهيدي : جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي 4 وحدات

الحل/ أي نقطة تقع على محور السيئات يكون فيها $y = 0$

$y = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$ احدى بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 4$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2 , c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ معادلة القطع الزائد

2016 تمهيدي / جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي 3 ويمر بالنقطة (0,2)

الحل/ بما ان الاختلاف المركزي اكبر من (1) فان القطع الخروطي هو قطعا زائدا اذا مر القطع الزائد بنقطة تقع على احد المحورين وكان مركزه نقطة الاصل فانها تمثل الرأس حتما.

$a = 2 , \frac{c}{a} = 3 \Rightarrow c = 3a \Rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 36 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 32$

2020 احيائي د 2 تكميلي /

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{32} = 1$ بما ا الراس يقع على محور الصادات فان المعادلة

2005 دور ثاني / عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الأيمن $\frac{1}{\sqrt{3}}$ بمقدار بوحدة

sol : $a^2 = 3, b^2 = 1 , c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3 + 1 \Rightarrow c^2 = 4$

$F_1(2,0)$ البؤرة اليمنى للقطع الزائد ,let P (x , y) $\in$ للقطع الزائد $\Rightarrow PF_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ بتربيع الطرفين $\left[x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{3} \right] . 3$

$3x^2 - 12x + 12 + 3y^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 + 3y^2 = 0 \ldots\ldots (1)$

$\left[\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1\right] .3 \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 3 \Rightarrow 3y^2 = x^2 - 3 \ldots\ldots (2)$ 1 نعوض 2 في

$3x^2 - 12x + 11 + x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)(x - 2) = 0$

اما $x = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1 - 3 \Rightarrow 3y^2 = -2$ يهمل

او $x = 2 \Rightarrow 3y^2 = 4 - 3 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \left(2, \frac{1}{3}\right), \left(2, -\frac{1}{3}\right) \in$ القطع الزائد

2004 دور اول / جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه (-5,0) واحد رأسيه (3,0)

$sol: (-5,0) = (-c,0) \Rightarrow c = 5, (3,0) = (a,0) \Rightarrow a = 3$

$\because c > a$ فإن القطع المخروطي هو قطع زائد $\Rightarrow c^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

2017 د 1 تطبيقي موصل / قطع دائري مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة طول واختلافه المركزي يساوي (3) جد معادلته

الحل/ بما ان الاختلاف المركزي أكبر من (1) فإن القطع المخروطي هو قطع زائد

$ab = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$

$\ldots\ldots (1 \frac{c}{a} = 3 \Rightarrow c = 3a$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots (2 \Rightarrow 9a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow 8a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{x^2}{2} = 1$

2017 الدور الاول تطبيقي موصل 2 / جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطة (3,8) وبؤرتاه على محور السينات والبعد بين بؤرتيه ثلاثة امثال طول محوره الحقيقي

الحل/ بما ان بؤرتي القطع الزائد تقعان على محور السينات فإن معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

وبما أن النقطة (3,8) تنتمي الى القطع الزائد فإنها تحقق معادلته

$\left[\frac{9}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1\right] . a^2 b^2 \rightarrow 9b^2 - 64a^2 = a^2b^2 \ldots (1)$

$2c = 3(2a) \rightarrow c = 3a \ldots . (2)$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 9a^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 8a^2 \ldots . (3)\ in(1)$

$9(8a^2) - 64a^2 = ?^2(8a^2) \rightarrow 72a^2 - 64a^2 = 8a^4 \rightarrow [\ 8a^2 = 8a^4\ ] \div 8a^2$

معادلة القطع الزائد $a^2 = 1 \rightarrow b^2 = 8 \rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$

تأكيد) فكرة السؤال رغم عدم صعوبتها لكنها جديدة على نمط الاسئلة الوزارية بسبب المعلومتين المعطاة في السؤال غير كافية لحل العادلتين المتكونين مما اضطرنا للاستعانة بالعلاقة العامة بين a , b , c لحل السؤال

2001 دور ثاني / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x , y^2 = -20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة

$sol : y^2 = 20x , y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$y^2 = -20x , y^2 = -4px \rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

في القطع الزائد c=5 ← بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 5,0)$

$either\ 2a - 2b = 2 \rightarrow a - b = 1 \rightarrow a = b + 1 \ldots..(1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots.(2)$

$25 = (b+1)^2 + b^2 \rightarrow 25 = b^2 + 2b + 1 + b^2 \rightarrow 2b^2 + 2b - 24 = 0$

$b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow (b+4)(b-3) = 0 \rightarrow b = 3, a = 3 + 1 = 4$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

$or\ 2b - 2a = 2 \rightarrow b - a = 1 \rightarrow b = a + 1 \ldots..(1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots.(2)$

$25 = (a+1)^2 + a^2 \rightarrow 25 = a^2 + 2a + 1 + a^2 \rightarrow 2a^2 + 2a - 24 = 0$

$a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow (a+4)(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3, b = 3 + 1 = 4$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

تأكيد / حرف (و) في اللغة العربية لا يفيد الترتيب ففي القطع الزائد يمكن ان يكون المحور الحقيقي أكبر من المحور التخيلي أو بالعكس لذا فان الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والتخيلي أو الفرق بين طولي محوريه التخيلي والحقيقي لها نفس المعنى وهو الاحتمالان معا الا اذا ارتبط بقرينة كأن يقال ان المحور الحقيقي يزيد على المحور التخيلي بمقدار 4 او يقال ينقص عنه عندها يجب الالتزام بالترتيب .

2005 دور1 / 2008 دور 1/ 2015 د 4 رصافة / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x , y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق 8 وحدات

$y^2 = 20x , y^2 = 4px \rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$y^2 = -20x , y^2 = -4px + 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد $(5,0), (-5,0)$

$2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

2007 دور اول / لتكن $x^2 - ky^2 = 3$ تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ جد قيمة

sol: في القطع المكافئ

$k\ y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x,\ y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow P = 2$

بؤرة القطع المكافئ $(-2,0)$ $\Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد $(2,0)(-2,0) \Rightarrow c = 2$

$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 3, b^2 = \frac{3}{k}$

$c^2 = a^2 + b^2 = \left[4 = 3 + \frac{3}{k}\right] \Rightarrow \frac{3}{k} = 1 \Rightarrow k = 3$

2002 دور ثاني / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طولي محوريه الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين

$sol: [x^2 + 9y^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

في القطع الزائد $c = 6 \in x - axis$ $\Rightarrow$ رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 6,0)$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2a \Rightarrow 6 = 2a \Rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 36 = 9 + b2 \Rightarrow b^2 = 27$

$\frac{?^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

2017 احيائي د2 خارج / 2019 احيائي د 1 خارج / جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 24x = 0$ ودليله، كما ان بؤرتيه تمر برأسي القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

$sol: y^2 = 24x \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = 6$

المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله تساوي 2p

$2a = 2p \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $\in$ x - axis $(\mp 10,0)$

في القطع الزائد يكون

$a = 6, c = 10 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 100 = 36 + b^2 \Rightarrow b^2 = 64$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$

2017 الدور الثالث تطبيقي داخل / قطع مكافئ معادلته $x^2 = 10y - 3ky$ ومعادلة دليله $y = 2k$ جد قيمة k ومعادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ نفسه وطول محوره المرافق يساوي وحدتا طول

sol: $x^2 = (10 - 3k)y$ معادلة القطع المكافئ, $y = 2k$ معادلة دليله

$either: x^2 = 4py, x^2 = (10 - 3k)y$

$4p = 10 - 3k \ldots\ldots (1)$

$y = -p$ معادلة الدليل, $y = 2k \Rightarrow -p = 2k \Rightarrow p = -2k \ldots (2)\ in\ (1),$

$4(-2k) = 10 - 3k \Rightarrow -8k = 10 - 3k \Rightarrow -5k = 10 \Rightarrow k = -2\ in\ (2)$

$p = 4 > 0,\ y = -4, F(0,4)$ النتيجة مقبولة لأن البؤرة موجبة والدليل سالب

$or\ x^2 = -4py, x^2 = (10 - 3k)y$

$-4p = 10 - 3k \ldots\ldots (1)$

$y = p$ معادلة الدليل $, y = 2k \Rightarrow p = 2k \Rightarrow p = 2k \ldots (2)\ in\ (1),$

$-4(2k) = 10 - 3k \Rightarrow -5k = 10 \Rightarrow k = -2\ in\ (2)$

$p = -4 < 0$ النتيجة مرفوضة لأنها يجب ان تكون موجبة

$F_1F_2(0, \pm 4) \in y - axis \Rightarrow c = 4$ بؤرتي القطع الزائد

$2b = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 + 1 \Rightarrow a^2 = 15$

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{15} + \frac{x^2}{1} = 1$ معادلة القطع الزائد

2007 دور اول / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه 8 وحدات ورأساه هما بؤرتا القطع الزائد

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 16, b^2 = 9, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

$(\pm 5,0)$ بؤرتي القطع الزائد وهما رأسي القطع الناقص $\Rightarrow a = 5$ في القطع الناقص

$2c = 8 \Rightarrow c = 4, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2001 دور اول / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$

$3x^2 + 5y^2 = 120 \Rightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$

$a^2 = 40, b^2 = 24 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 40 = 24 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$(\pm 4,0)$ بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c = 4 \in x - axis$ في ق . ز

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = 4a \Rightarrow c = 2a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

2019 تمهيدي احيائي / 2009 دور ثاني/ 2003 دور ثاني | جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$

sol : في القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

$a^2=49, b^2=24 \rightarrow a^2=b^2+c^2 \rightarrow 49=24+c^2 \Rightarrow c^2=25 \rightarrow c=5$

في القطع الزائد a = 5 ← بؤرتي القطع الناقص والتي تنتمي الى القطع الزائد $(\pm 5,0)$

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{4} \Rightarrow 4c=5b \Rightarrow c=\frac{5b}{4} \dots\dots(1)$

$c^2=a^2+b^2 \dots.(2) \Rightarrow [\frac{25b^2}{16}=25+b^2].16$

$25b^2=400+16b^2 \Rightarrow 9b^2=400 \Rightarrow b^2=\frac{400}{9}$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$

2007 خارج القطر/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ طول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين

sol : في القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \Rightarrow a^2=100 \Rightarrow a=10$

هما رأسا القطع الناقص وهما بؤرتا القطع الزائد $(10,0),(-10,0)$

في القطع الزائد $c=10, 2a=12 \Rightarrow a=6$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 100=36+b^2 \Rightarrow b^2=64$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

2015 خارج القطر دور 1 / 2020 تطبيقي د 3 | جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$ والمار ببؤرتي القطع الناقص نفسه ثم جد مساحة القطع الناقص

تلميح/ هذه السؤال يعتبر مرادف للعبارة (كل منهما يمر ببؤرة الأخر) أي أن بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد ويشترك مع السؤال الوزاري اعلاه بالمقطع الثاني من هذا التفسير اما المقطع الأول فنقوم بحساب بؤرتي القطع الناقص عن طريق العلاقة $a^2=b^2+c^2$ والتي هي نفسها رأسي القطع الزائد وستكون الاجابة النهائية هي ذاتها في السؤال الوزاري اعلاه رغم تغير نمط السؤال، ويضاف الى الحل حساب مساحة القطع الناقص $A=ab\pi$.

2009 دور اول / *2020* تطبيقي د *2* داخل /

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ ويقطع من محور السينات جزءا طوله *12* وحدة

sol: $[9y^2 - 16x^2 = 144] \div 144 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ في القطع الزائد

$a^2 = 16, b^2 = 9, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

$(0,5), (0,-5)$ بؤرتي القطع الزائد

$a = 5\ oR\ b = 5$ في القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل

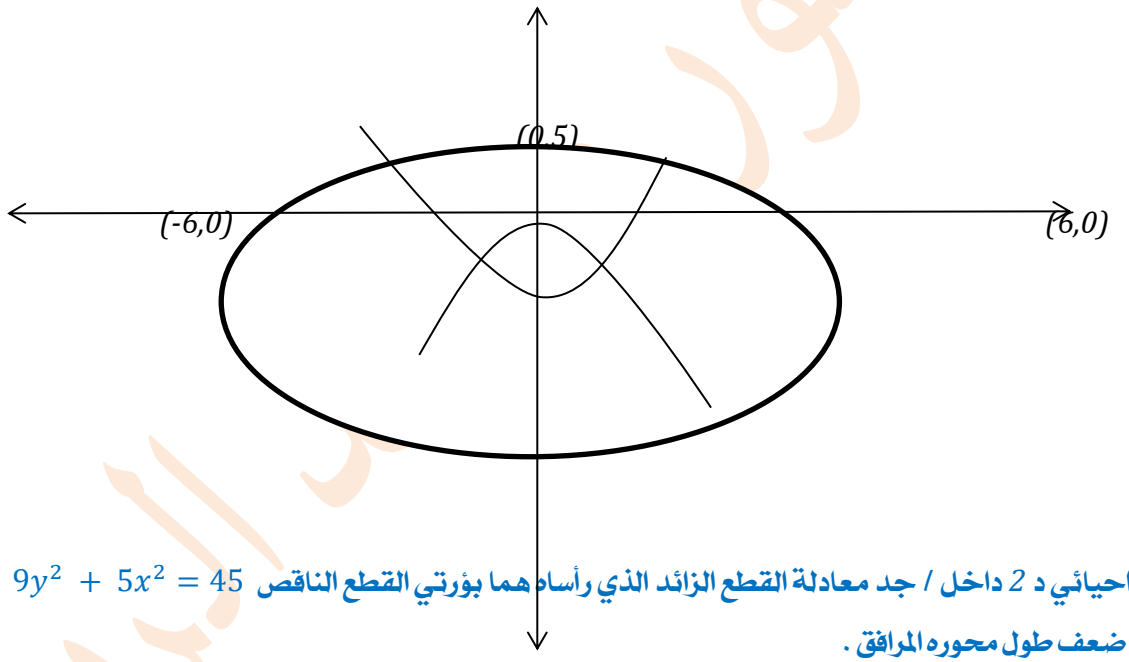
بما ان الجزء المقطوع من محور السينات يساوي *12* فان

$2a = 12 \Rightarrow a = 6\ OR\ 2b = 12 \rightarrow b = 6$

$a = 6, b = 5$ نقوم بأخذ احتمال واحد من كل احتمالين لينتج

بما ان القطبين يقعان على محور الصادات فان البؤرتين والرأسين يقعان على محور السينات.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الزائد



2020 احيائي د *2* داخل / جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتي القطع الناقص $9y^2 + 5x^2 = 45$ والمسافة بين بؤرتيه تساوي ضعف طول محوره المرافق .

sol: $[9y^2 + 5x^2 = 45] \div 45 \Rightarrow \frac{y^2}{5} + \frac{x^2}{9} = 1$ في القطع الناقص

$a^2 = 9, b^2 = 5, c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow c = 2$

القطع الزائد $\Rightarrow a = 2 \in (\pm 2,0)$ بؤرتي القطع الناقص ولما رأسي القطع الزائد

$c^2 = 2(2b) \Rightarrow c = 2b \ldots\ldots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots . (2)$

$4b^2 = 4 + b^2 \Rightarrow 3b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$ معادلة القطع الزائد

2013 خارج / جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتي القطع الناقص $9x^2 + 5y^2 = 45$ والمسافة بين بؤرتيه تساوي ضعف طول محوره المرافق

sol: $[9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ في القطع الناقص

$a^2 = 9, b^2 = 5, c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow c = 2 \in y - axis$

بؤرتي القطع الناقص ولما رأسي القطع الزائد $(0, \pm 2) \Rightarrow a = 2 \in$ القطع الزائد

$2c = 2(2b) \Rightarrow c = 2b \ldots..(1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots.(2)$

$4b^2 = 4 + b^2 \Rightarrow 3b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1$ معادلة القطع الزائد

2008 تمهيدي / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ والنسبة بين محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$

sol: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ في القطع الناقص

$a^2 = 25, b^2 = 9, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

في القطع الزائد $c = 4 \Rightarrow$ بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 4, 0)$

$\frac{2a}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 16 = 4 + b^2 \rightarrow b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

2014 دور 4 انبار / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2 - 2y^2 = 6$

sol $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6 \Rightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 6, b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

في القطع الناقص $c = 3 \Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص $(3,0), (-3,0)$

$2a + 2b = 16 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b \ldots..(1\ a^2 = b^2 + c^2 \ldots(2)$

$(8 - b)^2 = b^2 + 9 = 64 - 16b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 16b = 55 \Rightarrow b = \frac{55}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{3025}{256}$

$a^2 = \frac{3025}{256} + 9 = \frac{5329}{265}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{256x^2}{5329} + \frac{256y^2}{3025} = 1$

عزيزي الطالب من المحتمل ان مجموع طولي محوري القطع الناقص هي 18 بدلا من 16 وهناك خطأ مطبعي في السؤال ليكون الجواب هو

sol $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6 \Rightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 6, b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

في القطع الناقص $c = 3 \Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص $(3,0), (-3,0)$

$2a + 2b = 18 \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b \ldots\ldots (1\ a^2 = b^2 + c^2 \ldots (2)$

$(9 - b)^2 = b^2 + 9 = 81 - 18b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 18b = 72 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$a^2 = 16 + 9 = 25$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2014 تمهيدي/ 2016 دور 1 / 2017 الدور الاول احيائي موصل 2 /

جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول

الحل/ بما ان القطعات الزائد والناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر فإن بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

في القطع الزائد

$2a = 6 + a = 3$

رأسي القطع الزائد $(\pm 3, 0)$

بؤرتي القطع الزائد $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$

$\Rightarrow c = 3\sqrt{2}$

$c^2 = b^2 + a^2$

$\Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

في القطع الناقص

$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

رأسي القطع الناقص $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$

بؤرتي القطع الزائد $(\pm 3, 0)$

$\Rightarrow c = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$

2020 تطبيقي د 2 تكميلي / اذا كانت $hx^2 - my^2 = 25$ معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل وكانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ، جد قيمتي h, m ∈R اذا كان كل منهما يمر ببؤرة الآخر

الحل/ بما ان القطعين الزائد والناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر فإن بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

في القطع الناقص $x^2 + 25y^2 = 255$

$$[9x^2 + 25y^2 = 225] \div 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3, c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(\mp 4,0)$

رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\mp 5,0)$

في القطع الزائد سيكون $a = 4, c = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$$

2017 دور ثاني / 2017 د 2 تطبيقي خارج / 2018 د 2 احيائي داخل / 2019 د 3 تطبيقي / جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ واحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$

Sol = في القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ $a^2 = 36, b^2 = 20$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow c = 4$$

بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\mp 4,0)$

في القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$

$$y^2 = -8x \Rightarrow y^2 = -4p\,x \Rightarrow -4p = -8 \Rightarrow p = 2$$ بؤرة القطع المكافئ $(-2,0)$

في القطع الزائد $x - axis \Rightarrow c = 4, a = 2$ ∈ رأسي القطع الزائد $(\mp 2,0)$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$ معادلة القطع الزائد

2006 دور 1/ 2016 دور 2 / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$

$$[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 32$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$$

بؤرتا القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص $(0,6), (0,-6)$

القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0 \Rightarrow y^2 = -16x, y^2 = -4Px \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4$

هي نقطة التماس مع القطع الناقص $(4,0)$ معادلة الدليل $x = 4$

في القطع الناقص لان البؤرتاه تقعان على محور الصادات $b = 4$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{52} + \frac{x^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الناقص

2017 الدور الثالث احيائي داخل /جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ والنسبة بين طول محوره المرافق والبعد بين البؤرتين كنسبة $\frac{2}{3}$

Sol $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ في القطع الناقص $\Rightarrow a^2=35, b^2=10$

$c^2=a^2-b^2=35-10=25 \Rightarrow c=5$

في القطع الزائد $\Rightarrow a=5$ بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(\mp 5,0)$

$\frac{2b}{2a}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3b=2c \Rightarrow c=\frac{3b}{2} \ldots (1)$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow [\frac{9b^2}{4}=25+b^2] .4$

$\Rightarrow 9b^2=100+4b^2 \Rightarrow 5b^2=100 \Rightarrow b^2=20$

بما ان رأس القطع الزائد يقع على محور السينات فإن بؤرتيه يقعان على نفس المحور

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{20}=1$

2017 الدور الأول تطبيقي داخل / جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $x^2+11y^2=396$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرته على محور الصادات ويمر دليله بالنقطة $(4,7)$

Sol $[36x^2+11y^2=396] \div 396 \Rightarrow \frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$ معادلة القطع الناقص

$a^2=36, b^2=11 \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \; c^2=a^2-b^2=36-11=25 \Rightarrow c=5$

بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(0, \mp 5)$

بؤرة القطع المكافئ $F(0,-7)$ معادلة الدليل في القطع المكافئ $y=7$

بؤرتي القطع الزائد $\in y-axis$ $(0, \mp 7)$

في القطع الزائد $\Rightarrow c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 49=25+b^2 \Rightarrow b^2=24$ $a=5, C=7$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{24}=1$

2018 د 3 احيائي داخل /جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة $x^2+y^2-16y+15=0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نهف قطر تلك الدائرة

sol: $x^2+y^2-16y+15=0$

بعد المقارنة بالصورة القياسية $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$h=\frac{-a}{2}=\frac{0}{2}, k=\frac{-b}{2}=16_{=}8, r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}=7$

مركز الدائرة $(h,k)_{=}(0,8) \Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد $(0, \mp 8) \Rightarrow c=8$

$\frac{1}{2}(2b)=r \Rightarrow b=7 \Rightarrow c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 64=a^2+49 \rightarrow a^2=15$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{15}+\frac{x^2}{49}=1$

2018 د 2 تطبيقي داخل / قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - 4y^2 = L$ طول محوره التخيلي يساوي $2\sqrt{5}$ وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $4x^2 + 13y^2 = 52$ جد قيمتي h, L الحقيقيتان .

sol : $[4x^2 + 13y^2 = 52] \div 52$ في القطع الناقص $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$

$$a^2 = 13, b^2 = 4 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $c = 3 \in x-$ axis للقطع الزائد $(\mp 3, 0)$

$2b = 2\sqrt{5} \Rightarrow b = \sqrt{5}$ القطع الزائد $\Rightarrow b^2 = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9 = a^2 + 5 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$[hx^2 - 4y^2 = L] \div L \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{l}{h}} - \frac{y^2}{\frac{l}{4}} = 1$$

$$b^2 = \frac{l}{4} \Rightarrow 5 = \frac{l}{4} \Rightarrow L = 20, a^2 = \frac{l}{h} \Rightarrow 4 = \frac{20}{h} \Rightarrow h = 5$$

2018 د 1 احيائي خارج / النقطة $p(h, 2\sqrt{2})$ تنتمي للقطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 2h$ ومركزه نقطة الأصل ، جد قيمة h الحقيقية الموجبة ، ثم جد طول نصف القطر البؤري الأول والثاني المرسومين من نقطة P .

الحل \ أذا مر المنحني بنقطة فإنها تحقق معادلته

$$h^2 - 3(8) = 2h \Rightarrow h^2 - 2h - 24 = 0 \Rightarrow (h-6)(h+4) = 0$$

either h = - 4 تهمل لأنه ذكر ان العدد حقيقي موجب $or\ h = 6$

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 12, b^2 = 4, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

بؤرتي القطع الزائد $F_2(-4, 0), F_1(4, 0)$,

$P\ F_1$ هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليمنى

$P\ F_2$ هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليسرى

$PF_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

$PF_2 = \sqrt{(6-4)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{100+8} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ وحدة طول

2015 دور ثاني/ليكن $5y^2 - 4x^2 = k$ قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $4y - \sqrt{5}x^2 = 0$ جد قيمة k

sol: $4y - \sqrt{5}x^2 = 0 \Rightarrow 4y = \sqrt{5}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}y, x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{5}}$

بؤرة القطع المكافئ $(0, \frac{1}{\sqrt{5}})$ $\Rightarrow$ بؤرتي القطع الزائد $(0, \frac{1}{\sqrt{5}})$ $\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$[5y^2 - 4x^2 = k] \div \frac{y^2}{\frac{k}{5}} - \frac{x^2}{\frac{k}{4}} = 1$$ في القطع الزائد $\Rightarrow a^2 = \frac{k}{5}, b^2 = \frac{k}{4}$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left[\frac{1}{5} = \frac{k}{5} + \frac{k}{4}\right].20 \Rightarrow 4 = 4k + 5k \Rightarrow 9k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{9}$$

2019 د 1 تطبيقي خارج /جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$ اذا علمت ان القطع الزائد يمر بالنقطة $(6,2\sqrt{2})$.

الحل/ في القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0 \Rightarrow y^2 = -16x, y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4$

بؤرة القطع المكافئ في $(-4,0)$ أي ان بؤرتي القطع الزائد هي $(4,0)$، $(-4,0)$ أي ان c =4

المعادلة القياسية للقطع الزائد هي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\left[\frac{36}{a^2} - \frac{8}{b^2}\right] . a^2b^2 = 36b^2 - 8a^2 = a^2b^2 \ldots..(1$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 16 - b2$

$36b^2 - 8(16 - b^2) = (16 - b^2)b^2$

$36b^2 - 128 + 8b^2 = 16b^2 - b^4 \Rightarrow b^4 + 28b^2 - 128 = 0$

$(b^2 + 32)(b^2 - 4) = 0 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 12$

معادلة القطع الزائد هي $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

2019 د 2 احيائي داخل / جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأمل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{164} + \frac{y^2}{64} = 1$ ومجموع طولي محوريه الحقيقي والتخيلي يساوي 28 وحدة .

$sol : a^2 = 164, = 64, c^2 = a^2 - b^2 = 164 - 64 = 100$ في القطع الناقص

$c = 10$ في القطع الناقص $\Rightarrow (\pm 10,0)$ هما بؤرتي القطع الناقص و القطع الزائد

$2a + 2b = 28 \rightarrow a + b = 14 \rightarrow a = 14 - b \ldots..(1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots.(1)$

$100 = (14 - b)^2 + b^2 \Rightarrow 100 = 196 - 28b + b^2 + b^2$

$2b^2 - 28b + 96 = 0 \rightarrow b^2 - 14b + 48 = 0$

$(b - 8)(b - 6) = 0 \Rightarrow either\ b = 8, a = 6\ OR\ b = 6, a = 8$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1, \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$

2019 د 1 داخل /قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $kx^2 - 9y^2 = h$ وطول محوره الحقيقي 6 وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ المار بالنقطتين $(1,4),(1,-4)$ جد قيمتي $h, k \in R$

الحل/ في القطع المكافئ بما انه مار بنقطتين تقعان بالربعين الأول والرابع فان بؤرته تقع على الأحداثي السيني الموجب وكلتا النقطتين تحقق معادلته أي ان معادلته $y^2 = 4Px$

بؤرة القطع المكافئ $16 = 4P \Rightarrow P = 4, (4,0)$

بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow (4,0),(-4,0)$ $c = 4, 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$

$[kx^2 - 9y^2 = h] \div h \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{h}{k}} - \frac{y^2}{\frac{h}{9}} = 1$

$a^2 = \frac{h}{k}, b^2 = \frac{h}{9} \Rightarrow 7 = \frac{h}{9} \Rightarrow h = 63,9\ \frac{63}{k} \Rightarrow k = 7$

2019 د 1 احيائي داخل / لتكن $ky^2 - hx^2 = 63$ معادلة القطع زائد مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$ جد قيمتي $h, k \in R$.

sol: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ في القطع الناقص $a^2 = 25, b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

بؤرتا القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(0,4),(0,-4)$

القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0 \Rightarrow x^2 - 12y, x^2 = -4py \Rightarrow 4P = 12 \Rightarrow P = 3$

معادلة الدليل $y = 3 \Rightarrow$ هي نقطة التماس مع القطع الزائد $(0,3)$

في القطع الزائد $a = 3, c = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$

$[ky^2 - hx^2 = 63] \div 63 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{63}{k}} - \frac{x^2}{\frac{63}{h}} = 1$

$a^2 = \frac{63}{k} \Rightarrow 9 = \frac{63}{k} \Rightarrow k = 7, b^2 = \frac{63}{h} \Rightarrow 7 = \frac{63}{h} \Rightarrow h = 9$ *

الاسئلة الوزارية الخاصة بتمارين القطع الزائد

2006 تمهيدي / 2014 نازحين

1- عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية

$b)\ 16x^2 - 9y^2 = 144$

$sol: [16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 + a = 3, b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$

البؤرتان , $F_2(-c, 0 F_1(c, 0)) = (5,0), (-5,0)$

الرأسان $V_1(a, 0)(-a, 0) = (3,0), (-3,0)$

طول المحور الحقيقي $2a = 6$, طول المحور التخيلي $2b=8$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

2 - اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات التالية ثم ارسم القطع

أ- البؤرتان هما $(\mp 5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ ومركزه نقطة الأصل.

$Sol:) c = 5, a = 3, c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2014 دور 2 انبار /2019 د 3 احيائي / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 6,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$ ومركزه نقطة الاصل.

ج) مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) وحدات

$sol: 2b = 2\sqrt{2} = b = \sqrt{2}$

$\frac{c}{a} = 3 \Rightarrow c = 3a \ \ldots (1$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots (2 \Rightarrow 9a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow 8a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}$

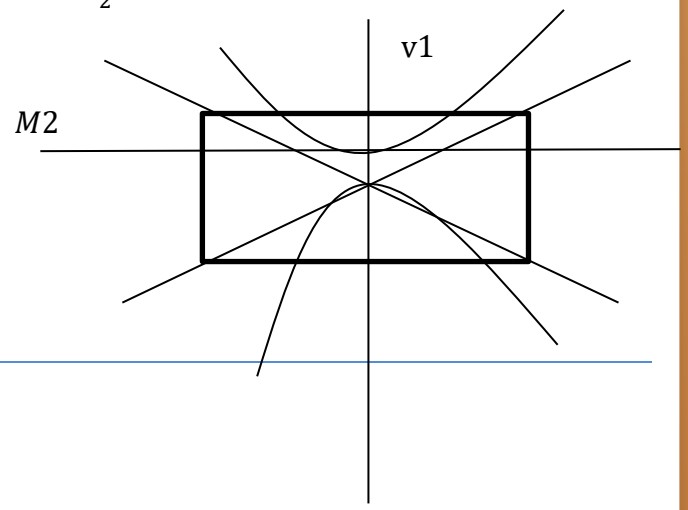
معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$

$c = \frac{3}{2}$

البؤرتان $F_1, F_2\left(0, \pm\frac{3}{2}\right)$

الرأسان $V1, V2\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$

طرفي المحور التخيلي $M1, M2(\pm\sqrt{2}, 0)$



2020 (4) وحدات /

3- جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(2\sqrt{2},0),(-2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة لفرق بعدي أي نقطة من نقاطة عن البؤرتين تساوي (4) وحدات

$sol: let\ P(x,y)\ \in\ HyPerbola\ ;\ ||PF1\ -\ PF2\ ||\ =\ 2a$

$\sqrt{(x\ -\ 2\sqrt{2}\ )^2\ +\ (y\ -\ 0\ )^2}-\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}\|=4$

$\sqrt{(x\ +\ 2\sqrt{2}\ )^2\ +\ (y\ -\ 0\ )^2}-\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2}\ =\ \pm4$

$\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x\ +8-y^2}=\pm4+\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8y^2}$ بتربيع الطرفين

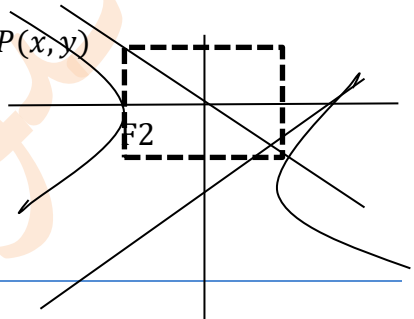
$x^2\ -\ 4\sqrt{2}x\ +\ 8\ +\ y^2\ =\ 16\pm\ 8\sqrt{x^2\ +\ 4\sqrt{2}x\ +\ 8\ +\ y^2}\ +\ x^2\ +\ 4\sqrt{2}x\ +\ 8\ +\ y^2$

$\left[\pm8\sqrt{x^2\ +\ 4\sqrt{2}x\ +\ 8\ +\ y^2}\ =\ 16\ +\ 8\sqrt{2}x\right]\div 8$

$\pm\sqrt{x^2\ +\ 4\sqrt{2}x\ +\ 8\ +\ y^2}\ =\ 2\ +\ \sqrt{2}x$ بتربيع الطرفين

$(x^2\ +\ 4\sqrt{2}x\ +\ 8\ +\ y^2\ )\ =\ 4\ +\ 4\sqrt{2}\,x\ +\ 2x^2$

$[-x^2+\ y^2\ =\ -4]\div(-4)\rightarrow\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ معادلة القطع الزائد



1997 دور 1/2014 دور 1/2013 دور 2/2016 د 2 خارج/

4 - قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5}),(1,-2\sqrt{5})$ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل

الحل/ في القطع المكافئ بما انه مار بنقطتين تقعان بالربعين الأول والرابع فان بؤرته تقع على الاحداثي السيني الموجب وكلتا النقطتين تحقق معادلته أي ان معادلته $y^2\ =\ 4Px$

معادلة القطع المكافئ $\Rightarrow y^2\ =\ 20x$ بؤرة القطع المكافئ $20=4p\Rightarrow p=5\ (5,0)$

بؤرتي القطع الزائد $(5,0)\ (-5,0)\Rightarrow\ c\ ,2a\ =\ 6\ \Rightarrow\ a\ =3$

$c^2=a^2+b^2\Rightarrow 9+b^2\Rightarrow b^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الزائد

2018 دور اول داخل احيائي/ قطع زائد مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي يساوي 6 وحدات واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,-2\sqrt{7}),(1,-2\sqrt{7})$ جد معادلتي كل من معادلتي القطع المكافئ والزائد .

الحل :- في القطع المكافئ بما انه مار بنقطتين تقعان بالربعين الاول والرابع فان بؤرته تقع على الاحداثي السيني الموجب وكلتا النقطتين تحقق معادلته أي ان معادلته $y^2 = 28x$ ⇒ معادلة القطع المكافئ ⇒ $y^2 = 28x$

بؤرة القطع المكافئ $28 = 4p \Rightarrow p = 7,,(7,0)$

بؤرتي القطع الزائد ⇒ $c = 7, 2a = 6 \Rightarrow a = 3$ (7,0) (-7,0)

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 49 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 40$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{?^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$

---

5 - قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $h^2x^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي$(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمتي كل من h, k الحقيقيتان

2020 تطبيقي د 2 داخل / 2018 تطبيقي د 2 خارج / 2017 د 1 احيائي داخل

sol: $[9x^2 + 16y^2\ 576] \div 576 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ في القطع الناقص

$a^2 = 64, b^2 = 36, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = 36 + c^2 \Rightarrow c^2 = 28 \Rightarrow c = \sqrt{28}$

بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\sqrt{28},0),(-\sqrt{28},0)$

في القطع الزائد $c = \sqrt{28}, 2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$

في القطع الزائد $[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{k}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$

$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18, = \frac{90}{k} \Rightarrow h = 5, b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = 9$

2020 احيائي د 2 تكميلي / قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته = $h^2x^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره التخيلي $(2\sqrt{10})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $x^2 + 16y^2 = 576$ جه قيمتي كل من h, k الحقيقيتان.

7 - جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل

sol: $[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ في القطع الزائد

$\Rightarrow a^2 = 12, b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$(4,0), (-4,0)$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص

$c = 4$ في القطع الناقص

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{3} \ldots (1), a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots (2)$

$\left[\frac{25b^2}{9} + b^2 + 16\right].9 \Rightarrow 25b^2 = 9b^2 + 144$

$16b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3, a = \frac{5}{3}(3) \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2019 احيائي د 1 خارج / 2015 نازحين د 1

2018 تمهيدي احيائي / 2020 تطبيقي د 1

2000 د 2 / 2020 احيائي د 3

2013 د 3

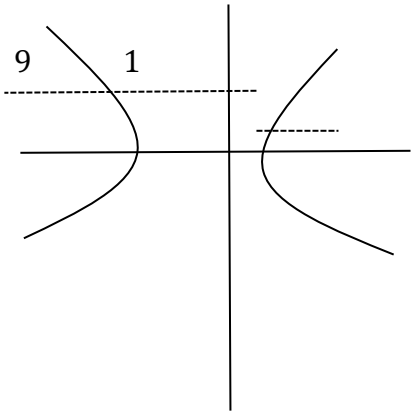
2007 تمهيدي

2008 د 2 خارج

2014 د 4 انبار

6 - اكتب المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 ، 1 على الترتيب اذا علمت ان محوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين

2015 تمهيدي/ 2020 احيائي د 1 خارج /



sol: $2c = 1 + 9 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$2a = 9 - 1 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

اما $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

او $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

8- النقطة p(6,L) تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلا من قيمة L ثم جد طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم من الجهة اليمنى من النقطة

sol أي نقطة تنتمي الى منحني فانها تحقق معادلته

$36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 3L^2 = 24 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm\sqrt{8}$

$P_1(6,\sqrt{8}), P^2(6,-\sqrt{8}) \in$ القطع الزائد

$[X^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 12\,, b^2 = 4\,, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليمنى: P1 F1 ⇒ البؤرة اليمنى للقطع الزائد F1 (4,0)

وحدة طول $P_1F_2 = \sqrt{(6-4)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

1999 دور 1 / 2010 تمهيدي | جدمعادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 12y = 0$

sol : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ في القطع الناقص ⇒ $a^2 = 25, b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$

$(0,4), (0,-4)$ بؤرتا القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد

$x^2 + 12y = 0 \Rightarrow x^2 = -12y\,, x^2 = -4py \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$

F $(0,-3)$ بؤرة القطع المكافئ

$(0,3)$ نقطة التماس مع القطع الزائد ⇒ y = 3 معادلة الدليل

a = 3 , c = 4 في القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \rightarrow b^2 = 7$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ معادلة القطع الزائد

2015 دور 3/ : جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 8y = 0$

التمارين العامة (القطع الزائد)

4-قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل ، كل منهما يمر ببؤرة الآخر فاذا كانت معادلة القطع الناقص $9x^2 + 25y^2 = 225$ فجد:

أ) مساحة القطع الناقص ب) محيط القطع الناقص ج) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه

5) الاختلاف المركزي لكل منهما

الحل/ نلاحظ ان بؤرتي القطع الناقص هما راسي القطع الزائد وراسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

$[9x^2 + 25y^2 = 225] \div 225 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **في القطع الناقص**

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

مساحة القطع الناقص $A = a\,b\,\pi = (5)(3)\pi = 15\pi$

محيط القطع الناقص $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}} = 2\sqrt{17}\pi$

بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(4,0),(-4,0)$

رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(5,0),(-5,0)$

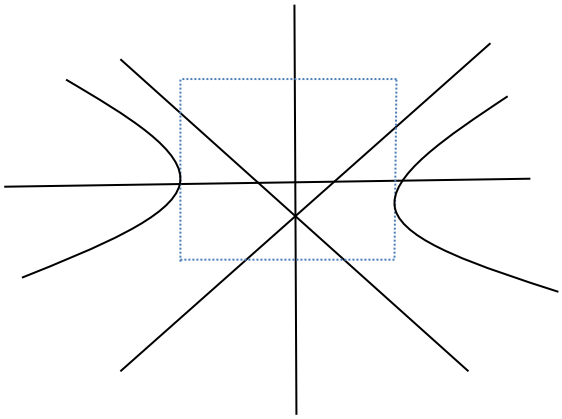
في القطع الزائد $a = 4, c = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$



اثرائيات

النموذج الاول

س 1 \ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ودليله المار بالنقطة (2,-1) يوازي محور السينات .

س 2 \ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما رأسي القطع الزائد $4x^2 - 5y^2 = 100$ ومربع النسبة بين طولي محوريه تساوي $\frac{7}{2}$

س 3 \ قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ويمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ محور السينات جزءا طوله (8) وحدات جد معادلته .

س 4 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والمار بالنقطتين $(\sqrt{6}, \frac{1}{2})$, $(-2\sqrt{3}, -1)$ علما ان محيط القطع الناقص يساوي $\sqrt{82}\ \pi$ وحدة .

س 5 \ قطع ناقص معادلته M $2x^2 + 8y^2 - 1 = 0$ المسافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{6}x$ ودليله ، جد قيمة M .

س 6 \ باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد القائم الذي بؤرتاه $(-4,0)$, (40) ومركزه نقطة الأصل .

س 7 \ جد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه تبعد الرأسين بالعددين { 1 , 9 }

النموذج الثاني

س 1 \ قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ومعادلته $(k-2)x^2 + (k-3)y^2 - 5ky - y = 0$ جد قيمة k ثم جد معادلة القطع الناقه الذي احدى بؤرتيه (k+3,0) والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{4}{5}$

س 2 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومربع مجموع طولي محوريه يساوي 256 واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي بؤرته تقع على محور السينات ودليله يمر بالنقطة (-4,17)

س 3 \ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والذي يقطع من المستقيم y = 4 قطعة مستقيم طولها 10 وحدات .

س 4 \ جد معادلة القطع الزائد الذي محوراه هما المحوين الاحداثيين ومجاله R \ (-3,3) والمسافة بين بؤرتيه تزيد على طول محوره المرافق بمقدار وحدتي طول .

س 5 \ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان إلى محور السينات ومركزه نقطة الاصل وطول محوره الكبير ثلاثة أمثال طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 - \frac{2}{3}x = 0$ عد النقطة التي احداثيها الصادي يساوي $\sqrt{2}$

س 6 \ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 16 = 0$ عند النقطة التي احداثيها الصادي يساوي $(6,2\sqrt{2})$.

س 7 \ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 4,0)$ والنقطتان h, k تنتميان اليه بحيث ان مساحة المستطيل h kF1F2 تساوي 48 وحدة مساحة .

النموذج الثالث

س1/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع المحورين الاحداثيين .

س 2 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمار بالنقطة (6,2) وبؤرتاه تنطبقان على طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $50y^2 - 4x^2 = 100$

س 3 \ عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{1} = 1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع العلوي بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة

س 4 / قطع مكافئ معادلته $2x^2 - 3y + ay = 0$ دليله يمر بالنقطة (3,-2) جد قيمة a

س 5 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 - 24y = 0$ ويمر من نقطتي تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 16x - 64 = 0$ مع محور الصادات .

س 6 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واختلافه المركزي يساوي النسبة بين طولي محوريه والبعد بين بؤرتيه يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ ودليله .

س 7 \ ليكن $5y^2 - 4x^2 = k$ قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع الكافئ $4x - \sqrt{5}y^2$ جد قيمة k

النموذج الرابع

س 1 \ عين البؤرتين والرأسين وجد طول من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد $12x^2 - 4y^2 = 48$ ثم ارسمه .

س 3 \ جد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ علما ان القطع الناقه يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

س4\ جد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين والبعد بين بؤرتيه يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ ودليله علما ان مجموع مربعي طولي محوري القطع الناقص يساوي 164 .

س 5 \ اذا كان $\frac{11+2i}{1+2i} = d + ei$ جد معادلة القطع الناقه الذي رأسه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه (0,e) وطول محوره الكبير $||d + ei||$.

س 6 \ قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - 4y^2 = L$ طول محوره التخيلي يساوي $2\sqrt{5}$ وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $4y^2 + 13x^2 = 52$ جد قيمتي h, L الحقيقيتان .

س 7 \ قطع زائد مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي يساوي 6 وحدات واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{7}), (1, -2\sqrt{7})$ جد معادلتي كل من معادلتي القطع المكافئ والزائد .

النموذج الخامس

س 1 \ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $2x - 2\sqrt{2} = 0$

س 2 \ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 24y = 0$ والذي يقطع من دليل القطع المكافي نفسه قطعة طولها 10 وحدات .

س 3 \ اذا كانت $hx^2 - ky^2 = 25$ معادلة قطع زائد، $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة قطع ناقص جد قيمتي h , k اذا كان كل منهما يمر ببؤرة الاخر .

س 4 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان الى محور السينات وطول محوره الصغير نصف طول محوره الكبير ويقطع القطع الثاني $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي مسقطها الثاني يساوي (4) .

س 5 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على أحد المحورين الاحداثيين ومساحة منطقته (15π) وحدة مساحة ومحيطه يساوي ($2\sqrt{17}\pi$) وحدة .

س 6 \ جد نقطة او اكثر تنتمي الى القطع المكافئ $x^2 + 24y = 0$ والتي تبعد عن البؤرة بمقدار (4) وحدات طول .

س 7 \ جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل ومحوراه هما المحورين الاحداثيين و مجموع طولي محوريه يساوي يساوي 14 وحدة والبعد بين بؤرتيه يساوي $\sqrt{148}$.

النموذج السادس

س 1 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات و مجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة .

س 2 \ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ ومساحة مستطيله المركزي يساوي $16\sqrt{3}$ وحدة مربعة .

س 3 \ قطع مكافئ معادلته $y^2 = 5hx - 39x$ ومعادلة دليله $x = 2h$ جد قيمة h ثم جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرة القطع المكافئ نفسه ومساحة منطقته 48π وحدة مساحة .

س 4 \ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والمار بالنقطة $(2\sqrt{30}, 2)$ و محوره المرافق يقع على محور الصادات والبعد بين بؤرتيه يساوي ضعفي طول محوره المرافق .

س 5 \ جد معادلة القطع المخروطي نقطة تقاطع محوريه نقطة الأصل واختلافه المركزي يساوي 0.5 وطول احد محوريه 12 وحدة .

س 6 \ جد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين والبعد بين بؤرتيه يساوي البعد بين بؤرة القطع المكاني $y^2 - 12x = 0$ ودليله علما ان مجموع مربعي طولي محوري القطع الناقص يساوي 164 .

س 7 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمار ببؤرة القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$ والبعد بين بؤرتيه يساوي 6 وحدة طول.

الفصل الثالث : التفاضل

الأسئلة الوزارية الخاصة بالمشتقات ذات الرتب العليا

2005 دور أول | إذا كان $y=\frac{\sin x}{a+b\cos x}$ أثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos x+b}{(a+b\cos x)^2}$

Sol: $\frac{dy}{dx}=\frac{(a+b\cos x)\cdot\cos x-\sin x(-b\sin x)}{(a+b\cos x)^2}=\frac{a\cos x+b\cos^2 x+b\sin^2 x}{(a+b\cos x)^2}$

$=\frac{a\cos x+b(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(a+b\cos x)^2}=\frac{a\cos x+b}{(a+b\cos x)^2}$

2007 تمهيدي | إذا كان $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ أثبت أن $\frac{dy}{dx}=2\tan x\sec^2 x$

Sol : $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1\ \Rightarrow 1+\cos 2x=2\cos^2 x$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x\ \Rightarrow 1-\cos 2x=2\sin^2 x$

Sol: $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\tan^2 x=(\tan x)^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2\tan x\sec^2 x$

2008 تمهيدي | إذا كان $y=\cot x$ أثبت $\frac{d^2y}{dx^2}=2\csc^2 x\cot x$

Sol: $\frac{dy}{dx}=-\csc^2 x=-(\csc x)^2\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-2\csc x\,(-\csc x\cdot\cot x)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=2\csc^2 x\cot x$

2009 دور أول | إذا كان $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ أثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$

Sol: $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos x)\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$

2019 د1 احيائي خارج | إذا كان $y=x\sin x$ فبرهن أن $y^{(4)}-y+4\cos x=0$

Sol: $\frac{dy}{dx}=x.\cos x+\sin x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=x(-\sin x)+\cos x+\cos x=-x.\sin x+2\cos x$

$y^{(3)}=-x.\cos x+\sin x.(-1)-2\sin x=-x\cos x-3\sin x$

$y^{(4)}=-x.\sin x+\cos x.(-1)-3\cos x=x\sin x-4\cos x$

$y^{(4)}-y+4\cos x=x\sin x-4\cos x-x\sin x+4\cos x=0$

2020 د1 احيائي خارجي / 2020 تطبيقي د2 تكميلي | إذا كانت $y = \tan x$ فبرهن أنه :

$$\forall\, n \in Z, x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$$

Sol: $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec x . \sec x . \tan x = 2\tan x . \sec^2 x$

$\because \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2\tan x . (1 + \tan^2 x) = 2y(1+y^2)$

2020 د2 احيائي داخل | إذا كانت $y = \cos 2x$ جد $\frac{d^4y}{dx^4}$

Sol: $\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x$

$\frac{d^3y}{dx^3} = 8\sin 2x \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = 16\cos 2x$

الأسئلة الوزارية الخاصة بالمعدلات الزمنية

2011 دور2 – 2014 دور3 – 2015 نازحين د1 – 2020 تطبيقي د3 / صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$

Sol: let A = المستطيل مساحة , x = المستطيل طول , y = المستطيل عرض

$A = x.y$

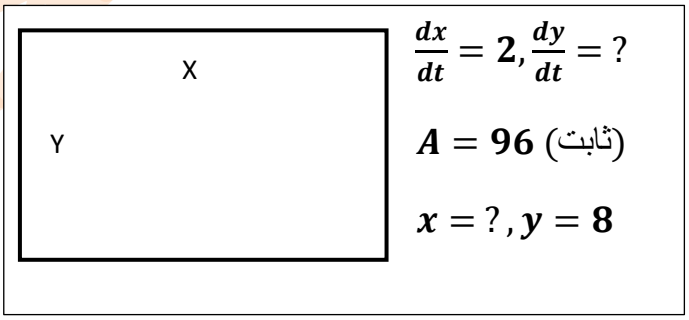
$96 = 8x \Rightarrow x = 12$

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$

$0 = 12\frac{dy}{dt} + (8)(2) \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -16$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3} cm/s$

أي العرض يتناقص بمعدل $\frac{4}{3} cm/s$ في تلك اللحظة

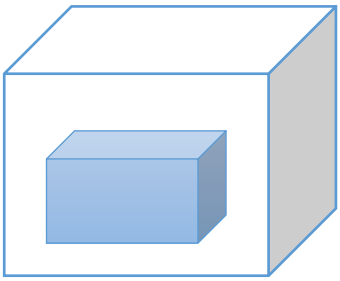


2019 د3 تطبيقي – 2016 د1 داخل | صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد عرضها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل التغير في الطول وذلك عندما يكون طولها $12\ cm$

Ans: $\frac{dx}{dt} = -3cm/s$ H.W واجب بيتي

يمكن ملاحظة التغيير البسيط في الأرقام مع بقاء فكرة السؤال الأصلية

مثال/ مكعب صلد طول حرفه $8m$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعباً، فإذا بدأ الجليد يذوب بمعدل $6m^3/s$ فجد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $1m$



الحل/ نفرض أن سمك الجليد = x ، حجم المكعب = (طول الضلع)^3

طول ضلع المكعب الصغير = $8 \Leftarrow v_1 = (8)^3$

طول ضلع المكعب الكبير = $(8+2x) \Leftarrow v_2 = (8+2x)^3$

2011 خارج القطر
2014 خارج القطر
2018 تطبيقي د1

$$v = v_2 - v_1 \Rightarrow v = (8+2x)^3 - (8)^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2.(2)\frac{dx}{dt} + 0$$

$$-6 = (8+2)^2.(2)\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{100}\,m/s$$

$\frac{dx}{dt} = -0.01\,m/s$ معدل تغير سمك الجليد $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = 0.01\,m/s$ معدل نقصان سمك الجليد

ملاحظة/ إذا ما عبّرنا عن الناتج بمعدل النقصان فيكتب موجباً لأن الإشارة السالبة استعضنا عنها بوصف النقصان.

2018 د3 احيائي داخل | تتدحرج كرة صلدة على أرض جليدية نصف قطرها $(3cm)$ بحيث يزداد حجمها محافظاً على شكله الكروي بمعدل $(2m^3/s)$ جد المعدل الزمني لزيادة سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $(1cm)$.

الحل/ نفرض أن سمك الجليد يساوي x

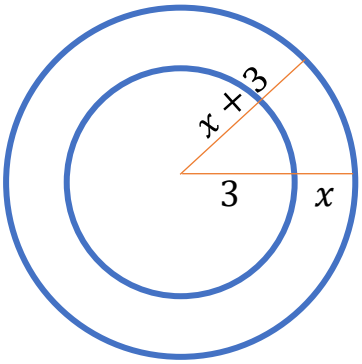
نصف قطر الكرة الكبيرة $(x+3)$، نصف قطر الكرة الصغيرة (3).

$$v = \frac{4\pi}{3}(x+3)^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3\left(\frac{4\pi}{3}\right)(x+3)^2\frac{dx}{dt}$$

$$2 = 4\pi(1+3)^2\frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{64\pi} = \frac{1}{32\pi}\,cm/s$ معدل ازدياد سمك الجليد



تلميح/ القانون الذي تم كتابته هو حجم الكرة الكلي وإن $\frac{dv}{dt} = 3$ هو معدل ازدياد حجم الكرة الكلي ولو قيل أن الجليد يزداد حجمه بمعدل 3 لكان القانون الذي يتم اشتقاقه هو حجم الجليد والذي يساوي الفرق بين الحجم الكلي وحجم الكرة الصغيرة والناتج النهائي يبقى نفسه لأن مشتقة الثابت (حجم الكرة الصلدة) هو صفر.

2019 د1 تطبيقي داخل | كرة صلدة نصف قطرها $4cm$ مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكلها كروياً، فإذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\ cm^3/s$ جد سرعة نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $1cm$

الجواب/ معدل نقصان سمك الجليد يساوي $\frac{1}{10\pi}\ cm/s$

2013 دور2 – 2020 احيائي د1 داخل – 2011 دور1

مثال/ خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته كربعة طول ضلعها $2m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\ m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان في أي زمن t

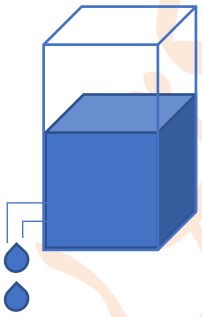
Sol: $let\ V =$ حجم متوازي المستطيلات , $X =$ طول ضلع القاعدة المربعة , $h =$ الارتفاع

$V = X^2h$

$X = 2m \Rightarrow V = 4h$

$\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow -0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$

$\frac{dh}{dt} = 0.1\ m/h$ معدل تغير انخفاض الماء في الخزان



$X = 2$

$\frac{dv}{dt} = -0.4$

$\frac{dh}{dt} = ?$

تذكير: الثابت الدائم يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم يعوض بعد الاشتقاق وأحياناً يعوض قبل الاشتقاق لإيجاد قيمة متغير دائم آخر ليتم تعويضهما معاً بعد الاشتقاق.

2018 تطبيقي دور1 خارج | خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طولها $3m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.9\ m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان في أي زمن t

Ans: $\frac{dh}{dt} = 0.1\ m/h$ معدل انخفاض الماء في الخزان

2017 الدور الثاني تطبيقي خارج | أسطوانة دائرية قائمة يصب فيها الماء وكان معدل تغير ارتفاع الماء $0\ m/s$ جد معدل التغير في حجم الماء إذا كان نصف قطر قاعدة الأسطوانة يساوي $10cm$

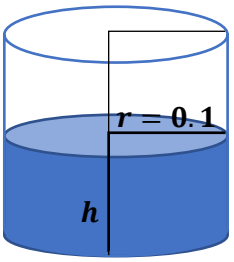
الحل: نفرض أن ارتفاع الأسطوانة $= h$ ، نصف قطر الماء $= x$ (ثابت)، الحجم $= V$

$\frac{dh}{dt} = 40$, $\frac{dv}{dt} = ?$

$r = 10cm = 0.1m$ من أجل أن يتناسب مع وحدة السرعة

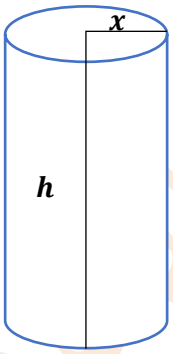
$V = \pi r^2h = 0.01\pi h \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0.01\pi\frac{dh}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = (0.01)(40)\pi = 0.4\pi\ m^3/s$ معدل ازدياد حجم الماء



مثال/ أسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يضل حجمها دائماً مساوياً $320\pi cm^3$ جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها عندما يكون ارتفاعها $5cm$

الحل/ نفرض أن نصف قطر قاعدة الأسطوانة $=x$، ارتفاعها $=h$، حجمها ثابت $V=320\pi cm^3$



$V=\pi x^2h \Rightarrow 320\pi=\pi x^2h \Rightarrow 320=x^2h$

تعوض بعد الاشتقاق $[h=5 \Rightarrow 320=5x^2 \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=8]$

$$0=x^2\frac{dh}{dt}+h.2x\frac{dx}{dt}$$

$$0=64(0.5)+5(16)\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-0.4\ cm/s$$

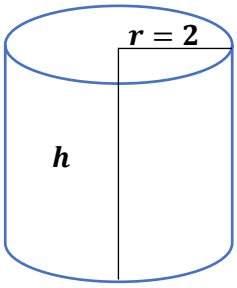
معدل تغير نصف قطر قاعدتها

2018 تطبيقي د2 داخل – 2000 دور2 – 2003 دور2 – 2006 تمهيدي

2017 الدور الثاني احيائي موصل2 | خزان اسطواني مملوء بالماء نصف قطر قاعدته $(2m)$ يتسرب منه الماء بمعدل $(0.4\ m^3/h)$ جد معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عند أي زمن.

الحل/ نفرض أن نصف قطر قاعدة الأسطوانة $r=2$ (ثابت دائم)، نفرض أن ارتفاعها h، حجمها V

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع



$V=\pi r^2h \Rightarrow V=(2)^2\pi h$

$V=4\pi h$

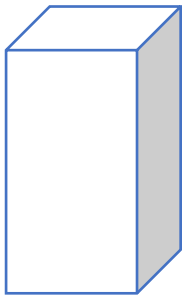
$$\frac{dv}{dt}=4\pi\frac{dh}{dt}$$

$$-0.4=4\pi\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{0.1}{\pi}\ m/h$$

معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان

تلميح: لو قيل جد معدل انخفاض الماء في الخزان لذكر الجواب نفسه دون الإشارة السالبة.

2017 احيائي خارج دور اول – 2017 الدور الثاني احيائي داخل | متوازي مستطيلات قاعدته مربعة يزداد طول ضلعه بمعدل $(0.4\ cm/s)$ بحيث الحجم يبقى ثابتاً يساوي $(640cm^3)$ ففي اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $(10cm)$ جد معدل تغير الارتفاع.



Sol: $V=640$ ثابت دائم, $x=?$ متغير دائم, $h=10$ متغير دائم

$$\frac{dh}{dt}=? \quad , \quad \frac{dx}{dt}=0.4$$

$V=x^2h \Rightarrow 640=x^2(10) \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=8$

$$0=x^2\frac{dh}{dt}+h(2x)\frac{dx}{dt} \Rightarrow 0=64\left(\frac{dh}{dt}\right)+(10)(16)(0.4)$$

$$0=64\frac{dh}{dt}+64 \Rightarrow \frac{dh}{dt}=-1\ cm/s$$

معدل تغير الارتفاع

تلميح: لو طلب معدل نقصان الارتفاع سيكون الناتج $1\ cm/s$

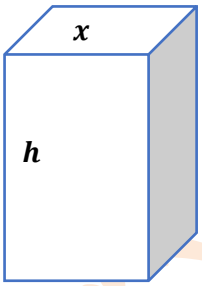
2016 دور أول خارج القطر | متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته يتمدد بالحرارة جد معدل تغير حجمه ومساحته السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة $8m$ ومعدل تغير طول القاعدة $\frac{1}{4}m/s$

الحل/ نفرض أن طول القاعدة = x، والارتفاع = h، حيث أن $h = 3x$

حجم متوازي المستطيلات V = مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات A = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 × مساحة القاعدة

$$V = x^2h \Rightarrow V = x^2(3x) \Rightarrow V = 3x^3$$
$$\frac{dv}{dt} = 9x^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9(8)^2\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 144\,m^3/s$$
$$A = 4xh + 2x^2 \Rightarrow A = 12x^2 + 2x^2 \Rightarrow A = 14x^2$$
$$\frac{dA}{dt} = 28x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 28(8)\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 56\,m^2/s$$



$x = 8$

$h = 3x$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$

تلميح: بما أن المعطيات في السؤال بدلالة x نقوم بتوحيد المتغيرات في القانون بدلالة x، ولو كانت المعطيات بدلالة h فنقوم بتوحيدها بدلالة h أيضاً حيث إذا كانت $h = 3x$ فيكون عندها $x = \frac{h}{3}$ .. أرجو الانتباه.

تأكيد: يمكن أن يحل السؤال بطريقة أخرى وذلك باعتبار العلاقة $h = 3x$ علاقة أساسية ويتم اشتقاقها لينتج أن $x = 8 \Rightarrow h = 24$، $\frac{dh}{dt} = 3\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{4}$ ثم نشتق القانون العام $V = x^2h$ حسب مشتقة حاصل ضرب دالتين ونعوض كلاً بمكانه لينتج نفس الناتج $\frac{dA}{dt} = 56\,m^2/s$

2020 احيائي د2 تكميلي | متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل يتغير الارتفاع بمعدل $(0.5\,cm/s)$ بحيث يظل الحجم ثابت دائماً مساوياً $(320cm^3)$ وعندما يكون الارتفاع $(5cm)$ جد معدل تغير طول ضلع القاعدة.

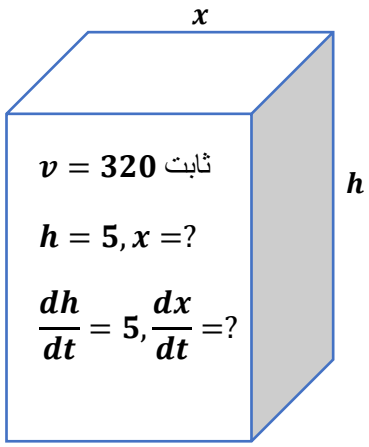
الحل/ ليكن الحجم الثابت $v = 230$ وطول ضلع القاعدة x والارتفاع h

حجم متوازي المستطيلات ذو القاعدة المربعة يساوي مساحة القاعدة × الارتفاع $v = x^2h$

الثابت الدائم يعوض قبل الاشتقاق $320 = x^2h$

$h = 5 \Rightarrow 320 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$

المتغير الدائم يعوض عادة بعد الاشتقاق ولكن يجوز تعويضه قبل الاشتقاق لإيجاد متغير دائم آخر ليتم تعويضه أو تعويضهما بعد الاشتقاق.



$$0 = x^2\frac{dh}{dt} + h \cdot 2x\frac{dx}{dt}$$
$$0 = 64(0.5) + (5)(16)\frac{dx}{dt}$$
$$80\frac{dx}{dt} = -32$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{32}{80} = -0.4\,cm/s$$ معدل تغير طول الضلع

2004 دور1 | بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فإذا كان معدل نقصان نصف قطره $(\frac{7}{22}cm/s)$ بحيث يبقى محافظاً على شكله فعندما يكون نصف قطره $(10cm)$ جد:

1) معدل نقصان حجمه. **2) معدل نقصان مساحته السطحية.**

الحل/ نفرض أن نصف قطر الكرة r وحجمها v ومساحتها السطحية A

$$v=\frac{4\pi}{3}r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\pi\cdot r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\cdot\frac{22}{7}(100)\frac{-7}{22}=-400\,cm^3/s$$

أي أن معدل نقصان الحجم يساوي $400\,cm^3/s$

$$A=4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt}=8\pi\cdot r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=8\cdot\frac{2}{7}(10)\frac{-7}{22}=-80\,cm^2/s$$

أي أن معدل نقصان الحجم يساوي $80\,cm^2/s$

2008 دور2 | بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فإذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه إلى معدل نقصان قطره (200π) احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل النقصان في مساحته السطحية $80\,cm^2/s$

الحل/ نفرض أن حجم البالون = v، ومساحته السطحية = A، ونصف قطره = r

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d2r}{dt}}=200\pi \Rightarrow \frac{dv}{dt}=200\pi\frac{d2r}{dt}$$

$$\frac{d2r}{dt}=2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=400\pi\frac{dr}{dt} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\pi\cdot r^2\frac{dr}{dt} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$4\pi\cdot r^2\frac{dr}{dt}=400\pi\frac{dr}{dt} \Rightarrow r^2=100 \Rightarrow r=10$$

$$A=4\pi\cdot r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt}=8\pi\cdot r\frac{dr}{dt}$$

$$-80=80\pi\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{-1}{\pi}$$ تعوض أما في(1) أو في(2)

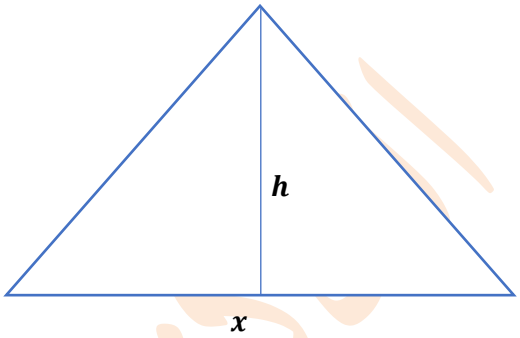
$$\frac{dv}{dt}=400\pi\cdot\frac{-1}{\pi} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-400\,cm^3/s$$ معدل تغير الحجم

$\Rightarrow 400\,cm^3/s$ معدل نقصانه

نلاحظ أن مشتقة قانون حجم الكرة تم الاستفادة منها مرتين، مرة من خلال المعلومة المعطاة في السؤال ومرة أخرى من خلال اشتقاق قانون الحجم ومن خلال تساوي المعادلتين 1 مع 2 نستنتج قيمة r

2018 احيائي د2 خارج | صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين مساحتها $(64cm^2)$ يتمدد ارتفاعها بمعدل $(2\ cm/s)$ حيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في قاعدتها وذلك عندما تكون القاعدة تساوي $(4cm)$.

الحل/ نفرض أن طول القاعدة x والارتفاع h



$A = 64$ ثابت دائم

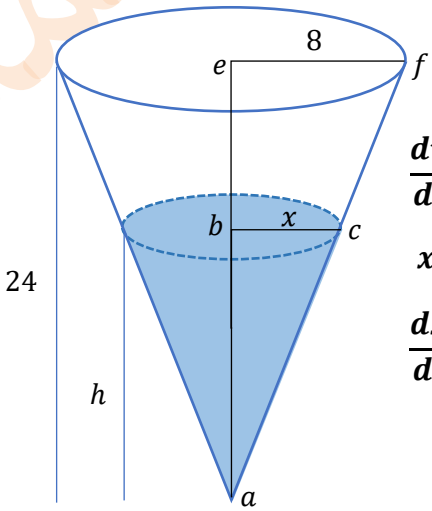
$\frac{dh}{dt} = 2 , \frac{dx}{dt} = ?$, $x = 4$ عندما

$$A = \frac{1}{2}xh \Rightarrow 64 = \frac{1}{2}xh$$
$$x = 4 \Rightarrow 64 = \frac{1}{2}(4)h \Rightarrow h = 32$$
$$0 = \frac{1}{2}x\frac{dh}{dt} + \frac{1}{2}h\frac{dx}{dt}$$
$$0 = \frac{1}{2}(4)(2) + \frac{1}{2}(32)\frac{dx}{dt}$$
$$16\frac{dx}{dt} = -4 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}cm/s$$

$\frac{1}{4}cm/s$ معدل نقصان طول القاعدة يساوي

2019 د2 تطبيقي | مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل ارتفاعه يساوي $24cm$ وطول قطر قاعدته $16cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل $3cm$

Sol: $let\ V =$ حجم الماء المخروطي الشكل , $x =$ نصف قطر قاعدة الماء , $h =$ ارتفاع الماء



$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4cm^3/s$

$x = 3$

$\frac{dx}{dt} = ?$

$$V = \frac{\pi}{3}x^2h$$
$$\frac{4}{12} = \frac{x}{h} \quad abc, aef \text{ من تشابه المثلثين}$$
$$4h = 12x \Rightarrow h = 3x$$
$$V = \frac{\pi}{3}x^2(3x) \Rightarrow V = \pi x^3$$
$$\frac{dv}{dt} = 3\pi x^2\frac{dx}{dt}$$
$$4 = 3\pi(3)^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{4}{27\pi}cm/s$$

معدل تغير نصف قطر السائل

2014 د4 انبار – 2020 تطبيقي د1 | مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل ارتفاعه يساوي $24cm$ وطول قطر قاعدته $16cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل $4cm$

Sol: $let\ V =$ حجم الماء المخروطي الشكل , $r =$ نصف قطر قاعدة الماء , $h =$ ارتفاع الماء

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h$$

$\frac{4}{24} = \frac{r}{h}$ abc, ade من تشابه المثلثين

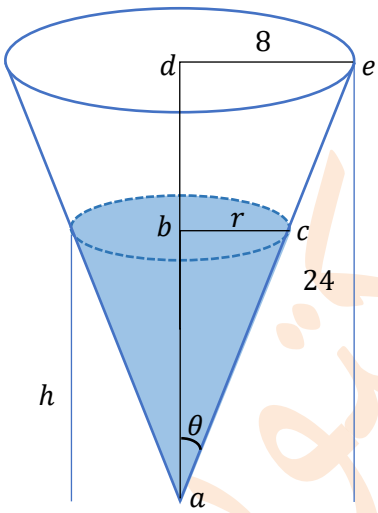
$8h = 24r \Rightarrow h = 3r$

$V = \frac{\pi}{3}r^2(3r) \Rightarrow V = \pi r^3$

$\frac{dv}{dt} = 3\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$4 = 3\pi(4)^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{4}{48\pi} = \frac{1}{12\pi}cm/s$

معدل تغير نصف قطر السائل



$\frac{dv}{dt} = 5 - 1$

$= 4cm^3/s$

$r = 4$

$\frac{dr}{dt} = ?$

2017 دور اول تطبيقي داخل | مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل ارتفاعه يساوي $12cm$ وطول قطر قاعدته $8cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $6cm$

Ans: $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}cm/s$

2017 دور ثاني تطبيقي داخل | مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل يتسرب منه الماء بمعدل $5cm^3/s$ فإذا كان نصف قطر قاعدة المرشح $10cm$ وارتفاعه $20cm$ جد معدل انخفاض الماء فيه عندما يكون ارتفاع الماء فيه $15cm$

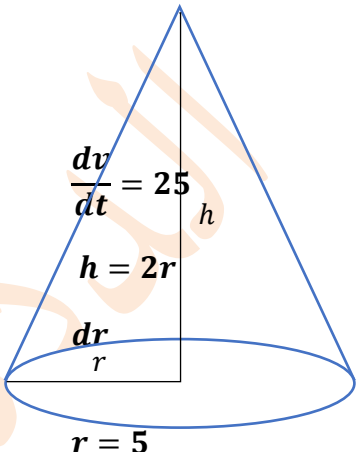
Ans: $\frac{4}{45\pi}cm/s$ معدل انخفاض الماء في المرشح

2018 دور اول احيائي داخل | يراد ملئ خزان على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، طول نصف قطر قاعدته يساوي $5m$ وارتفاعه يساوي $10m$ فإذا كان معدل ملئ الماء فيه $2cm^3/min$ جد سرعة ارتفاع الماء فيه عندما يكون ارتفاع الماء يساوي $(6m)$

Ans: $\frac{2}{9\pi}m/min$

2019 تطبيقي د1 خارج | يتسرب رمل ناعم من خزان على أرض مستوية مكوناً مخروطاً دائرياً قائماً بحيث يكون ارتفاعه مساوياً إلى طول قطر قاعدته، فإذا كان معدل التسرب $25cm^3/s$ جد معدل تزايد نصف قطر قاعدته عندما يكون نصف القطر يساوي $5cm$.

Sol: $let\ V =$ حجم الرمل المخروطي الشكل , $r =$ نصف قطر قاعدة الرمل , $h =$ ارتفاع الرمل



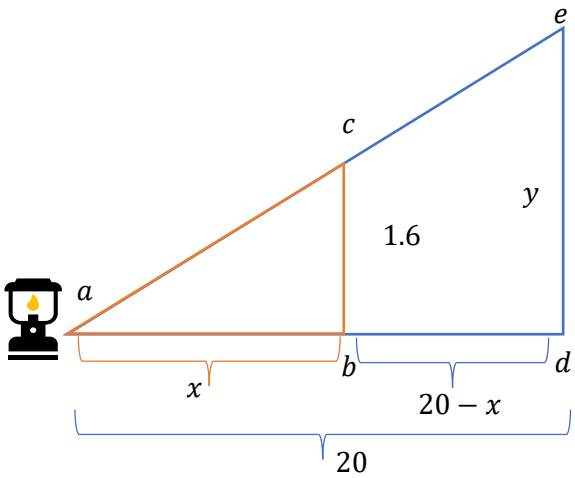
$$V = \frac{\pi}{3}r^2h$$
$$h = 2r$$
$$V = \frac{\pi}{3}r^2(2r) \Rightarrow V = \frac{2\pi}{3}r^3$$
$$\frac{dv}{dt} = 2\pi r^2\frac{dr}{dt}$$
$$25 = 2\pi(25)\frac{dr}{dt}$$
$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}cm/s$ معدل تزايد نصف قطر الرمل

2018 دور ثاني احيائي خارج | مصدر ضوئي موضوع على الأرض يبعد $20m$ عن حائط، تسير حادلة تبليط ارتفاعها $1.6m$ باتجاه الحائط بسرعة $2.5m/min$ ما معدل التغير في ارتفاع ظل الحادلة عندما تكون على بعد $8m$ عن الحائط وهل الارتفاع للظل يتزايد أم يتناقص.

الحل: نفرض أن بُعد الحادلة عن مصدر الضوء x

نفرض أن ظل الحادلة على الحائط y

من تشابه المثلثين abc, ade ينتج



$$\frac{x}{20} = \frac{1.6}{y} \Rightarrow xy = 32$$
$$x = 12 \Rightarrow 12y = 32 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$$
$$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} + \left(\frac{8}{3}\right)(2.5) = 0$$
$$12\frac{dy}{dt} + \frac{20}{3} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -\frac{20}{3}$$
$\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{9}m/min$ معدل تغير الارتفاع

$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{9}$ أي أن معدل تناقص الارتفاع

2019 احيائي د2 – 2017 دور ثالث تطبيقي داخل – 2017 دور اول احيائي داخل – 2016 دور1 خارج

مثال/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 4$.

Sol: $let\ M = (x,y)\ , N = (7,0)\ , S = MN$ طول

$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}\ , y^2 = 4x$ بالتعويض

$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}\frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\ unit/s$$

- يمكن ملاحظة الفرق بين السؤالين الوزاريين أعلاه وأدناه

(2016/تمهيدي) / لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $x^2 = 4y$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(0,7)$ يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M عندما يكون $y = 4$

(واجب بيتي)

1996 دور1 | جد نقطة أو أكثر تنتمي إلى الدائرة $x^2 + y^2 - 4x = 4$ عندما يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساوياً إلى معدل تغير y بالنسبة للزمن.

Sol: $let\ M\ (x,y)\ , \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$x^2 + y^2 - 4x = 4$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dx}{dy} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} - 4\frac{dx}{dy} = -2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow (2x-4)\frac{dx}{dt} = (-2y)\frac{dy}{dt} \quad \because \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$[(2x-4) = (-2y)] \div 2 \Rightarrow x - 2 = -y \Rightarrow y = 2 - x \ldots\ldots (1)$

$x^2 + y^2 - 4x = 4 \ldots\ldots (2)$

$x^2 + (2-x)^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 - 4x - 4 = 0$

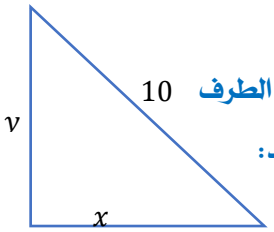
$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-4) = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 2\ OR\ x = 4 \Rightarrow y = 2 - 4 = -2$

$M = \{(0,2),(4,-2)\}$

2020 تطبيقي د2 داخل | 2012 د1 | 2014د2 | 2014 تمهيدي

مثال/ سلم طوله $10m$ يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية فإذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\ m/sec$ عندما يكون الطرف السفلي على بعد $8m$ من الحائط جد:



1- معدل انزلاق طرفه العلوي.

2- سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.

الحل/ (1) نفرض بُعد قاعدة السلم عن الحائط x ، بُعد رأس السلم عن الأرض y

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$64 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$
$$(2)(8)(2) + (2)(6)\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -32 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}m/sec$$ معدل انزلاق الطرف العلوي

(2) نفرض أن الزاوية بين السلم والأرض = θ

$$\sin\theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{10}y$$
$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}\ ,\because \cos\theta = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\left(-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3}rad/sec$$ معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}rad/sec$ سرعة نقصان الزاوية بين السلم والأرض

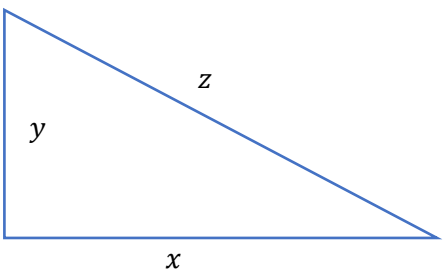
2009 دور2 | سلم طوله $13m$ ستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية فإذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $4m/sec$ جد معدل انزلاق الطرف العلوي للسلم في اللحظة التي يكون فيها الطرف الأسفل للسلم على بعد $5m$ من الحائط.

Ans: $\frac{5}{3}m/s$ واجب بيتي H.W

2009 دور1 | طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الأول بسرعة $80km/h$ وتسير سيارة على الطريق الآخر بسرعة $60km/h$ جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة.

الحل/ نفرض أن الطريقان المتعامدان x, y والبعد بين السيارتين z

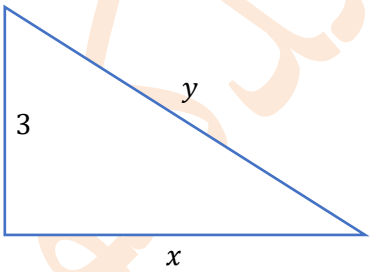
$$\because \frac{dx}{dt} = 80 \Rightarrow x = 80\left(\frac{1}{4}\right) = 20 \quad after\ \frac{1}{4}h$$
$$\because \frac{dy}{dt} = 60 \Rightarrow y = 60\left(\frac{1}{4}\right) = 15 \quad after\ \frac{1}{4}h$$
$$\frac{dz}{dy} = 100\ km/h$$ واجب بيتي H.W



1997 دور1 | سيارة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت إشارة مرورية حمراء ارتفاعها $3m$ عن سطح الأر وبعد ان ابتعدت عنها بمسافة $3\sqrt{3}m$ اصطدمت بسيارة أخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور، جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والإشارة الضوئية

تلميح: هذا السؤال لكي يكون منطقياً يجب أن تكون الإشارة المرورية معلقة والسيارة تمر من تحتها مباشرة وفي غير هذه الحالة أي أنه إن كانت إشارة تقع أعلى عمود مستقر على الأرض عندها يجب أن يكون العمود على الرصيف وليس في وسط الشارع وإلا اصطدمت السيارة به.

الحل: نفرض أن بُعد السيارة عن مسقط الإشارة المرورية على الأرض x ونفرض أن بُعدها عن الإشارة y

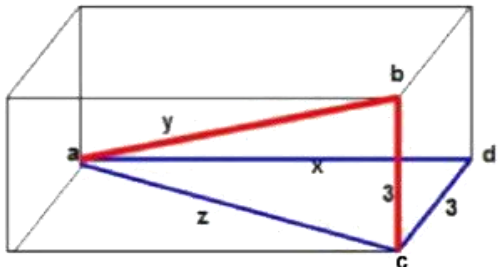


$$y^2 = x^2 + 9$$
$$y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 27 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$
$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$
$$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2}(30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3\sqrt{2}(30)}{3\sqrt{3}} = 10\sqrt{6}\ m/s$$

2010 تمهيدي | قطار ذو عربة واحدة يسير بسرعة $(30m/s)$ اجتازت شجرة ارتفاعها $3m$ عن سطح الأرض وبعد أن ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}m$ توقفت نتيجة وجود عمل إرهابي على السكة احسب سرعة تغير المسافة بين القطار وقمة الشجرة.

تلميح: هذا السؤال فيه إشكال كبير من حيث المنطوق لأن الشجرة لا يمكن أن تكون على السكة مباشرة ولا يمكن تفسير الشجرة على أنها معلقة كما في تفسير سؤال الإشارة المرورية لذا فإن السؤال على وضعه الحالي فيه إشكال كبير ولا يمكن أن يكرر في الامتحان إلا بعد إدخال التعديل أدناه عليه ليكون سؤالاً ليس بسهل.

الحل/ في المثلث acb القائم الزاوية في c نفرض أن $ab = y$ والذي يمثل قطر متوازي المستطيلات حيث أن bc يمثل الشجرة وcd أقرب مسافة بين قاعدة الشجرة والسكة.



$$y^2 = z^2 + 9$$
$$[y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 27 = z^2 + 9 \Rightarrow z^2 = 18 \Rightarrow z = 3\sqrt{2}]$$
$$2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt} \dots\dots (1)$$

في المثلث adc القائم الزاوية في d نفرض أن $ad = x\ ,\ ac = z$

$$z^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 18 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$
$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} \dots\dots (2) \quad \text{نعوض 1 في 2}$$
$$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3(30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 10\sqrt{3}\ m/s$$

تلميح: لو قيل أن القطار يبعد عن قاعدة الشجرة في لحظة ما يساوي $3\sqrt{3}$ لكانت الخطوة الثانية في الحل هي: $[z = 3\sqrt{3} \Rightarrow$

$$y^2 = 27 + 9 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6]$$

(عزيزي الطالب.. أرجو الالتفات إلى أن السؤال بتفسيره العلمي يستبعد أن يكون ضمن الأسئلة الوزارية وأن الحل المعروض أعلاه للاطلاع فقط وكان الحل النموذجي حينها يفترض ما فهمه الطلاب من السؤال من أن الشجرة تقع على السكة أو أنهم أهملوا المسافة بينها وبين سكة القطار وعليه كان الحل بالصورة أدناه وإذا ما تكررت فكرة السؤال مستقبلاً بهذه الطريقة).

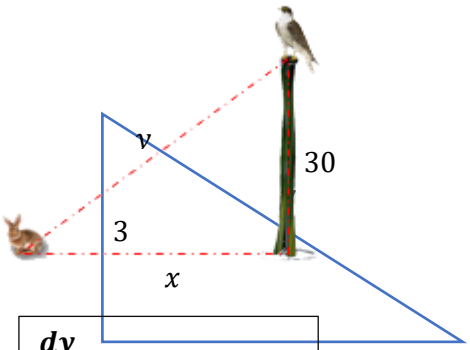
$$y^2 = x^2 + 9$$
$$y^2 = 27 + 9 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$
$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$
$$6\frac{dy}{dt} = (3\sqrt{3})(30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 15\sqrt{3}\ m/s$$

2017 دور ثالث احيائي داخل | وقف صقر على قمة شجرة ارتفاعها $(30m)$، لاحظ أرنب فطار نحوه بسرعة $(80m/s)$، جد معدل تغير موقع الأرنب إذا كان بعده عن الشجرة $(40m)$

تلميح: في السؤال الوزاري أعلاه أخطاء علمية ولغوية ولكي يتم مطابقة الحل النموذجي مع السؤال يجب إعادة صياغته بالصورة أدناه حيث أن الصقر يجب أن يبقى واقفاً على الشجرة من أجل الاستفادة من ارتفاع الشجرة وأن حركة الصقر عند انقضاضه على الأرنب سيجعل البعد العمودي متغيراً بتغير حركته.

وقف صقر على قمة شجرة ارتفاعها $(30m)$، لاحظ أرنباً مقترباً من الشجرة وكان معدل اقتراب الأرنب من الصقر $(80m/min)$، جد معدل اقتراب الأرنب من قاعدة الشجرة عندما يكون بعده عنها $(40m)$

الحل/ نفرض أن بعد الأرتب عن الشجرة x وبعده عن الصقر y



$$\frac{dy}{dt} = -80\ ,\ x = 40$$

$$y^2 = x^2 + (30)^2$$
$$y^2 = 1600 + 900 = 2500 \Rightarrow y = 50$$
$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$
$$2(50)(-80) = 2(40)(\frac{dx}{dt})$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-8000}{80} = -100\ m/min$$

معدل اقتراب الأرنب من الشجرة يساوي $100\ m/min$

2018 دور أول احيائي خارج – 2019 احيائي د1 داخل | تحركت سيارتان الأولى باتجاه الشرق بسرعة $40km/h$ والثانية باتجاه الشمال بسرعة $30km/h$ ما معدل تغير المسافة بين السيارتين عندما تكون الأولى قطعت $(4km)$ والثانية قطعت $(3km)$.

الحل/ على افتراض أن السيارتين انطلقتا من نفس النقطة فيكون

$$\frac{dx}{dt}=40\ ,\frac{dy}{dt}=30$$
$$x=4,y=3$$
$$\frac{dz}{dt}=?$$

$$z^2=x^2+y^2$$
$$x=4,y=3\Rightarrow z^2=16+9=25\Rightarrow z=5$$
$$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$
$$2(5)\frac{dz}{dt}=2(4)(40)+2(3)(30)$$
$$10\frac{dz}{dt}=320+180\Rightarrow\frac{dz}{dt}=\frac{500}{10}=50\ km/h$$

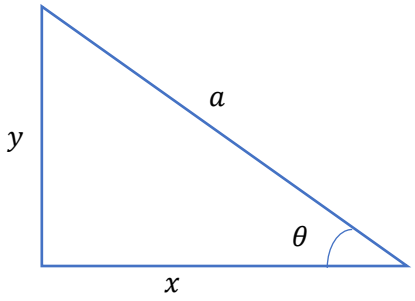
تلميح: كان السؤال سيكون أكثر جمالاً لو تم استبدال العبارة (عندما تكون الشاحنة (A) على بعد $(4km)$ والشاحنة (B) على بعد $(3km)$ من المستودع) ووضعها محل عبارة بعد 6 دقائق ...

هنا سنقوم بتحويل الدقائق إلى ساعات وذلك بالقسمة على 60 لينتج $(0.1h)$ وعند ضرب هذا الزمن بالسرعتين لحصلنا على نفس الأرقام ويكون الجواب نفسه..

الأسئلة الوزارية الخاصة بتمارين المعدلات الزمنية

س1/ سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط راسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\pi/3$

$$a^2=x^2+y^2$$



$$0=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\ \dots\dots(1)$$
$$tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{y}{x}\Rightarrow y=\sqrt{3}x\ \dots\dots(2)$$
$$0=2x(2)+2\sqrt{(3)}x\frac{dy}{dt}\Rightarrow 2\sqrt{3}x\frac{dy}{dt}=-4x$$
$$\frac{dy}{dt}=-\frac{2}{\sqrt{3}}m/s$$

معدل انزلاق طرفه العلوي يساوي $\frac{2}{\sqrt{3}}m/s$

$$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{dx}{dt}=2$$
$$\frac{dy}{dt}=?$$

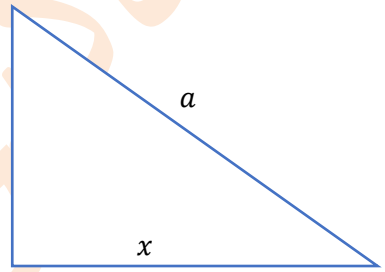
هل لاحظت الفرق بين مثال السلم وتمرين السلم

تأكيد1 – هنا علمت الزاوية بشكل مؤقت في مثلث قائم الزاوية وتره ثابت وضلعيه القائمين متغيرين وهنا ستكون العلاقة الأساسية التي يتم اشتقاقها هي (فيثاغورس) أما العلاقة الثانوية فهي دالة مثلثية (دائرية) يفضل أن تربط بين متغيرين.

تأكيد2 – إن شئنا أن تكون العلاقة الثانوية دالة مثلثية تربط بين متغير وثابت يجب أخذ دالتي sin , cos معاً كما في التفصيل أدناه.

$\theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{3}$

$\frac{dy}{dt} = ?$



$a^2 = x^2 + y^2$

$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \dots\dots (1)$

$sin\frac{\pi}{3} = \frac{y}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{a} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \dots\dots (2)$

$cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{1}{2}a \dots\dots (3)$

$0 = 2\left(\frac{1}{2}a\right)\frac{dx}{dt} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\frac{dy}{dt} \Rightarrow 0 = (a)\frac{dx}{dt} + (\sqrt{3}a)\frac{dy}{dt}$

$0 = (a)(2) + (\sqrt{3}a)\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{-2}{\sqrt{3}} m/s$

$\frac{2}{\sqrt{3}} m/s$ معدل انزلاق طرف العلوي يساوي

2015 د4 رصافة | سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{1}{5} m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض يساوي $\frac{\pi}{3}$

Ans: $\frac{1}{5\sqrt{3}} m/s$ واجب بيتي

2016 دور2 | سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض يساوي $\frac{\pi}{4}$

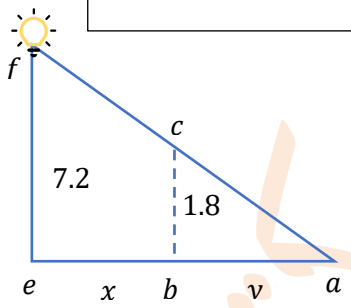
Ans: $2m/s$ واجب بيتي

س2/ عمود طوله $7.2m$ في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله $1.8m$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $30m/min$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

الحل/ نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = x، نفرض ان طول ظل الرجل = y

2012 تمهيدي
2013 دور1
2014 تمهيدي خارج
2015 تمهيدي
2015 دور1

$\frac{dx}{dt} = 30 , \frac{dy}{dt} = ?$



من تشابه المثلثين abc, aef

$$\frac{1.8}{7.2} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{□+y}$$
$$x + y = 4y \Rightarrow x = 3y$$
$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(\frac{30}{3}\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = 10\ m/min$$

ملاحظة: كلما يبتعد الرجل عن مصدر النور يزداد ظله والعكس صحيح.

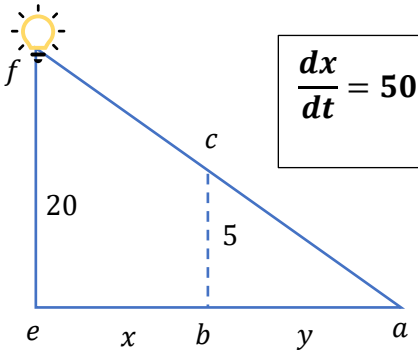
2015 دور2 | عمود طوله $6.4m$ في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله $1.6\ m$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد سرعة تغير طول ظل الرجل.

H.W ans: $10\ m/min$ واجب بيتي

2016 دور2 خارج | فنار مينا ارتفاعه $20m$ يعلوه مصباح كبير، تحركت سفينة ارتفاعها $5m$ مبتعدة عن الفنار بسرعة $50km/h$ جد تغير طول ظل السفينة على سطح البحر

الحل/ نفرض البعد بين السفينة وقاعدة الفنار = x، نفرض أن طول ظل السفينة = y

$\frac{dx}{dt} = 50 , \frac{dy}{dt} = ?$



من تشابه المثلثين abc, aef

$$\frac{5}{20} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$$
$$x + y = 4y \Rightarrow x = 3y$$
$$\frac{dx}{d□} = 3\frac{dy}{dt} \Rightarrow 50 = 3\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{50}{3}\right) km/h$$

2019 تمهيدي احيائي | عمود طوله $(3.6m)$ في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله $(1.6m)$ مبتعداً عن العمود بسرعة $(1.5m/s)$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

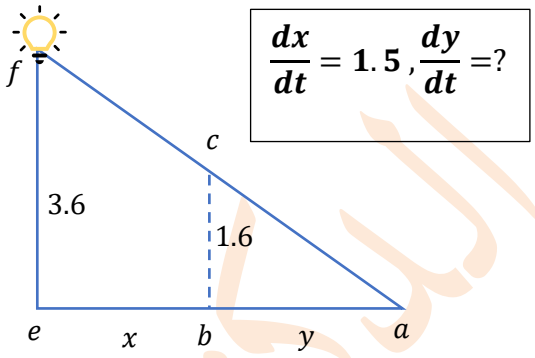
الحل/ نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = x، تفرض أن طول ظل الرجل = y

من تشابه المثلثين abc, aef

$$\frac{1.6}{3.6}=\frac{y}{x+y}\Rightarrow\frac{4}{9}=\frac{y}{x+y}$$

$$4x+4y=9y\Rightarrow 4x=5y$$

$$4\frac{dx}{dt}=5\frac{dy}{dt}\Rightarrow 4(1.5)=5\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{6}{5}m/s$$



ملاحظة: كلما يبتعد الرجل عن مصدر النور يزداد ظله والعكس صحيح.

س3/ لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M

2012 د2
2018 احيائي د2
2020 احيائي د1

sol: $let\ M=(x,y), N=\left(0,\frac{3}{2}\right), S=MN, \frac{ds}{dt}=\frac{2}{3}\cdot\frac{dy}{dt}$

$$S=\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}\Rightarrow S=\sqrt{x^2+y^2-3y+\frac{9}{4}}$$

بالتعويض $y=x^2$ $S=\sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}}\Rightarrow S=\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

بتربيع الطرفين $2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}=3y-3$

$$4\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)=9y^2-18y+9\Rightarrow[4y^2-8y+9=9y^2-18y+9]$$

$$5y^2-10y=0\Rightarrow 5y(y-2)=0$$

$$y=0\Rightarrow x=0\ \text{يهمل}\ OR\ y=2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

مجموعة الحل $M=\{(\sqrt{2},2),(-\sqrt{2},2)\}$

تأكيد/ تم اهمال $y=0$ لأن عند تعويضها بمشتقة العلاقة الأساسية قبل (تربيع الطرفين) نتج عنه طرفين غير متساويين وهذا الأمر لا يتعلق بالصفر حصراً ويمكن أن يكون لغيره.

2014 دور1 | لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0,\frac{3}{2})$ يساوي ثلث المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M

تنبيه: من المستبعد أن يكون واضع السؤال يقصد الثلث وكان المرجح حينها أن فيها خطأ طباعي وقبل حل الثلثين ولكن لو كان واضع السؤال يقصد الثلث فعلاً فإن الجواب سيكون كما في أدناه ولا يخلو من غرابة وصعوبة.

Sol: $let\ M=(x,y), N=\left(0,\frac{3}{2}\right), S=MN$ طول, $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{3}\cdot\frac{dy}{dt}$

$S=\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}\Rightarrow S=\sqrt{x^2+y^2-3y+\frac{9}{4}}, y=x^2$ بالتعويض

$S=\sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}}\Rightarrow S=\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}\Rightarrow \frac{ds}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\Rightarrow \sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}=3y-3$ بتربيع الطرفين

$\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)=9y^2-18y+9\Rightarrow\left[8y^2-16y+\frac{27}{4}=0\right]\div 8\Rightarrow\left[y^2-2y+\frac{27}{32}=0\right]$

$y^2-2y=-\frac{27}{32}\Rightarrow y^2-2y+1=-\frac{27}{32}+1\Rightarrow (y-1)^2=\frac{5}{32}\Rightarrow y-1=\pm\sqrt{\frac{5}{32}}\Rightarrow y=1\pm\sqrt{\frac{5}{32}}$

$y=x^2\Rightarrow x^2=1\pm\sqrt{\frac{5}{32}}\Rightarrow x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{\frac{5}{32}}}$

س4/ جد مجموعة النقط التي تنتمي إلى الدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساوياً للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

2014 نازحين
2019 تطبيقي تمهيدي
2019 تطبيقي د3 داخل
2020 تطبيقي د2

Sol: $let\ M=(x,y), \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2+4x-8y=108$

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0$

$2x\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}=8\frac{dy}{dt}-2y\frac{dy}{dt}\Rightarrow (2x+4)\frac{dx}{dy}=(8-2y)\frac{dy}{dt}$

$\because \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}\Rightarrow[(2x+4)=(8-2y)]\div 2\Rightarrow x+2=4-y$

$\Rightarrow y=2-x\ldots\ldots(1)$

$x^2+y^2+4x-8y=108\ldots\ldots(2)$

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)-108=0$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$2x^2+8x-120=0\Rightarrow x^2+4x-60=0\Rightarrow (x+10)(x-6)=0$

$x=-10\Rightarrow y=2+10=12\ OR\ x=6\Rightarrow y=2-6=-4$

$M=\{(-10,12),(6,-4)\}$

2015 نازحين دور2 | جد مجموعة النقط التي تنتمي إلى الدائرة $x^2+y^2-4x-8y=108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساوياً للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

Ans: $M=\{(10,-4),(-6,12)\}$

يمكن ملاحظة الفرق بين السؤال الوزاري سؤال المنهج المقرر $x^2+y^2+4x-8y=108$

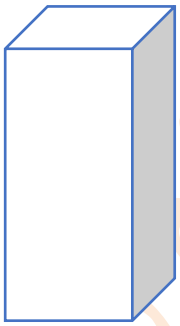
س5/ متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3m/s$ وارتفاعه يتناقص بمعدل $0.5m/s$، جد معدل تغير الحجم عندما يكون ضلع القاعدة يساوي $4cm$ والارتفاع يساوي $3cm$

sol: $V=x^2h$ حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\frac{dv}{dt}=x^2\cdot\frac{dh}{dt}+h\cdot 2x\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt}=(4)^2(-0.5)+(3)(8)(0.3)$$
$$\frac{dv}{dt}=-8+7.2\Rightarrow \frac{dv}{dt}=-0.8\ cm^3/s$$ معدل تغير الحجم

$0.8cm^3/s$ معدل نقصان الحجم

2019 د3 احيائي



$x=4\ ,h=3$

$\frac{dx}{dt}=0.3\ ,\frac{dh}{dt}=-0.5$

$\frac{dv}{dt}=?$

الأسئلة الوزارية الخاصة بمبرهنتي رول والقيمة المتوسطة

2020 احيائي د1 | ابحث تحقق مبرهنة رول لكل مما يأتي وإن تحققت جد قيمة (c)

1- $f(x)=(2-x)^2 \quad : x\in[0,4]$

2015 تمهيدي

الحل/ أ- الدالة مستمرة على الفترة $[0,4]$ لأنها كثيرة حدود.

ب- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,4)$ لأنها كثيرة حدود.

جـ- $f(0)=(2-0)^2=4\ ,f(4)=(2-4)^2=4\Rightarrow f(0)=f(4)$

يمكن تحقق مبرهنة رول

توجد قيمة واحدة على الأقل $c\in(a,b)$ تحقق $f'(c)=0$

$f'(x)=2(2-x)(-1)=-4+2x$

$f'(c)=-4+2c\Rightarrow -4+2c=0\Rightarrow 2c=4\Rightarrow c=2\in(0,4)$

2- $f(x)=9x+3x^2-x^3 : x\in[-1,1]$

2013 خارج القطر

الحل/ أ- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود

ب- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$ لأنها كثيرة حدود.

جـ- $f(-1)=-9+3+1=-5\ ,f(1)=9+3-1=11$

$\because f(1)\neq f(-1)\Rightarrow$ لا يمكن تحقق مبرهنة رول

مثال/ جد قيمة أو قيم c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لكل مما يأتي:

$f(x) = x^2 - 6x + 4 \, , x \in [-1, 7]$

الحل/ 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1, 7]$ لأنها كثيرة حدود.

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 7)$ لأنها كثيرة حدود.

3) يوجد على الأقل قيمة واحدة $c \in (a, b)$ وتحقق $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2019 د3 تطبيقي

2019 د2 تطبيقي

$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(c) = 2c - 6$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7+1} = \frac{(49-42+4)-f(1+6+4)}{8} = \frac{(11)-(11)}{8} = 0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 6 = 0 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$

تمارين عامة: س8/ $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فإذا كانت $c \in (-1, b)$ حيث $c = 2$ فجد قيمتي $a, b \in R$

الحل/ بما أن الدالة تحقق مبرهنة رول فإن $f(a) = f(b)$

2014 خارج القطر

$f(-1) = a + 4 + 5 = a + 9, f(b) = ab^2 - 4b + 5$

$ab^2 - 4b + 5 - a + 9 \ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 2ax - 4 \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow 2ac - 4 = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \; (in \; 1)$

$b^2 - 4b + 5 = 1 + 9 \Rightarrow (b - 5)(b + 1) = 0$

2018 تطبيقي د2 داخل

$either \; b = 5 \; OR \; b = -1$ تهمل

2018 تطبيقي د2 داخل

مثال/ إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ حيث $f: [0, b] \Rightarrow R$، وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ جد قيمة b

الحل/ بما أن الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة فإنها مستمرة وقابلة للاشتقاق بالإضافة إلى أنها تحقق وجود قيمة واحدة على الأقل حيث $c \in (a, b)$ وتحقق $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 8x \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) = -4$ ميل المماس

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{(b^3 - 4b^2) - (0)}{b} = \frac{b^3 - 4b^2}{b}$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{b^3 - 4b^2}{b} = -4 \Rightarrow b^3 - 4b^2 = -4b \Rightarrow b^3 - 4b^2 + 4b = 0$

$b(b^2 - 4b + 4) = 0 \Rightarrow b(b - 2)^2 \Rightarrow b = 0$ تهمل $OR \; (b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 2$

تأكيد / في الكتاب المنهجي تم التعامل مع الخطوة $\frac{b^3-4b^2}{b}=-4$ بطريقة استخراج b عامل مشترك من البسط ومن ثم اختصاره مع المقام وفي حلنا أعلاه لم نقم بهذا الأمر.. فأي الحلين صحيح؟.. هنا عليك الالتفات عزيزي الطالب أن كلا الحلين صحيح بسبب أنه لا يجوز القسمة على متغير إلا بعد التأكد أنه لا يساوي صفر وأن طريقة الكتاب صحيحة في هذا السؤال لأننا متأكدون أن $b\neq 0$ بسبب أن الفترة $[0,b]$ ومن خواص أي فترة أن يكون حدها الأيمن أكبر من حدها اليسر أي أن $b>0$ فلو كانت الفترة $[b,2]$ مثلاً عندها لا تجوز هذه الحالة (أي عملية الاختصار عن وجدت) لأن b ربما تساوي صفراً ويجب الالتزام بالطريقة الأولى فيها.

2017 الدور الثاني احيائي خارج | برهن أن الدالة $f(x)=x^3-1$ على الفترة $[-1,1]$ تحقق مبرهنة رول قم جد قيمة c

تلميح: السؤال فيه خطا لغوي ملفت للنظر لأن كلمة برهن تشير إلى وجوب تحقق مبرهنة رول وفي هذا السؤال نجد أن مبرهنة رول غير متحقق بسبب عدم تساوي الصور. وعليه يجب إعادة صياغة السؤال وذلك أما باستبدال كلمة برهن بكلمة (هل) أو يضاف إلى كلمة (برهن) عبارة (فيما إذا كانت).

Sol:

1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود.
2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود.
3) $f(-1)=-1-1=-2\ ,f(1)=1-1=0$
بما أن $f(-1)\neq f(1)$ فإنه لا يمكن تحقق مبرهنة رول.

2017 الدور الثالث احيائي داخل - 2020 تطبيقي د3 | إذا كانت $f(x)=x^2-2x$، وكانت الدالة $f:[0,n]\Rightarrow R$ وتحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عندما $c=5$ جد قيمة n

الحل/ بما أن الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

فإنه توجد قيمة واحدة على الأقل $c\in(a,b)$ تحقق $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(x)=2x-2\Rightarrow f'(c)=2c-2\Rightarrow f'(5)=10-2=8$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(n)-f(0)}{n-0}=\frac{(n^2-2n)-(0)}{n}=\frac{n(n-2)}{n}$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$n-2=8\Rightarrow n=10$

تأكيد: عزيزي الطالب... لا بد أنك تسأل لماذا اختصرنا n في الخطوة $\frac{n(n-2)}{n}$ وهل يجوز القسمة على حرف لا نعرف قيمته؟ الجواب هو نعم يجوز الاختصار هنا لأننا متأكدون أن n لا يمكن لها أن تساوي صفراً لأن الفترة المعطاة في السؤال هي $[0,n]$ فلو كانت الفترة مثلاً $[n,10]$ فهنا لا تجوز عملية الاختصار لأن n ربما تكون صفراً.

2019 تطبيقي د1 خارج | إذا كانت $f(x)=ax^2-6x+4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0,k]$ وأن $f(-1)=11$، جد قيم $a,k\in R$ قم جد قيم c الممكنة.

Sol: $f(-1)=11\Rightarrow 11=a+6+4\Rightarrow a=1$

$f(x)=x^2-6x+4$

$f(0)=f(k)$ لأن الدالة تحقق مبرهنة رول

$(0)^2+6(0)+4=k^2-6k+4\Rightarrow k^2-6k=0\Rightarrow k(k-6)=0$

$either\ k=0$ تهمل $OR\ k=6$

توجد قيمة واحدة على الأقل c تحقق $f'(c)=0$

$f'(x)=2x-6\Rightarrow f'(c)=2c-6$

$2c-6=0\Rightarrow c=3\in(0,6)$

الأسئلة الوزارية الخاصة بتمارين رول والقيمة المتوسطة

س1/ أوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي:

a. $f(x)=x^3-9x\ ,x\in[-3,3]$

2020 احيائي د2 داخل – 2020 تطبيقي د1

الحل/ أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-3,3]$ لأنها كثيرة حدود.

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3,3)$ لأنها كثيرة حدود.

جـ) $f(3)=27-27=0\ ,f(-3)=-27+27=0\ \Rightarrow f(3)=f(-3)$

يمكن تحقق مبرهنة رول

توجد قيمة واحدة على الأقل $c\in(a,b)$ تحقق $f'(c)=0$

$f'(x)=3x^2-9\Rightarrow f'(c)=3c^2-9$

$3c^2-9=0\Rightarrow 3c^2=9\Rightarrow c^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}\in(-3,3)\ OR\ c=-\sqrt{3}\in(-3,3)$

---

b. $f(x)=2x+\frac{2}{x}\ ,x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

2012 خارج

الحل/ أ) الدالة مستمرة على الفترة $[\frac{1}{2},2]$ لأن الفترة تقع ضمن مجالها $R/\{0\}$.

$f'(x)=2-\frac{2}{x^2}$

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(\frac{1}{2},2)$ لأن الفترة تقع ضمن مجالها $R/\{0\}$.

جـ) $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+4=5\ ,f(2)=4+1=5\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)$

يمكن تحقق مبرهنة رول

توجد قيمة واحة على الأقل $c\in(\frac{1}{2},2)$ تحقق $f'(c)=0$

$f'(x)=2-\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'(c)=2-\frac{2}{c^2}$

$2-\frac{2}{c^2}=0\Rightarrow 2=\frac{2}{c^2}\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=1\in\left(\frac{1}{2},2\right)\ OR\ c=-1\notin\left(\frac{1}{2},2\right)$

س6/ بين أن كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة إزاء كل منها:

a- $f(x)=(x-1)^4\,,x\in[-1,3]$

2018 تطبيقي د2 خارج

2011 دور1

الحل/ أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,3]$ لأنها كثيرة حدود.

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,3)$ لأنها كثيرة حدود.

جـ) $f(3)=(3-1)^4=16\,,f(-1)=(-1-1)^4=16\Rightarrow f(3)=f(-1)$

يمكن تحقق مبرهنة رول

توجد قيمة واحدة على الأقل $c\in(a,b)$ تحقق $f'(c)=0$

$f'(x)=4(x-1)^3$

$f'(c)=0\Rightarrow 4(c-1)^3=0\Rightarrow c-1=0\Rightarrow c=1\in(-1,3)$

---

b- $h(x)=x^3-x\,,x\in[-1,1]$

2020 تطبيقي د1 خارج – 2020 احيائي د3

2014 دور2

2016 دور2 خارج

الحل/ أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود.

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$ لأنها كثيرة حدود.

جـ) $h(1)=1-1=0\,,h(-1)=-1+1=0\Rightarrow h(1)=h(-1)$

يمكن تحقق مبرهنة رول

توجد قيمة واحدة على الأقل $c\in(a,b)$ تحقق $h'(c)=0$

$h'(x)=3x^2-1$

$h'(c)=0\Rightarrow 3c^2-1=0\Rightarrow 3c^2=1\Rightarrow c^2=\frac{1}{3}$

$c=\frac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)\;OR\;c=-\frac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)$

---

d- $f(x)=\cos 2x+2\cos x\,,x\in[0,2\pi]$

2018 تطبيقي د1

الحل/ 1) الدالة مستمرة على الفترة $[0,2\pi]$ لأن الفترة تقع ضمن مجالها.

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,2\pi)$ لأن الفترة تقع ضمن مجالها.

3) $f(0)=\cos 0+2\cos 0=3\,,f(2\pi)=\cos 4\pi+2\cos 2\pi=3$

بما أن $f(0)=f(2\pi)$ فيمكن تحقق مبرهنة رول

يوجد على الأقل قيمة واحدة $c\in(a,b)$ وتحقق $f'(c)=0$

$f'(x)=-2\sin 2x-2\sin x\Rightarrow f'(c)=-2\sin 2c-2\sin c$

$[-2\sin 2c-2\sin c=0]\div(-2)\Rightarrow \sin 2c+\sin c=0\Rightarrow$

$2\sin c\cos c+\sin c=0\Rightarrow \sin c\,(2\cos c+1)=0$

$\sin c=0\Rightarrow c=0\notin(0,2\pi)OR\;c=2\pi\notin(0,2\pi)\;OR\;c=\pi\notin(0,2\pi)$

$1+2\cos c=0\Rightarrow 2\cos c=-1\Rightarrow \cos c=-\frac{1}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$c=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\in(0,2\pi)\;OR\;c=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\in(0,2\pi)$

س7 / اختبر إمكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة إزلها مع ذكر السبب وإن تحققت المبرهنة فجد القيم الممنة لـ (c)

a- $f(x)=x^3-x-1\ ,x\in[-1,2]$

الحل / 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,2]$ لأنها كثيرة حدود.

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$ لأنها كثيرة حدود.

3) يوجد على الأقل قيمة واحدة $c\in(a,b)$ وتحقق $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(c)=3c^2-1$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{(8-2-1)-(-1+1-1)}{3}=\frac{(5)-(-1)}{3}=2$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$3c^2-1=2\Rightarrow 3c^2=3\Rightarrow c=1\in(-1,2)\ OR\ c=-1\notin(-1,2)$

2012 دور1

ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2-x+1$ على الفترة $[-1,2]$ وإن تحققت جد قيمة c

الحل / 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,2]$ لأنها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$ لأنها كثيرة حدود

3) يوجد على الأقل قيمة واحدة $\square\in(a,b)$ وتحقق $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f(2)=4-2+1=3\ ,f(-1)=1+1+1=3$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{(3)-(3)}{3}=0$ ميل الوتر

$f'(x)=2x-1\Rightarrow f'(c)=2c-1$

ميل المماس = ميل الوتر $\Rightarrow 2c-1=0\Rightarrow 2c=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(-1,2)$

---

b- $h(x)=x^2-4x+5\ \ ,x\in[-1,5]$

Ans: $c=2\in(-1,5)$ واجب بيتي H.W

2014 دور4 انبار

d- $g(x)=\frac{4}{x+2}\ \ ,x\in[-1,4]$

الحل / 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,4]$ لأنها تقع ضمن مجالها $R/\{-2\}$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,4)$ لأنها معرفة وتقع ضمن مجالها أيضاً.

3) يوجد على الأقل قيمة واحدة $c\in(a,b)$ وتحقق $g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$

$g'(x)=\frac{(x+2)(0)-(4)(1)}{(x+2)^2}=\frac{-4}{(x+2)^2}\Rightarrow g'(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$ ميل المماس

$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\frac{g(4)-g(-1)}{4+1}=\frac{\left(\frac{4}{6}\right)-\left(\frac{4}{1}\right)}{5}=\frac{\left(-\frac{20}{6}\right)}{5}=\frac{-20}{30}=\frac{-2}{3}$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{-4}{(c+2)^2}=\frac{-2}{3}\Rightarrow (c+2)^2=6\Rightarrow c+2=\pm\sqrt{6}\Rightarrow$

$c=\sqrt{6}-2\in(-1,4)\ OR\ c=-\sqrt{6}-2\notin(-1,4)$ تهمل

2019 تمهيدي احيائي | اختبر إمكانية تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة للدالة وإن تحققت جد قيمة c الممكنة حيث $f(x)=\frac{4}{x+2}\ ,x\in[-1,2]$

الحل/ 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1,2]$ لأنها تقع ضمن مجالها $R/\{-2\}$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$ لأنها معرفة وتقع ضمن مجالها أيضاً.

3) يوجد على الأقل قيمة واحدة $c\in(a,b)$ وتحقق $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(x)=\frac{(x+2)(0)-(4)(1)}{(x+2)^2}=\frac{-4}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{\left(\frac{4}{4}\right)-\left(\frac{4}{1}\right)}{3}=\frac{-3}{3}=-1$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{-4}{(c+2)^2}=-1\Rightarrow (c+2)^2=4\Rightarrow c+2=\pm2\Rightarrow$

$c=2-2=0\in(-1,2)\ OR\ c=-2-2=-4\notin(-1,2)$ تهمل

لاحظ عزيزي الطالب مقدار التغييرات الطفيفة التي قد تطرأ على أغلب الأسئلة الوزارية بحيث يحافظ السؤ ال على منهجيته وعند فهمكم لخطوات الحل تكون الإجابة متيسرة.

تمارين عامة خاصة بالموضوع

س7/ استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لإيجاد قيمة c للدالة على الفترة $[-2,2]$ حيث $f(x)=x^4-2x^2$ $x\in[-2,2]$

الحل/ أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-2,2]$ لأنها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2,2)$ لأنها كثيرة حدود

جـ) $f(-2)=16-8=8\,,f(2)=16-8=8\Rightarrow f(-2)=f(2)$

$f'(x)=4x^3-4x$

$f'(c)=0\Rightarrow 4c^3-4c=0\Rightarrow 4c(c^2-1)=0\Rightarrow 4c=0\Rightarrow c=0\in(-2,2)$

$\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=\pm1\in(-2,2)$

وعند استخدام مبرهنة القيمة المتوسطة سيكون الحل

الحل/ أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-2,2]$ لأنها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2,2)$ لأنها كثيرة حدود

جـ) $f'(x)=4x^3-4x\Rightarrow f'(c)=4c^3-4c$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(-2)}{2+2}=\frac{(16-8)-(16-8)}{4}=\frac{(8)-(8)}{4}=0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$4c^3-4c=0\Rightarrow 4c(c^2-1)=0\Rightarrow 4c=0\Rightarrow c=0\in(-2,2)$

$\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=\pm1\in(-2,2)$

نستنتج أن كل أسئلة مبرهنة رول تنطبق على القيمة المتوسطة لكن العكس غير صحيح.

2013 دور2 | باستخدام مبرهنة رول جد قيمة c للدالة $f(x)=x^4+2x^2$ حيث $x\in[-2,2]$

الحل/ أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-2,2]$ لأنها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2,2)$ لأنها كثيرة حدود

جـ) $f(-2)=16+8=24\,,f(2)=16+8=24\Rightarrow f(-2)=f(2)$

$f'(x)=4x^3+4x$

$f'(c)=0\Rightarrow 4c^3+4c=0\Rightarrow 4c(c^2+1)=0\Rightarrow 4c=0\Rightarrow c=0\in(-2,2)$

$OR\ c^2+1=0$ وهذا غير ممكن لأنه مجموع مربعين

الأسئلة الوزارية الخاصة بالتقريب

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية لكل مما يأتي مقرباً اجابتك إلى أقرب ثلاث مراتب عشرية:

a. $\sqrt{26}$

2015 نازحين د2

Sol: $f(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=25, b=26, h=b-a, 26-25=1\ , f(a)=\sqrt{25}=5$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}=0.1$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(26)\approx 5+(1)(0.1)\approx 5+0.1\approx 5.1$

---

b. $\sqrt[3]{7.8}$

2011 دور1

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$a=8, b=7.8.\ h=b-a=7.8-8=-0.2\ , f(a)=\sqrt[3]{8}=2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}=0.083$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(7.8)\approx 2+(0.083)(-0.2)\approx 2-0.0166\approx 1.9834$

2015 نازحين د1 – 2015 دور3 – 2020 احيائي د1 خارج

باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $\sqrt{7.9}$

باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $\sqrt[3]{7.98}$

---

c. $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

2019 تطبيقي د1 داخل

Sol: $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$

$let\ a=16, b=17, h=b-a=17-16=1, f(a)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=4+2=6$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{2\sqrt{16}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{5}{32}=0.156$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(17)\approx 6+(0.156)(1)\approx 6+0.156\approx 6.156$

تأكيد: لو كان السؤال السابق بالصورة $\sqrt{26}+\sqrt[3]{26}$ فلا يوجد عدد قريب من العدد 26 له جذر تربيعي وتكعيبي في نفس الوقت وعليه يجب حل كل جذر لوحده ثم نجمع النتائج النهائية.. ارجو الانتباه. علماً أن السؤال السابق يمكن حله بنفس هذه الطريقة المشار إليها لكن الحل بجزء واحد يكون أفضل.

2020 احيائي د3

d. $\sqrt[5]{(0.97)^{\square}}+(0.97)^4+3$

Sol: $f(x)=\sqrt[5]{x^3}+x^4+3=x^{\frac{3}{5}}+x^4+3$

$let\ a=1, b=0.97, h=b-a=0.97-1=-0.03, f(a)=1+1+3=5$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{3}}+4x^3=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+4x^3 \Rightarrow f'(a)=\frac{3}{5}+4=4.6$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow 5+(-0.03)(4.6)\approx 5-0.138\approx 4.862$

2020 تطبيقي د1 خارج – 2018 تمهيدي | مكعب طول حرفه $(9.98cm)$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل/ حجم المكعب = (طول الضلع)^3

$v(x)=x^3$

$a=10, b=9.98, h=b-a=9.98-1=-0.02, v(a)=(10)^3=1000$

$v'(x)=3x^2 \Rightarrow v'(a)=3a^2=(3)(10)^2=300$

$v(a+h)\approx v(a)+h\cdot v'(a) \Rightarrow v(9.98)\approx 1000+(300)(-0.02)\approx 1000-6\approx 994cm^3$

2007 د1 | مربع مساحته $(\square 01cm^2)$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية

الحل/ مساحة المربع = (طول الضلع)^2

$A=m^2 \Rightarrow 101=m^2 \Rightarrow m=\sqrt{101}$

$m(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=100, b=101, h=b-a=101-100=1, m(a)=\sqrt{100}=10$

$\Rightarrow m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{100}}=\frac{1}{20}=0.05$

$m(a+h)\approx m(a)+h\cdot m'(a) \Rightarrow m(101)\approx 10+(1)(0.05)\approx 10+0.05\approx 10.05cm$

1997 دور2 | مربع مساحته $50cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

الحل/ مساحة المربع = (طول الضلع)^2

$A=m^2 \Rightarrow 50=m^2 \Rightarrow m=\sqrt{50}$

$m(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=49, b=50, h=b-a=50-49=1, m(a)=\sqrt{49}=7$

$\Rightarrow m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{14}=0.071$

$m(a+h)\approx m(a)+h\cdot m'(a) \Rightarrow m(50)\approx 7+(1)(0.071)\approx 7+0.071\approx 10.071cm$

1998 دور2 | لتكن $f(x)=\sqrt[3]{(2x+6)}$ جد $f(1.02)$ بصورة تقريبية

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{(2x+6)}=(2x+6)^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=1\ ,b=1.02\ ,h=b-a=1.02-1=0.02\ ,f(a)=\sqrt[3]{8}=2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}\Rightarrow f'(a)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2a+6)^2}}=\frac{2}{3(4)}=\frac{1}{6}=0.16$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(1.02)\approx 2+(0.0032)\approx 2.0032$

2000 دور1 | مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد القيمة التقريبية لتغير حجمه إذا تغير ارتفاعه من $4cm$ إلى $4.01cm$ باستخدام مفهوم التفاضلات

الحل/ نفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط r والارتفاع y حيث أن $y=r$

$v=\frac{\pi}{3}r^2y\Rightarrow v=\frac{\pi}{3}y^2y\Rightarrow v(y)=\frac{\pi}{3}y^3$

$let\ a=4\ ,b=4.01\ ,h=b-a=4.01-4=0.01$

$v'(y)=\pi y^2\Rightarrow v'(a)=\pi a^2=\pi(4)^2=16\pi$

$h\cdot v'(a)\approx(16\pi)(0.01)\approx 0.16\pi\ cm^3$ القيمة التقريبية لتغير الحجم

2001 دور2 – 2016 تمهيدي | جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt[3]{126}$

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=125\ ,b=126\ ,h=b-a=126-125=1\ ,f(a)=\sqrt[3]{125}=5$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}}=\frac{1}{75}=0.013$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(126)\approx 5+(0.013)(1)\approx 5.013$

2013 دور1 – 2002 دور2 | لتكن $f(x)=\sqrt{4x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

Sol: $f(x)=\sqrt{4x+5}$

$let\ a=1\ ,b=1.001\ ,h=b-a=1.001-1=0.001\ ,f(a)=\sqrt{4+5}=3$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{2\sqrt{4x+5}}=\frac{2}{\sqrt{4x+5}}\Rightarrow f'(a)=\frac{2}{\sqrt{4a+5}}=\frac{2}{\sqrt{4+5}}=\frac{2}{3}=0.6$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(1.001)\approx 3+(0.001)(0.6)\approx 3.0006$

2003 دور1 | جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt{99}$

Sol: $f(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=100\ ,b=99\ ,h=b-a=99-100=-1\ ,f(a)=\sqrt{100}=10$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{100}}=\frac{1}{20}=0.05$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(99)\approx 10+(-1)(0.05)\approx 9.95$

2004 دور1 | لتكن $f(x)=\sqrt[3]{3x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{3x+5}=(3x+5)^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=1\ ,b=1.001\ ,h=b-a=1.001-1=0.001\ ,f(a)=\sqrt[3]{8}=2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(3x+5)^{-\frac{2}{3}}(3)=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}}\Rightarrow f'(a)=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3a+5)^2}}=\frac{1}{4}=0.25$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(1.0\square 1)\approx 2+0.00025\approx 2.00025$

2003 دور1 | مربع مساحته $48cm^2$ جد بصورة تقريبية طول ضلعه

الحل/ مساحة المربع = (طول الضلع)^2

$A=m^2\Rightarrow 48=m^2\Rightarrow m=\sqrt{48}$

$m(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=49\ ,b=48\ ,h=b-a=48-49=-1\ ,m(a)=\sqrt{49}=7$

$\Rightarrow m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{14}=0.071$

$m(a+h)\approx m(a)+h\cdot m'(a)\Rightarrow m(48)\approx 7+(-1)(0.071)\approx 7-0.071\approx 6.929\ cm$

2005 دور1 | باستخدام مفهوم التفاضلات جد حجم كرة طول نصف قطرها $2.99cm$ بصورة تقريبية

الحل/ حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

$v(x)=\frac{4\pi}{3}x^3$

$let\ a=3\ ,b=2.99\ ,h=b-a=2.99-3=-0.01\ ,v(a)=\frac{4\pi}{3}(3)^3=36\pi$

$v'(x)=4\pi x^2\Rightarrow v'(a)=4\pi a^2=4\pi(3)^2=36\pi$

$v(a+h)\approx v(a)+h\cdot v'(a)\Rightarrow v(2.99)\approx 36\pi+(-0.01)(36\pi)\approx 35.64\pi\ cm^3$

2006 تمهيدي | جد حجم كرة طول نصف قطرها $3.001\ cm$ بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات

الحل/ حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

$v(x)=\frac{4\pi}{3}x^3$

$let\ a=3\ ,b=3.001\ ,h=b-a=3.\square 01-3=0.001\ ,v(a)=\frac{4\pi}{3}(3)^3=36\pi$

$v'(x)=4\pi x^2\Rightarrow v'(a)=4\pi a^2=4\pi(3)^2=36\pi$

$v(a+h)\approx v(a)+h\cdot v'(a)\Rightarrow v(3.001)\approx 36\pi+(0.001)(36\pi)\approx 36.036\pi\ cm^3$

2005 دور2 | لتكن $f(x)=\sqrt{3x+1}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

Sol: $f(x)=\sqrt{3x+1}$

$let\ a=1, b=1.001, h=b-a=1.001-1=0.001, f(a)=\sqrt{3+1}=2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow f'(a)=\frac{3}{2\sqrt{3a+1}}=\frac{3}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{4}=0.75$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(1.001)\approx 2+(0.001)(0.75)\approx 2.00075$

2006 دور1 | جد القيمة التقريبية $\sqrt[3]{26}$ باستخدام التفاضلات

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=27, b=26, h=b-a=26-27=-1, f(a)=\sqrt[3]{27}=3$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}=0.037$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(26)\approx 3+(0.037)(-1)\approx 3-0.037\approx 2.963$

2006 دور2 | باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=-8, b=-9, h=b-a=-9+8=-1, f(a)=\sqrt[3]{-8}=-2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}}=\frac{1}{12}=0.083$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(26)\approx -2+(0.083)(-1)\approx -2-0.083\approx -2.083$

2008 تمهيدي | جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt{143}$

Sol: $f(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=144, b=143, h=b-a=143-144=-1, f(a)=\sqrt{144}=12$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{144}}=\frac{1}{24}\approx 0.04$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(143)\approx 12+(-1)(0.04)\approx 11.96$

2008 دور1 | جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt{0.98}$

Sol: $f(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=1, b=0.98, h=b-a=0.98-1=-0.02, f(a)=\sqrt{1}=1$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}=0.5$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(0.98)\approx 1+(-0.02)(0.5)\approx 1-0.01\approx 0.99$

2008 دور2 خارج | جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{13.86}$

Sol: $f(x)=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$

$let\ a=16\ ,b=13.86\ ,h=b-a=1.86-16=-2.14\ ,f(a)=\sqrt[4]{16}=2$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{32}\approx 0.031$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(13.86)\approx 2+(-0.0663)\approx 1.9347$

تأكيد: إن h في هذا السؤال كبير جداً قياساً بأصل العدد وعليه ستكون هذه النتيجة بعيدة بعض الشيء عن الواقع

2008 دور2 | جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[3]{25.97}$

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=27\ ,b=25.97\ ,h=b-a=-1.03\ ,f(a)=\sqrt[3]{27}=3$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}\approx 0.04$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(25.97)\approx 3+(-0.0421)\approx 2.9588$

2009 تمهيدي | جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt{15^{-1}}$

Sol: $f(x)=\sqrt{x^{-1}}=x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$let\ a=16\ ,b=15,h=b-a=-1\ ,f(a)=\frac{1}{\sqrt{16}}=0.25$

$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\Rightarrow f'(a)=\frac{-1}{2\sqrt{a^3}}=\frac{-1}{2\sqrt{16^3}}=\frac{-1}{128}\approx -0.007$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(15)\approx 0.25+(0.007)\approx 0.257$

2009 دور1 | جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{0.008}$

Sol: $f(x)=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$

$let\ a=0.0081\ ,b=0.0080\ ,h=b-a=-0.0001\ ,f(a)=\sqrt[4]{0.0081}=0.3$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(0.0081)^3}}=\frac{1}{0.108}\approx 9$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(0.008)\approx 0.3+(-0.0009)\approx 0.2991$

2010 تمهيدي | مكعب حجمه $124cm^3$ جد وباستخدام مفهوم التفاضلات وبصورة تقريبية طول ضلعه

الحل/ حجم المكعب = (طول الضلع)^3

$$v(m) = m^3 \Rightarrow 124 = m^3 \Rightarrow m = \sqrt[3]{124}$$
$$m(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$
$$let\ a = 125\ , b = 124\ , h = b - a = -1\ , m(a) = \sqrt[3]{125} = 5$$
$$m'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow m'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$$
$$m(a+h) \approx m(a) + h \cdot m'(a) \Rightarrow m(124) \approx 5 + (0.013)(-1) \approx 5 - 0.013 \approx 4.987$$

2012 | باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية $\sqrt[3]{63}$

Sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
$$let\ a = 64\ , b = 63\ , h = b - a = 63 - 64 = -1\ , f(a) = \sqrt[3]{64} = 4$$
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48} = 0.0208$$
$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(63) \approx 4 + (-1)(0.0208) \approx 4 - 0.0208 \approx 3.9792$$

2015 د1 خارج – 2020 احيائي د1 | باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

Sol: $f(x) = x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 2 = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$
$$let\ a = 1\ , b = 1.01\ , h = b - a = 0.01\ , f(a) = 1 + 3 + 2 = 6$$
$$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = 5a^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = 5 + 1 = 6$$
$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(1.001) \approx 6 + (0.01)(6) \approx 6 + 0.06 \approx 6.06$$

2015 دور2 | إذا كان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ جد مقدار التغير التقريبي للدالة إذا تغيرت x من 4 إلى 4.01

Sol: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$
$$let\ a = 4\ , b = 4.01\ , h = b - a = 0.01$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{a^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{64}} = \frac{-1}{16} = -0.06$$
$$h \cdot f'(a) \approx (0.01)(-0.06) \approx 0.0006$$ مقدار التغير التقريبي

2015 د2 خارج – 2020 احيائي د2 تكميلي | لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت تغيرت x من 125 إلى 125.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

Sol: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
$$let\ a = 125\ , b = 125.06\ , h = b - a = 125.06 - 125 = 0.06$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{15} = 0.13$$
$$h \cdot f'(a) \approx (0.06)(0.13) \approx 0.0078$$ مقدار التغير التقريبي

2016 دور1 خارج | جد بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{80}-\sqrt[4]{80}$

Sol: $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}$

$let\ a=81\ ,b=80\ ,h=b-a=-1\ ,f(a)=\sqrt{81}-\sqrt[4]{81}=9-3=6$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{81}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}}=\frac{1}{18}-\frac{1}{108}=\frac{5}{108}\approx 0.046$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(80)\approx 6+(-0.046)\approx 5.954$

2020 تطبيقي د2 داخل | مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي $2.98cm$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل/ حجم المخروط $=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $=\frac{\pi}{3}$ (نصف القطر)^2 × الارتفاع

$v=\frac{\pi}{3}r^2y\ ,\because y=2r\Rightarrow r=\frac{1}{2}y\Rightarrow v(y)=\frac{\pi}{12}y^3$

$let\ a=3\ ,b=2.98\ ,b=b-a=2.98-3=-0.02, v(a)=\frac{\pi}{12}(3)^3=\frac{9}{4}\pi=2.25\pi$

$v'(y)=\frac{\pi}{4}y^2\Rightarrow v'(a)=\frac{\pi}{4}a^2=\frac{\pi}{4}3^2=2.25\pi$

$v(a+h)\approx v(a)+h\cdot v'(a)\Rightarrow v(2.98)\approx 2.25\pi+(2.25\pi)(-0.02)$

$\approx 2.250\pi-0.045\pi=2.205\pi\ cm^3$

2017 دور1 تطبيقي داخل | مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي $2.96cm$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل/ حجم المخروط $=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $=\frac{\pi}{3}$ (نصف القطر)^2 × الارتفاع

$v=\frac{\pi}{3}r^2y\ ,\because y=2r\Rightarrow r=\frac{1}{2}y\Rightarrow v(y)=\frac{\pi}{□2}y^3$

$let\ a=3\ ,b=2.96\ ,b=b-a=2.96-3=-0.04, v(a)=\frac{\pi}{12}(3)^3=\frac{9}{4}\pi=2.25\pi$

$v'(y)=\frac{\pi}{4}y^2\Rightarrow v'(a)=\frac{\pi}{4}a^2=\frac{\pi}{4}3^2=2.25\pi$

$v(a+h)\approx v(a)+h\cdot v'(a)\Rightarrow v(2.96)\approx 2.25\pi+(2.25\pi)(-0.04)$

$\approx 2.25\pi-0.09\pi=2.16\pi\ cm^3$

ملاحظة: سوف يصبح قانون الحجم $v=\frac{2\pi}{3}r^3$ إذا علم نصف القطر بدلا من الارتفاع كما يمكن أن نقسم الارتفاع على العدد 2 لنجعل السؤال بدلالة نصف القطر إذا كان ناتج القسمة قابل للتقريب .. أرجو الانتباه!!

2017 دور1 احيائي داخل | جد القيمة التقريبية للمقدار $(15.6)^{-\frac{1}{4}}$

Sol: $f(x)=x^{\frac{-1}{4}}$

$let\ a=16\ ,b=15.6\ ,h=b-a=\ -0.4, f(a)=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=0.5$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{4}x^{\frac{-5}{4}}=\frac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}\Rightarrow f'(a)=\frac{-1}{4\sqrt[4]{16^5}}=\frac{-1}{128}=-0.008$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(15.6)\approx 0.5+0.0032\approx 0.5032$

2017 دور2 تطبيقي داخل | إذا كان $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ جد بصورة تقريبية $f(1.003)$

Sol: $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$

$let\ a=1\ ,b=1.003\ ,h=b-a=1.003-1=0.003, f(a)=1+3+4+5=13$

$f'(x)=3x^2=6x+4\Rightarrow f'(a)=3a^2+6a+4=3+6+4=13$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(1.003)\approx 13+(13)(0.003)\approx 13+0.039\approx 13.039$

2017 دور2 احيائي داخل | إذا تغيرت x من 32 إلى 32.06 جد مقدار التغير التقريبي للدالة $f(x)=\sqrt[5]{x}$

Sol: $f(x)=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$

$let\ a=32\ ,b=32.06\ ,h=b-a=0.06$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}}=\frac{1}{80}=0.012$

$h\cdot f'(a)\approx (0.06)(0.012)\approx 0.00072$ مقدار التغير التقريبي

2017 دور2 تطبيقي خارج | جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا للعدد $\frac{1}{\sqrt[5]{33}}$

Sol: $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=x^{\frac{1}{5}}$

$let\ a=32, b=33\ ,h=b-a=1\ ,f(a)=\frac{1}{\sqrt[5]{32}}=0.5$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{5}x^{\frac{-6}{5}}=\frac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}\Rightarrow f'(a)=\frac{-1}{5\sqrt[5]{(32)^6}}=\frac{-1}{320}=-0.003$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(33)\approx 0.5+(1)(0.003-0.003)\approx 0.497$

2017 دور3 تطبيقي داخل | جد بصورة تقريبية حسب نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt[5]{31^{-1}}$

Sol: $f(x)=x^{\frac{-1}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

$let\ a=32\ ,b=31\ ,h=b-a=-1\ ,f(a)=\frac{1}{\sqrt[5]{32}}=0.5$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{5}x^{\frac{-6}{5}}=\frac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}\Rightarrow f'(a)=\frac{-1}{5\sqrt[5]{(32)^6}}=\frac{-1}{320}=-0.003$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(31)\approx 0.5+0.003\approx 0.503$

2019 د3 احيائي | لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 إلى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

$let\ a=8, b=8.06, h=b-a=8.06-8=0.06$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(a)=\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{3}$

$h\cdot f'(a)\approx(0.06)\cdot\frac{1}{3}\approx 0.02$ مقدار التغير التقريبي

2017 دور3 احيائي | جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية مساحة حلقة دائرية نصف قطرها الداخلي $(20cm)$ ونصف قطرها الخارجي $(20.3cm)$

Sol: $A(r)=\pi r^2$

$let\ a=20, b=20.3, h=b-a=0.3$

$A'(r)=2\pi r \Rightarrow A'(a)=2\pi(20)=40\pi$

$h\cdot A'(a)\approx(0.3)(40\pi)\approx 12\pi\ cm^2$ المساحة التقريبية للحلقة

2018 دور1 احيائي داخل | باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد تقريباً مناسباً لـ $\frac{1}{\sqrt[3]{28}}$

Sol: $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=27, b=28, h=b-a=28-27=1, f(a)=\frac{1}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}=0.33$

$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}=\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow f'(a)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{a^4}}=\frac{-1}{3\sqrt[3]{27^4}}=\frac{-1}{243}=-0.004$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(28)\approx 0.33+(-0.004)(1)\approx 0.326$

2018 احيائي د2 داخل | إذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{5x^2+12}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية إلى $f(1.97)$

Sol: $f(x)=\sqrt[5]{5x^2+12}=(5x^2+12)^{\frac{1}{5}}$

$let\ a=2, b=1.97, h=b-a=-0.03, f(a)=\sqrt[5]{32}=2$

$\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{5}(5x^2+12)^{\frac{-4}{5}}(10x)=\frac{2x}{\sqrt[5]{(5x^2+12)^4}} \Rightarrow f'(a)=\frac{4}{1\square}=\frac{1}{4}=0.25$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)$

$f(1.97)\approx 2+(-0.03)(0.25)\approx 2-0.0075\approx 1.9925$

2018 احيائي د2 خارج | جد القيمة التقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة للمقدار $\sqrt[3]{26}+2$

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x}+2=x^{\frac{1}{3}}+2$

$let\ a=27, b=26, h=b-a=26-27=-1, f(a)=\sqrt[3]{27}+2=5$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}=0.037$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a) \Rightarrow f(26)\approx 5-0.037\approx 4.963$

2018 احيائي دور3 داخل | لتكن $f(x)=\sqrt[3]{3x+24}$ جد قيمة $f(1.002)$ بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{3x+24}=(3x+24)^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=1\ ,b=1.002\ ,h=b-a=0.002\ ,f(a)=\sqrt[3]{27}=3$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+24)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+24)^2}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{\sqrt[3]{(27)^2}}=\frac{1}{9}=0.1$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(1.002)\approx 3+0.0002\approx 3.0002$

2019 تمهيدي تطبيقي | جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه $1.98cm$

Sol: المساحة السطحية للمكعب $A(x)=6x^2$

$let\ a=2\ ,b=1.98\ ,h=b-a=-0.02\ ,f(a)=6(2)^2=24$

$\Rightarrow A'(x)=12x\Rightarrow A'(a)=12a=12(2)=24$

$A(a+h)\approx A(a)+h\cdot A'(a)\Rightarrow A(1.98)\approx 24-0.48\approx 23.52\ cm^2$

2019 احيائي د1 داخل | أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول نصف قطر قاعدتها فإذا كان نصف القطر يساوي $(2.97cm)$ جد الحجم بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل/ نفرض أن نصف قطر قاعدتها يساوي r وارتفاعها يساوي y وسيكون $y=r$

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$v=\pi r^2y\Rightarrow v(r)=\pi r^3$

$let\ a=3\ ,b=2.97\ ,h=b-a=-0.03\ ,v(a)=\pi(3)^3=27\pi$

$\Rightarrow A'(r)=3\pi r^2\Rightarrow A'(a)=3\pi(3)^2=27\pi$

$v(a+h)\approx v(a)+h\cdot v'(a)\approx 27\pi-0.81\pi\approx 26.19\pi\ cm^3$

2019 احيائي د1 خارج | مستطيل بعداه $\sqrt[3]{28}$, $\sqrt{143}$ جد مساحته بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

1) $\sqrt{143}$

$f(x)=\sqrt{x}$

$let\ a=144\ ,b=143\ ,h=b-a=143-144=1\ ,f(a)=\sqrt{144}=12$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{144}}=\frac{1}{24}\approx 0.04$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(143)\approx 12+(-1)(0.04)\approx 11.96$

2) $\sqrt[3]{28}$

$g(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=27\ ,b=28\ ,h=b-a=28-27=1\ ,g(a)=\sqrt[3]{27}=3$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow g'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}=0.037$

$g(a+h)\approx g(a)+h\cdot g'(a)\Rightarrow g(28)\approx 3+0.037\approx 3.037$

مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه

$A=(11.96)(3.037)=36.322$

2019 احيائي د2 | جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه $(1.99cm)$

الحل/ نفرض أن المساحة السطحية (الكلية) للمكعب تساوي (A) وطول ضلعه يساوي x

بما أن الطرف الأيمن هو المعلوم فإن القانون يمثل الخطوة الأولى في الحل $A = 6x^2$

$$let\ a = 2\ , b = 1.99\ , h = b - a = -0.01\ , A(a) = 6(2)^2 = 24$$
$$\Rightarrow A'(x) = 12x \Rightarrow A'(a) = 24$$
$$A(a+h) \approx A(a) + h \cdot A'(a) \approx 24 - 0.24 \approx 23.76\ cm^2$$

2020 احيائي د1 | كرة حجمها $\frac{260\pi}{3}\ cm^3$ جد طول نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

Sol: $v = \frac{4\pi}{3}r^3 \Rightarrow \frac{260\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}r^3 \Rightarrow r^3 = 65 \Rightarrow r = \sqrt[3]{65}$

$$r(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$
$$let\ a = 64\ , b = 65\ , h = b - a = 1\ , r(a) = \sqrt[3]{64} = 4$$
$$\Rightarrow r'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow r'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48} = 0.0208$$
$$r(a+h) \approx r(a) + h \cdot r'(a)$$
$$\Rightarrow r(65) \approx 4 + (0.0208)(1) \approx 4 + 0.0208 \approx 4.0208$$

ملاحظة/ إذا كان ناتج القسمة $r'(x) = \frac{1}{48} = 0.021$ ويكون الناتج النهائي 4.021 تعد الإجابة صحيحة وهو مقارب لسؤال التمارين باختلاف القيمة العددية لحجم الكرة فقط.

2020 احيائي د2 داخل | باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $\sqrt[5]{(0.98)^3} + 2$

Sol: $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + 2 = x^{\frac{3}{5}} + 2$

$$let\ a = 1, b = 0.98\ , h = b - a = -0.02\ , f(a) = \sqrt[5]{(1)^3} + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{3}{5\sqrt[5]{(1)^2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \approx 3 - 0.012 \approx 2.988$$

الأسئلة الوزارية الخاصة بتمارين التقريب

س2/ جد تقريباً مناسباً لكل مما يأتي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة:

2011 خارج – 2014 تمهيدي

c- $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Sol: $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{-1}{3}}$

$let\ a=8\ ,b=9\ ,h=b-a=9-8=1\ ,f(a)=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=0.5$

$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{x^4}}\Rightarrow f'(a)=\frac{-1}{\sqrt[3]{a^4}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{8^4}}=\frac{-1}{48}=-0.0208$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(9)\approx 0.5+(-0.0208)(1)\approx 0.5-0.0208\approx 0.4792$

2012 دور ثاني – 2020 تطبيقي د2 تكميلي

e- $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.5}$

Sol: $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$let\ a=0.49\ ,b=0.50\ ,h=b-a=0.50-0.49=0.01\ ,f(a)=\sqrt{0.49}=0.7$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{0.49}}=\frac{1}{1.4}=0.7142$

$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(0.5)\approx 0.7+(0.7142)(0.01)\approx 0.7-0.0071\approx 0.7071$

س3/ كرة نصف قطرها $6cm$ طليت بطلاء سمكه $0.1cm$ جد كمية الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

2014 دور اول

الحل/ حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

$v(r)=\frac{4\pi}{3}r^3$

$let\ a=6\ ,b=6.1\ ,h=b-a=6.1-6=0.1$

$v'(r)=4\pi r^2\Rightarrow v'(a)=4\pi a^2=4\pi(6)^2=144\pi$

$h\cdot v'(a)\Rightarrow v(6.1)\approx(0.1)(144\pi)\approx 14.4\pi\ cm^3$ حجم (كمية) الطلاء

س5/ كرة حجمها $48\pi\ cm^3$ جد طول نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

2020 تطبيقي د3

الحل/

$V=\frac{4\pi}{3}r^3\Rightarrow 48\pi=\frac{4\pi}{3}r^3\Rightarrow 63=r^3\Rightarrow r=\sqrt[3]{63}$

$r(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$let\ a=64\ ,b=63\ ,h=b-a=63-64=-1\ ,r(a)=\sqrt[3]{64}=4$

$\Rightarrow r'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow r'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{48}=0.0208$

$r(a+h)\approx r(a)+h\cdot r'(a)\Rightarrow r(63)\approx 4+(0.0208)(-1)\approx 4-0.0208\approx 3.9792$

س6/ مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي $2.98cm$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

2020 تطبيقي د2 داخل

الحل/ حجم المخروط = $\frac{1}{2}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{\pi}{3}$ (نصف القطر)^2 × الارتفاع

$$v=\frac{\pi}{3}r^2y\ ,\because y=2r\Rightarrow r=\frac{1}{2}y\Rightarrow v(y)=\frac{\pi}{12}y^3$$

$$let\ a=3\ ,b=2.98\ ,h=b-a=2.98-3=-0.02\ ,v(a)=\frac{\pi}{12}(3)^3=\frac{9}{4}\pi=2.25\pi$$

$$v'(y)=\frac{\pi}{4}y^2\Rightarrow v'(a)=\frac{\pi}{4}a^2=\frac{\pi}{4}(3)^2=2.25\pi$$

$$v(a+h)\approx v(a)+h\cdot v'(a)\Rightarrow v(2.98)\approx 2.25\pi+(2.25\pi)(-0.02)$$
$$\approx 2.250\pi-0.045\pi\approx 2.205\pi\ cm^3$$

ملاحظة: سوف يصبح قانون الحجم $V=\frac{2\pi}{3}r^3$ إذا علم نصف القطر بدلاً من الارتفاع كما يمكن أن نقسم الارتفاع على العدد 2 لنجعل السؤال بدلالة نصف القطر.. أرجو الانتباه!!!

تمارين عامة

س9/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $2.97cm$

2018 تطبيقي د3 داخل

الحل/ نفرض أن طول ضلع القاعدة x، والارتفاع h حيث أن $h=3x$

حجم متوازي المستطيلات V = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V=x^2h\Rightarrow V(x)=x^2\cdot 3x\Rightarrow V(x)=3x^3$$

$$let\ a=3\ ,b=2.97\ ,h=b-a=-0.03\ ,V(a)=3(3)^3=81$$

$$\Rightarrow V'(x)=9x^2\Rightarrow V'(a)=81$$

$$V'(a+h)\approx V(a)+h\cdot v''(a)\approx 81-0.03(81)\approx 81-2.43=78.57$$

س10/ مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته إذا كان رتفاعه $10cm$

الحل/ نفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط (r)

2013 دور2
1999 دور1

$$v=\frac{\pi}{3}r^2h\Rightarrow 210\pi=\frac{\pi}{3}r^2(10)\Rightarrow r^2=63\Rightarrow r=\sqrt{63}$$

$$r(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$let\ a=64\ ,b=63\ ,h=b-\square=63-64=-1\ ,r(a)=\sqrt{64}=8$$

$$\Rightarrow r'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow r'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{64}}=\frac{1}{16}=0.0625$$

$$r(a+h)\approx r(a)+h\cdot r'(a)\Rightarrow r(63)\approx 8-(0.0625)\approx 7.9375$$

س11/ إذا كان $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية $f(1.01)$

2013 دور1 – 2018 د1 تطبيقي خارج

Sol: $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}=(31x+1)^{\frac{1}{5}}$

$let\ a=1\ ,b=1.01\ ,h=b-a=0.01\ ,f(a)=\sqrt[5]{32}=2$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31)=\frac{31}{5\sqrt[5]{(31x+1)^4}}$$

$$f'(a)=\frac{31}{5\sqrt[5]{(31+1)^4}}=\frac{31}{80}=0.3875\approx 0.39$$

$$f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)\Rightarrow f(1.01)\approx 2+(0.0039)\approx 2.0039$$

أسئلة الامتحان الشامل الخاص (تطبيقات التفاضل – المشتقات ذات الرتب العليا)

س1/ إذا كان $y=x+\tan x$ أثبت أن $\cos^2 x\,y''-2y+2x=0$

س2/ إذا كان $2xy+y+1=0$ أثبت أن $y^{(3)}-48y^4=0$

س3/ إذا كانت $y=3\cos 2x+2\sin 2x$ أثبت أن $y^{(4)}+4y''=0$

س4/ إذا كانت $3x^2+3y^2=6$ أثبت أن $y'''=\frac{-8x}{3y^5}$

س5/ إذا كانت $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ أثبت أن $y^{(4)}+16y''=0$

أسئلة المتحان الخاص بالمعدلات الزمنية 2020 النموذج الأول

س1/ جد نقطة تتحرك على المنحني $y^2=x^2-2x$ عندها يكون المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن يساوي ضعف المعدل الزمني لتغير x بالنسبة للزمن.

س2/ رجلان البعد بينهما $50m$ تحرك أحدهما نحو الشمال فكوّن زاوية حادة θ مع الرجل الآخر وهي تتزايد بمعدل $0.1\ rad/s$ جد:

1- معدل تغير المسافة بين الرجلين عندما تكون الزاوية $\theta=\frac{\pi}{4}$

2- معدل تغير المسافة بين الرجلين عندما يكون البعد بينهما $130m$

س3/ يتساقط رمل من ساعة رملية مشكلاً كومة مخروطية الشكل ارتفاعها دائماً يساوي ثلاثة أرباع طول نصف قطر قاعدتها ففي اللحظة التي يكون فيها نصف قطر قاعدتها $6cm$ ومعدل ازدياد ارتفاعها $\frac{9}{2}\ cm/s$ جد:

1- معدل ازدياد حجمها.

2- معدل ازدياد مساحة دائرة قاعدتها.

س4/ خزان مملوء بالماء على شكل مكعب طول حرفه $20cm$ يسترب منه الماء بمعدل $\frac{80}{3}\ cm^3/s$ جد معدل انخفاض الماء في الخزان ثم جد عدد الدقائق اللازمة لتفريغه كلياً.

س5/ جهازان كهربائيان مربوطان إلى مقاومتين R_1 , R_2 على التوازي حيث أن وحدة المقاومة تقاس بالأوم Ω وكانت المقاومة الكلية R معطاة بالمعادلة التالية: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$

فإذا كانت قيمة المقاومة R_1 تزداد بمعدل $(2\ \Omega/min)$ وقيمة المقاومة R_2 تتناقص بمعدل $(0.25\ \Omega/min)$

فما هو معدل التغير في المقاومة الكلية R عندما تكون $R_1=12\Omega$, $R_2=6\Omega$

س6/ سلم طوله $13m$ يتكئ بطرفه الأسفل على أرض أفقية وبطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بحيث أن الزاوية بين السلم والأرض تتناقص بمعدل $\frac{1}{3}rad/s$ جد كلاً من معدل اقتراب الطرف الأعلى من الأرض ومعدل ابتعاد الطرف الأسفل عن الحائط عندما يكون الطرف الأسفل على بعد $5m$ من الحائط.

س7/ قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوره المرافق ينطبق على محور الصادات وطول محوره الحقيقي 12 وحدة وطول محوره التخيلي 6 وحدات، فإذا كانت هناك نقطة تتحرك على القط الزائد بحيث أن معدل ازدياد الاحداثي x لها يساوي $20\ cm/s$ جد معدل تغير الاحداثي y بالنسبة للزمن عند النقطة $(10,4)$.

س8/ نقطة تتحرك على منحني القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(0,\frac{1}{4})$، جد احداثي تلك النقطة في اللحظة التي يتساوى فيها المعدلان الزمنيان لتغير كل من x,y ، وإذا علمت أن $x=\sin t$, $y=\sin^2 t$

جد المعدل الزمني لتغير x في تلك اللحظة.

س9/ مستطيل طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه دائماً، تتزايد مساحته بمعدل $3cm^2/s$ فعندما يكون طوله يساوي $12cm$ جد كلاً من:

1) معدل ازدياد محيطه.
2) معدل ازدياد طول قطره.

س10/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه ثابت ويساوي $128cm^3$ فإذا ازداد طول ضلع قاعدته بمعدل $0.5\ cm/s$ جد معدل نقصان ارتفاعه في اللحظة التي يكون فيها ثلاثة ارباع ارتفاعه يساوي $6cm$

س11/ مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل، يتسرب منه الماء بمعدل $5cm^3/s$ فإذا كان كلاً من قطر المرشح وارتفاعه يساوي $20cm$ جد معدل انخفاض الماء في المرشح عندما يكون بُعد سطح الماء عن قاعدة المرشح $5cm$.

س12/ يمسك صبيان A,B بطائرة ورقية تشدها الريح بحركة مائلة وكان معدل ازدياد طول الخيط يساوي $6\sqrt{5}\ u/s$ وبدأ الصبي B بالركض أفقيا بسرعة أفقية مقدارها $6\ u/s$ جد معدل ارتفاع الطائرة بعد مرور خمسة ثواني وفي اتلك اللحظة بدأت الطائرة تطير في مسار أفقي وارتفاع ثابت وسرعتها تساوي سرعة الصبي B جد سرعة شد الخيط عندما تكون الطائرة على بعد $100m$ من الصبي A.

س13/ إناء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $30cm^3$ وطول قاعدته $5cm$ وارتفاعه يساوي $2cm$ سكب فيه الماء بمعدل $4cm^3/s$ جد معدل ارتفاع الماء في الإناء.

أسئلة المتحان الخاص بالمعدلات الزمنية 2020 النموذج الثاني

س1/ صفيحة مربعة الشكل تتمدد بالحرارة بحيث تحافظ على شكلها مربعاً فإذا ازدادت مساحتها بمعدل $2cm^2/s$ جد معدل ازدياد محيطها عندما يكون طول ضلعها $4cm$.

س2/ مصدر ضوئي موضوع على الأرض يبعد $10m$ عن حائط ، تسير دراجة ارتفاعها $1.5m$ مبتعدة عن مصدر الضوء بسرعة $2\ m/s$ ما معدل تغير ارتفاع ظل الدراجة على الحائط عندما تكون على بعد $4m$ عن الحائط.

س3/ لتكن M نقطة تتحرك على منحني القطع المكافئ $x = y^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ يساوي ثلثي معدل تغير الاحداثي السيني للنقطة M.

س4/ طريقان متعامدان يلتقيان بنقطة A توجد سيطرة تابعة لقواتنا الأمنية وقطعات الحشد الشعبي المقدس على أحد الطريقين وتبعد عن A مسافة $60m$ وشوهدت سيارة تابعة إلى جرذان داعش انطلقت من نقطة A وتسير على الطريق الآخر بسرعة $20m/min$ وبعد أربعة دقائق من بدء الحركة تم معالجتها بنيران قواتنا الأمنية البطلة جد معدل ابتعاد السيارة عن السيطرة في تلك اللحظة.

س5/ شارع مستطيل الشكل طول أحد بعديه ثابتاً يساوي $3m$ يراد تبليطه فإذا ازداد طول البعد الآخر بسرعة $2m/min$ فعندما يصبح الشارع مربعاً جد كلا من:

1) معدل ازدياد مساحته.

2) معدل ازدياد طول قطره.

س6/ مشرح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل طول قطر قاعدته يساوي $12cm$ وارتفاعه يساوي $18cm$ يتسرب منه الماء بسرعة $4cm^3/s$ جد معدل انخفاض الماء في المرشح عندما يكون نصف قطر الماء $2cm$.

س7/ جد مجموعة النقاط التي تنتمي إلى الدائرة $x^2 + y^2 + 4y - 8x = 108$ والتي يكون عندها معدل تغير x بالنسبة للزمن يساوي معدل تغير y بالنسبة للزمن.

س8/ سلم يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بسرعة $3m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي في اللحظة التي تكون فيها الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{4}$ ثم جد معدل تغير مساحة المثلث في تلك اللحظة عندما يكون بعد الطرف السفلي عن الحائط $3m$.

س9/ مكعب صلد طول حرفه $4cm$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعباً ، جد معدل نقصان حجم الجليد عندما يكون معدل نقصان سمك الجليد فيه $0.01cm/s$ وكان سمك الجليد في تلك اللحظة يساوي $2cm$.

س10/ يبتعد رجل طوله $160cm$ بسرعة $15m/min$ عن مصدر ضوئي موضوع أعلى برج ارتفاعه $8m$ جد معدل تغير ظل الرجل ثم جد معدل تغير طول ظل رأس الرجل بالنسبة للقاعدة.

س11/ جد نقطة أو أكثر تنتمي إلى الدائرة $x^2 + y^2 - 4y = 4$ والتي يكون عندها معدل تغير x بالنسبة للزمن يساوي معدل تغير y بالنسبة للزمن.

س12/ انطلقت طائرة من مطار بغداد الدولي عند الساعة الخامسة صباحاً باتجاه الشرق بسرعة $200km/h$ وبعد ساعتين انطلقت طائرة أخرى باتجاه الشمال بسرعة $300km/h$، جد معدل ابتعاد الطائرتين عند الساعة التاسعة صباحاً.

س13/ قطع ناقص مساحته ثابتة تساوي $60\pi\ cm^2$ يتمدد طول محوره الكبير بمعدل $\frac{1}{3}cm/s$ بحيث تبقى مساحته ثابتة جد معدل تغير محيطه عندما يكون طول محوره الكبير $20cm$.

أسئلة الامتحان الخاص والمتعلقة بمبرهنة رول

س1/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-3\ ,x\in[1,3]$$

س2/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=x^3-2x^2+x\ ,x\in[0,1]$$

س3/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\sin 2x\ ,x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

س4/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\sin^2 x\ ,x\in[\square,\pi]$$

س5/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\sqrt{16-x^2}\ ,x\in[-4,4]$$

س6/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=(x-3)^4\ ,x\in[-1,7]$$

س7/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ,x\le 1\\ 4x-1 & ,x>1\end{cases}\ ,x\in[-1,2]$$

س8/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\ ,x\in[\frac{1}{3},3]$$

س9/ ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=2\cos x-\cos 2x\ ,x\in[0,2\pi]$$

س10/ إذا كانت $f(x)=2x^3-ax^2-bx-5$ تحقق مبرهنة رول على $[-2,3]$ وكانت $c=1\in(-2,3)$ جد قيمتي $a,b\in R$

أسئلة الامتحان الخاص والمتعلقة بمبرهنة القيمة المتوسطة

س1/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=2+\frac{1}{\sqrt{3}} \quad ,x\in[0,1]$$

س2/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2} \quad ,x\in[-2,-\frac{1}{2}]$$

س3/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2} \quad ,x\in[-6,10]$$

س4/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \quad ,x\in[0,2]$$

س5/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\frac{4}{x+2} \quad ,x\in[-1,2]$$

س6/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^4} \quad ,x\in[-2,6]$$

س7/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=x^2-5x+7 \quad ,x\in[1,3]$$

س8/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة التالية وإن تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\sin 2x-2\cos x \quad ,x\in[0,2\pi]$$

س9/ إذا كانت $f(x)=x^2-2x+5$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على $[a,4]$ فإذا كانت $c=\frac{5}{2}\in(a,4)$ جد قيمة $a\in R$

س10/ إذا كانت $f(x)=x^2-bx$ دالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على $[-1,7]$ وكانت $f'(c)=8$ جد قيمتي $b,c\in R$

أسئلة الامتحان الخاص والمتعلقة بموضوع التقريب

س1/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد تقريبا مناسباً لكل مما يأتي:

$(15+\sqrt[4]{15})\ ,(\sqrt[10]{1023})\ ,(\frac{2}{(99)^2})\ ,(\sqrt[5]{\frac{1}{33}})\ ,2+3(1.01)^{\frac{1}{3}}\ ,(1.01)^5$

$(\frac{1}{\sqrt{37}})\ ,(\sqrt{65}+\sqrt[3]{65})\ ,(-\frac{5}{1003})\ ,(9.1)^4+\sqrt{9.1}\ ,(\sqrt[5]{0.0003})$

س2/ جد بصورة تقريبية المساحة الجانبية لمكعب طول حرفه $1.98cm$

س3/ لتكن $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2}$ حيث $x>0$ جد تقريباً مناسباً لـ $f(2.001)$ باستخدام التفاضلات.

س4/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه يساوي ثلاثة أمثال طول قاعدته جد حجمه التقريبي عندما يكون طول قاعدته (3.01cm)

س5/ مكعب من الخشب طول ضلعه $3cm$ طلي بطلاء سمكه $0.03 m$ احسب الحجم التقريبي له بعد الطلاء ثم احسب مقدار التغير في مساحته السطحية باستخدام التفاضلات.

س6/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد طول قطر كرة حجمها $\frac{260\pi}{3}cm^3$

س7/ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها، احسب بصورة تقريبية مساحتها السطحية إذا علمت أن طول قطرها يساوي $3.98cm$

س8/ إذا كانت $f(x)=\sqrt[3]{x}\ ,g(x)=3x+5$ جد بصورة تقريبية $(fog)(1.01)$

س9/ صورة مربعة الشكل طول ضلعها $8cm$ محاطة بهامش عرضه $0.04cm$ بحيث يبقى الشكل مربعاً، جد مساحة الهامش بصورة تقريبية.

س10/ مخروط دائري قائم طول مولده (ارتفاعه الجانبي) يساوي طول قطره فإذا كانت مساحته الجانبية تساوي $(96\pi\ cm)$ جد طول نصف قطر قاعدته بصورة تقريبية.

س11/ مستطيل بعداه $\sqrt{10}cm\ ,\sqrt[3]{25}cm$ جد مساحته بصورة تقريبية.

الأسئلة الوزارية الخاصة بالنهايات وإيجاد قيم الثوابت

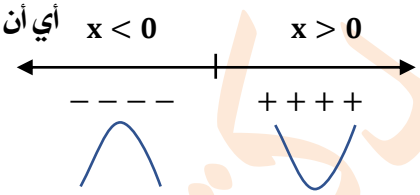
2005 د1 | جد نقطة الانقلاب للمنحني $f(x)=(x-2)(x+1)^2$ ثم جد معادلة المماس له عند نقطة انقلابه؟

Sol: $f(x)=(x-2)(x^2+2x+1)$

$f'(x)=(x-2)(2x+2)+(x^2+2x+1)(1)$

$=2x^2+2x-4x-4+x^2+2x+1=3x^2-3$

$f''(x)=6x \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=-2 \Rightarrow (0,-2)$ نقطة الانقلاب مرشحة

إشارة $f''(x)$ 

أي أن النقطة $(0,-2)$ هي نقطة انقلاب وتماس

$m=f'(x)=f'(0)=-3$

معادلة المماس $(y-y_1)=m(x-x_1)$

$\Rightarrow (y+2)=-3(x-0) \Rightarrow 3x+y+2=0$

2003 دور1 | لتكن $f(x)=x^3+3x^2-9x-6$ ، جد معادلة المماس المنحني عند نقطة انقلابه.

H.W واجب بيتي

Ans: $12x+y+7=0$ معادلة المماس المطلوبة

مثال/ جد النهايات وبين نوعها باستخدام المشتقة الثانية:

a- $f(x)=6x-3x^2-1$

Sol: $f'(x)=6-6x \Rightarrow 6-6x=0 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1$

$f(1)=6-3-1=2 \Rightarrow (1,2)$ نقطة حرجة

$f''(x)=-6<0 \Rightarrow (1.2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

2018 تطبيقي د1 خارج

2004 دور1/ إذا كان منحني الدالة $f(x)=2ax^2+b$ وكانت $a \in \{3,1,0,-1\}$ تمتلك نهاية عظمة محلية، جد قيمة a.

Sol: $f'(x)=4a \Rightarrow f''(x)=4a$

$a=-1 \Rightarrow f''(x)=-4<0$ تمتلك نهاية عظمى محلية

1998 دور1/ إذا كانت $(1,6)$ نهاية عظمى محلية لمنحني الدالة $f(x)=ax^2+(x-b)^2$ ، جد قيمتي $a,b \in R$.

Sol: $f(1)=6 \Rightarrow 6=a+(1-b)^2$

$\Rightarrow 6=a+1-2b+b^2 \Rightarrow a-2b+b^2=5 \ldots\ldots(1$

$f'(1)=0 \Rightarrow f'(x)=2ax+2(x-b) \Rightarrow [2a+2(1-b)=0] \div 2$

$a=b-1 \ldots\ldots(2 \ in \ (1)$

$b-1-2b+b^2=5 \Rightarrow b^2-b-6=0 \Rightarrow (b-3)(b+2)=0$

$b=3 \Rightarrow a=3-1=2 \, , b=-2 \Rightarrow a=-2-1=-3$

$f''(x)=2a+2 \, , a=2 \Rightarrow f''(x)=6>0 \, , a=-3 \Rightarrow f''(x)=-4<0$ يهمل

2009 دور1 – 2020 احيائي د1 | إذا كانت $(1,-2)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=ax^2+(x+b)^2$ ، جد قيمتي $a,b\in R^+$ ثم بين نوع النقطة الحرجة.

Sol: $f(1)=-2\Rightarrow -2=a-(1+b)^2\Rightarrow -2=a-(1+2b+b^2)$

$-2=a-1-2b-b^2\Rightarrow a-2b-b^2=-1\ldots\ldots(1$

$f'(1)=0\Rightarrow f'(x)=2ax-2(x+b)\Rightarrow [2ax-2(1+b)=0]\div 2$

$a=b+1\ldots\ldots(2\ in\ (1)$

$b+1-2b-b^2=-1\Rightarrow b^2+b-2=0\Rightarrow (b+2)(b-1)=0$

$either\ b=-2$ يهمل $or\ b=1\Rightarrow a=1+1=2$

$f''(x)=2a-2\ ,a=2\Rightarrow\ f''(x)=2>0\ \Rightarrow (1,-$ نهاية صغرى محلية

1997 دور2 – 2007 تمهيدي | إذا كانت $f(x)=3+ax+bx^2$ تمتلك نقطة حرجة $(1,4)$ ، جد قيمتي $a\ ,b$ الحقيقيتان ثم بين نوع النقطة الحرجة.

Ans: $b=-1\Rightarrow a=2$

$f''(x)\ =\ 2b=-2\ <0$ النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية

واجب بيتي H.W

2005 دور1 | لتكن $f(x)=x^3+bx^2+cx+1$ وكانت $(-1,2)$ نهاية عظمى محلية للدالة، جد قيمتي $b,c\in R$ وهل توجد نقطة انقلاب للدالة.

Sol: $f(-1)=2\ ,f'(-1)=0$ خطة عمل النقطة الحرجة

$f(x)=x^3+bx^2+cx+1\Rightarrow 2=-1+b+c+1\Rightarrow b-c=2\ldots\ldots(1$

$f'(x)=3x^2+2bx+c\Rightarrow 0=3-2b+c\Rightarrow c=2b-3\ldots\ldots(2\ \ in\ (1)$

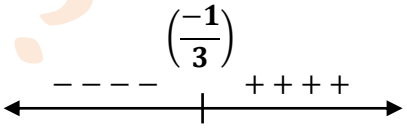
$b-(2b-3)=2\Rightarrow b-2b+3=2\Rightarrow b=1\Rightarrow c=2-3=-1$

$f(x)=x^3+x^2-x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2+2x-1$

$f''(x)=6x+2\Rightarrow 6x+2=0\Rightarrow x=\dfrac{-1}{3}$

$f(x)=\dfrac{-1}{27}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{-1+3+9+27}{27}=\dfrac{38}{27}\Rightarrow\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{38}{27}\right)$ نقطة انقلاب مرشحة

إشارة المشتقة الثانية



نقطة انقلاب $\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{38}{27}\right)$

مثال/ إذا علمت أن للدالة $f(x)=ax^3+bx^2$ نقطة انقلاب $(-2,4)$ جد قيمتي a,b

Sol: $f(-2)=4 \Rightarrow [4=-8a+4b] \div 4 \Rightarrow -2a+b=1 \dots\dots(1$

$f'(x)=3ax^2+2bx\,, f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(-2)=0$

$-12a+2b=0 \dots\dots(2 \Rightarrow b=6a \; in \; (1)$

$-2a+6a=1 \Rightarrow 4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4} \Rightarrow b=(6)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

2007 دور1 : إذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2$ جد قيمتي $a,b \in R$ إذا علمت أن للمنحني نقطة انقلاب $(1,2)$

Ans: $a=-1, b=3$ واجب بيتي H.W

2018 احيائي د3 داخل | إذا كان للدالة $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ نقطة انقلاب $(1,8)$ جد قيمتي $a,b \in R$

Sol: $f(x)=8, f''(1)=0$

$f(x)=x^3-ax^2+bx+3 \Rightarrow 8=1-a+b+3 \Rightarrow 4=-a+b \dots\dots(1$

$f'(x)=3x^2-2ax+b$

$f''(x)=6x-2a \Rightarrow$ ⍰ $=6-2a \Rightarrow a=3\;[in(1)] \Rightarrow 4=-3+b \Rightarrow b=7$

مثال | إذا علمت أن للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ونهاية صغرى محلية عند $x=2$ جد قيمتي a,b ثم جد نقطة الانقلاب إن وجدت.

Sol: $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0\,, f'(2)=0$

$3-2a+b=0 \dots\dots(1$

$12+4a+b=0 \dots\dots(2 \Rightarrow b=-12-4a \; in(1)$

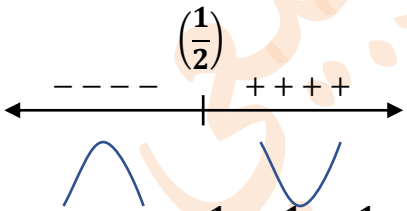
$3-2a-12-a4=0 \Rightarrow -6a=9 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

$b=-12-4(-\frac{3}{2})=-12+6=-6$

$y=x^3-\frac{3}{x}x^2-6x \Rightarrow y'=3x^2-3x-6$

$\Rightarrow y''=6x-3 \Rightarrow 6x-3=0$

2012 دور1 – 2013 دور2
2008 خارج – 2015 نازحين د1
2018 د3 تطبيقي داخل
2019 د3 تطبيقي داخل
2020 تطبيقي د1 خارج



إشارة $f''(x)$

نقطة انقلاب مرشحة $\left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$

$6x=3 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\,, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-3=\frac{-26}{8}=\frac{-13}{4}$

الدالة محدبة بالفترة $\{x: x \in R; x<\frac{1}{2}\}$ ، الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x>\frac{1}{2}\}$

نقطة انقلاب $(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4})$

2001 دور1 | إذا علمت أن للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-2$ ونهاية صغرى محلية عند $x=4$ جد قيمتي a,b.

Ans: $a=-3\ ,b=-24$ واجب بيتي H.W

2006 تمهيدي – 2008 دور2 / إذا علمت إن للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نهاية صغرى محلية عند $x=4$ ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمتي $a,b\in R$

Sol: $f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f'(4)=0$
$f''(x)=6x+2a\Rightarrow f''(1)=0$
$48+8a+b=0\ldots\ldots(1$
$6+2a=0\Rightarrow 2a=-6\rightarrow a=-3\quad in(1)$
$48-24+b=0\Rightarrow b=-24$

مثال/ إذا كانت $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ حيث $a\in R\ ,x\neq 0$:
2017 د2 احيائي داخل
1- جد قيمة a إذا كانت الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$

Sol: $f(x)=x^2+ax^{-1}$
$f'(x)=2x-ax^{-2}\Rightarrow f''(x)=2+2ax^{-3}=2+\dfrac{2a}{x^3}$
$f''(1)=0\Rightarrow 2+2a=0\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1$

2008 د1 – 2015 د3
2- بيّن أن الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة a

Sol: $f'(x)=2x-ax^{-2}\Rightarrow 2x-ax^{-2}=0\Rightarrow 2x-\frac{a}{x^2}=0\Rightarrow 2x=\frac{a}{x^2}$
$2x^3=a\Rightarrow x^3=\frac{a}{2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$
$f''(x)=2+2ax^{-3}=2+\frac{2a}{x^3}$
$f''(\sqrt[3]{\frac{a}{2}})=2+\frac{2a}{\frac{a}{2}}=2+(2a)(\frac{2}{a})=2+4=6>0$

∴ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية ولا يمكن أن تمتلك نهاية عظمى محلية

ملاحظة: إذا لم يذكر في المطلب الثاني عبارة مهما كانت قيمة a ، فتعوض قيمة a المستخرجة من المطلب الأول في الدالة الأصلية قبل الاشتقاق للحصول على نفس الجواب.

2009 د2 | إذا كان المستقيم $y+9x=28$ يمس المنحني $f(x)=ax^3+bx^2+1$ عند $(3,1)$ جد قيم $a,b\in R$

Sol: $m=\frac{-a}{b}=\frac{-9}{1}=-9$ ميل المستقيم

∵ $(3,1)$ نقطة تماس
$f(3)=1\ ,f'(3)=m$
$27a+9b+1=1\Rightarrow 34+b=0\Rightarrow b=-3a\ldots\ldots(1$
$f'(x)=3ax^2+2bx\Rightarrow f'(3)=27a+6b=-9\ldots\ldots(2$
$7a-18a=-9\Rightarrow 9a=-9\Rightarrow a=-1\Rightarrow b=3$

2014 د1 / إذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعر لكل $x<1$ ومحدب لكل $x>1$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند $x=3$ جد قيم $a,b,c\in R$

Sol: $x=3\Rightarrow y+27=28\Rightarrow y=1\Rightarrow (3,1)$ نقطة تماس

$f(3)=1\Rightarrow 27a+9b+c=1\ldots\ldots(1$, $m=\frac{-a}{b}=\frac{-9}{1}=-9$ ميل المستقيم

$f'(x)=3ax^2+2bx\Rightarrow f'(3)=27a+6b$

$f'(3)=m\Rightarrow 27a+6b=-9\ldots\ldots(2$

$f''(x)=6ax+2b$, $f''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0\ldots\ldots(3$

$2b=-6a\Rightarrow b=-3a\ in(2)$

$27a+(6)(-3a)=-9\Rightarrow 27a-18a=-9\Rightarrow 9a=-9\Rightarrow a=-1$

$b=(-3)(-1)=3$ تعوض في معادلة (1) $\Rightarrow -27+27+c=1\Rightarrow c=1$

2017 احيائي د1 داخل – 2018 احيائي د2 خارج – 2019 تطبيقي د2 – 2020 تطبيقي د1 | إذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعر لكل $x<1$ ومحدب لكل $x>1$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$ جد قيم $a,b,c\in R$

تلميح: يمكنك عزيزي الطالب ملاحظة أن إعطاء نقطة التماس كاملة سيختصر لك خطوة واحدة في بداية الحل عن السؤال السابق ويبقى باقي الحل على حاله.

2000 د2 | إذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+1$ مقعر لكل $x<1$ ومحدب لكل $x>1$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند $x=3$ جد قيم $a,b,c\in R$

تلميح: في هذا السؤال يمكن حله بدون الاستفادة من نقطة الانقلاب أي من خلال المعادلتين 1, 2 فقط وإذا أضيف مجهول آخر للسؤال فيكون $f(x)=ax^3+bx^2+c$ فيجب الاستفادة من المعادلات الثلاث معاً.

مثال/ إذا كانت $f(x)=a+8x-x^2$ تمتلك نهاية عظمى محلية قيمتها (18) جد قيمة a.

Sol: $y=18$, $f'(x)=8-2x\Rightarrow 8-2x=0\Rightarrow x=4$

نقطة النهاية العظمى المحلية $(4,18)$

$(4,18)\in f(x)\Rightarrow 18=a+32-16\Rightarrow a=2$

2018 احيائي د2 داخل | إذا كانت للمنحني $f(x)=3x-x^3+c$ نقطة نهاية عظمى محلية تنتمي إلى محور السينات جد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه.

الحل/ أي نقطة تقع على محور السينات يكون فيها $y=0$

$f'(x)=3-3x^2\Rightarrow 3-3x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\mp 1$

$f''(x)=-6x\Rightarrow f''(1)=-6<0$ عظمى , $f''(-1)=6>0$ (تهمل) صغرى

$(1,0)$ نقطة النهاية العظمى المحلية $\in f(x)\Rightarrow 0=3-1+c\Rightarrow c=-2$

$f(x)=3x-x^3-2\Rightarrow f'(x)=3-3x^2\Rightarrow f''(x)=-6x=0$

$\Rightarrow x=0$, $f(0)=-2\Rightarrow$ نقطة انقلاب وتماس $\Rightarrow m=f'(0)=3$ ميل المماس للمنحني

معادلة المماس $(y-y_1)=m(x-x_1)\Rightarrow(y+2)=3(x-0)\Rightarrow 3x-y-2=0$

1999 دور2/ إذا كانت $f(x)=x^3-bx^2+cx$ تمر بالنقطة $(-2,-2)$ وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمتي $b,c\in R$

Sol: $f(-2)=-2\Rightarrow -8-4b-2c=-2$ ... ... (1

$f'(x)=3x^2-2bx+c\,,f''(x)=6x-2b$

$\because f''(1)=0\Rightarrow 6-2b=0\Rightarrow 2b=6\Rightarrow b=3\ \ in(1)$

$-8-12-2c=-2\Rightarrow -2c=19\Rightarrow c=-9$

2020 تطبيقي د2 داخل – 2020 احيائي د3 – 2020 احيائي د1 خارج

2017 د2 احيائي داخل – 2015 د2 خارج – 2015 د2 داخل – 2019 احيائي د1 داخل

إذا كانت للدالة $f(x)=ax^3+3x^2+c$ نهاية عظمى محلية تساوي (8) ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمتي $a,c\in R$

Sol: $y=8\Rightarrow f'(x)=3ax^2+6x\Rightarrow 3ax^2+6x=0$ ... ... (1

$f''(x)=6ax+6\Rightarrow f''(1)=0\Rightarrow 6a+6=0\Rightarrow 6a=-6\Rightarrow a=-1\ \ in(1)$

$-3x^2+6x=0\Rightarrow -3x(x-2)=0\Rightarrow x=0\ OR\ x=2$

$f''(x)=-6x+6\Rightarrow f''(0)=6>0\,,f''(2)=-12+6=-6<0$

نقطة النهاية العظمى المحلية $(2,8)$

$\Rightarrow f(2)=8\Rightarrow -8+12+c=8\Rightarrow c=4$

2004 د2 | جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة $(1,4)$ ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة.

الحل/ بما أن النقطة تقع في الربع الأول وبؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات فإن معادلته

معادلة القطع المكافئ $y^2=4px\Rightarrow 16=4p\Rightarrow p=4\Rightarrow y^2=16x$

نقطة التماس $(1,4)$ ، ميل المماس للمنحني $2yy'=16\Rightarrow y'=\frac{8}{y}\Rightarrow m=\frac{8}{4}=2$

عزيزي الطالب.. معادلة المماس $(y-y_1)=m(x-x_1)\Rightarrow(y-4)=2(x-1)$

2007 خارج القطر | جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته نقطة الانقلاب للدالة $f(x)=(x-1)^3$

Sol: $f(x)=(x-1)^3\Rightarrow f'(x)=3(x-1)^2\Rightarrow f''(x)=6(x-1)$

$6(x-1)=0\Rightarrow x=1$

$f(x)=0\Rightarrow (1,0)$ نقطة الانقلاب وهي بؤرة القطع المكافئ

$p=1\Rightarrow y^2=4px\Rightarrow y^2=4x$ معادلة القطع المكافئ

2017 د3 احيائي داخل – 2020 تطبيقي د3 | جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه نقطة انقلاب الدالة $f(x)=(x+2)(x-1)^2$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة طول

Sol: $f(x)=(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$

$f'(x)=(x+2)(2x-2)+(x^2-2x+1)(1)$

$=2x^2-2x+4x-4+x^2-2x+1=3x^2-3$

$f''(x)=6x\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0$

نقطة الانقلاب والتي هي إحدى بؤرتي القطع الناقص $f(0)=2 \Rightarrow (0,2)$

بؤرتي القطع الناقص $(0,\mp 2) \Rightarrow a=6\ , a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 26=b^2+4 \Rightarrow b^2=32$

معادلة القطع الناقص $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{32}=1$

تأكيد / اختبار نقطة الانقلاب على خط الأعداد للمشتقة الثانية غير ملزم للطالب لأن صيغة السؤال تؤكد وجود نقطة انقلاب، كما أن السؤال تنقصه عبارة (مركز القطع الناقص نقطة الأصل) ليكون أدق لغوياً.

2019 تمهيدي تطبيقي | إذا كانت $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ دالة لها نقطة حرجة عند $x=4$ ونقطة انقلاب $(1,22)$ جد قيم $a,b,c \in R$

Sol: $f(1)=22, f'(4)=0, f''(1)=0$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow 22=1+a+b+c \Rightarrow 21=a+b+c$ ..... (1

$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow 0=48+8a+b$ ..... (2

$f''(x)=6x+2a \Rightarrow 0=\square+2a \Rightarrow a=-3 \ \ in(2)$

$0=48-24+b \Rightarrow b=-24 \ \ in(1)$

$21=-3-24+c \Rightarrow c=48$

2019 تطبيقي د1 خارج | إذا كان $f(x)=x^3-3x^2+4$ والمستقيم $2x+ay=5+3b$ متماسان عند نقطة انقلاب المنحني $f(x)$ جد قيم $a,b \in R$

الحل / لإيجاد نقطة الانقلاب للمنحني نقوم بما يلي

$f(x)=x^3-3x^2+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f''(x)=6x-6$

$6x-6=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=1-3+4=2 \Rightarrow (1,2)$ نقطة انقلاب وتماس

$m=f'(1)=3-6=-3$ ميل المماس للمنحني

$2+ay'=0 \Rightarrow ay'=-2 \Rightarrow y'=\frac{2}{a}$ ميل المستقيم المماس

$\frac{-2}{a}=-3 \Rightarrow -3a=-2$

$a=\frac{2}{3}$ لأن ميل المماس للمنحني يساوي ميل المستقيم المماس له

$(1,2)$ نقطة التماس تنتمي إلى كلا من المنحني والمستقيم المماس له

$2(1)+a(2)=5+3b \Rightarrow 2+2\left(\frac{2}{3}\right)=5+3b \Rightarrow 3b=-3+\frac{4}{3}$

$3b=\frac{-5}{3} \Rightarrow b=\frac{-5}{9}$

التقييم / السؤال منهجي ولكن فيه تغيير في مواقع المتغير الكلاسيكية ففي المنهج المقرر غالباً ما يكون ما مطلوب إيجاده في معادلة المنحني وهنا كان العكس لأن المطلوب إيجاده في معادلة المستقيم.

2014 د3 – 2016 د2 خارجي / جد معادلة المنحني $f(x)=ax^3-bx^2+cx$ حيث أن النقطة $(-1,4)$ نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (-1).

Sol: [$f(-1)=4$ لأنها تماس , $f'(-1)=-1$ لأنها تماس , $f'(-1)=0$ خريطة عمل [لأنها انقلاب

$(-1,4)\in f(x)\Rightarrow -a-b-c=4$ ... ... (1

$f'(x)=3ax^2-2bx+c\Rightarrow 3a+2b+c=-1$ ... ... (2

$2a+b=3$ ... ... (3

$f''(x)=6ax-2b\Rightarrow -6a-2b=0$ ... ... (4

$2b=-6a\Rightarrow b=-3a \quad in(3)$

$2a-3a=3\Rightarrow -a=3\Rightarrow a=-3\Rightarrow b=9 \quad in(1)$

$3-9-c=4\Rightarrow -c=10\Rightarrow c=-10\Rightarrow f(x)=-3x^3-9x^2-10x$

بالجمع

2019 احيائي د1 خارج | جد معادلة المنحني $f(x)=ax^3-b\square^2+cx$ حيث أن النقطة $(-1,4)$ نقطة انقلاب له وميل المماس يساوي (1)

Sol: Sol: [$f(-1)=4$ لأنها تماس , $f'(-1)=1$ لأنها تماس , $f'(-1)=0$ خريطة عمل [لأنها انقلاب

$(-1,4)\in f(x)\Rightarrow -a-b-c=4$ ... ... (1

$f'(x)=3ax^2-2bx+c\Rightarrow 3a+2b+\square=1$ ... ... (2

$2a+b=5$ ... ... (3

$f''(x)=6ax-2b\Rightarrow -6a-2b=0$ ... ... (4

$2b=-6a\Rightarrow b=-3a \quad in(3)$

$2a-3a=5\Rightarrow -a=5\Rightarrow a=-5\Rightarrow b=15 \quad in(1)$

$5-15-c=4\Rightarrow -c=14\Rightarrow c=-14$

$\Rightarrow f(x)=-5x^3-15x^2-14x$

بالجمع

2004 د2
الميل فيه = 1

2008 د2/ إذا كان المستقيم $x-y+2=0$ يمس منحني القطع المكافئ $y^2=hx$ جد بؤرة القطع المكافئ

Sol: المستقيم $m=-\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=\frac{-a}{b}=\frac{-1}{-1}=1\Rightarrow 2yy'=h$

$y'=\frac{h}{2y}$ (إذا مس أو وازى مستقيم منحني تساوى ميلاهما) ميل المماس للمنحني

$\frac{h}{2y}=1\Rightarrow h=2y\Rightarrow y=\frac{h}{2}$ ... ... (1 تعوض بمعادلة المستقيم

$x-\frac{h}{2}+2=0\Rightarrow x=\frac{h}{2}-2$ ... ... (2 (نعوض المعادلتين 1و2 بمعادلة القطع المكافئ)

$\left(\frac{h}{2}\right)^2=h\left(\frac{h}{2}-2\right)\Rightarrow \left[\frac{h^2}{4}=\frac{h^2}{2}-2h\right]\cdot(4)$

$h^2=2h^2-8h\Rightarrow h^2-8h=0$

$h(h-8)=0\Rightarrow h=0$ يهمل $OR\ h=8$

$y^2=8x$, $y\hat{}=4px$ معادلة القطع المكافئ

$4p=8\Rightarrow p=2\Rightarrow (2,0)$ بؤرة القطع المكافئ

الأسئلة الوزارية الخاصة بتمارين النهايات (3 − 4)

س1/ لتكن $f(x)=ax^2-6x+b$ حيث أن $b\in R, a\in\{-4,8]$ جد قيمة a إذا كان الدالة:

أ- محدبة. ب- مقعرة.

Sol: $f'(x)=2ax-6\ ,\ f''(x)=2a$

A الدالة محدبة $\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow 2a<0\Rightarrow a=-4$

B الدالة مقعرة $\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow 2a>0\Rightarrow a=8$

2019 تمهيدي احيائي | لتكن $f(x)=ax^2+bx+6$ حيث أن $b\in R\ ,a\in\{-1,4\}$ جد قيمة a إذا كانت الدالة:

أ) محدبة. ب) مقعرة.

Sol: $f'(x)=2ax+b\ ,f''(x)=2a$

A الدالة محدبة $\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow 2a<0\Rightarrow a=-1$

B الدالة مقعرة $\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow 2a>0\Rightarrow a=4$

2013 تمهيدي | لتكن $f(x)=ax^2-6x+b$ حيث أن $a\in\{-4,8\}$ جد قيمة a إذا كانت الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية.

Sol: $f'(x)=2ax-6$

$f''(x)=2a\Rightarrow a=8\Rightarrow f''(x)=16>0$ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

2020 تطبيقي د3 – 2011 خارج القطر

س2/ إذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمتي a,b ثم بيّن نوع النقطة الحرجة.

Sol: $f(2)=6\Rightarrow 6=a-(2-b)^4$ ..... (1

$f'(2)=0\Rightarrow f'(x)=-4(x-b)^3$

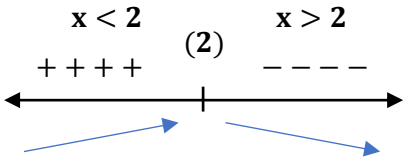
$-4(2-b)^3=0\Rightarrow 2-b=0\Rightarrow b=2\ \ in(1)$

$6=a-(2-2)^4\Rightarrow a=6\Rightarrow f(x)=6-(x-2)^4$

$f''(x)=-12(x-2)^2\Rightarrow f''(2)=-12(2-2)^2=0$

هذه الطريقة فاشلة في تحديد نوع النقطة

إشارة $f'(x)$



$(2,6)$ نقطة نهاية عظمى محلية

2014 د2 – 2017 د1 تطبيقي – 2018 تطبيقي د2 خارج

س3/ إذا كانت $g(x)=1-12x$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكان كل من f , g متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة f نقطة انقلاب هي $(1,-11)$ فجد قيم الثوابت $a,b,c\in R$

خريطة عمل

Sol: [$f(1)=-11$ لأنها تماس وانقلاب ,

$f'(1)=m$ لأنها تماس ,

$f''(1)=0$ لأنها انقلاب]

$\because f(1)=-11\Rightarrow a+b+c=-11$ ... ... (1

$m=g'(x)=-12$, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$\because f'(1)=m\Rightarrow 3a+2b+c=-12$ ... ... (2

$\mp a\mp b\mp c=\pm 11$ ... ... (1

$2a+b=-1$ ... ... (4

$f''(x)=6ax+2b$, $\because f''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0$ ... ... (3

$2b=-6a\Rightarrow b=-3a\ \ in(4)$

$2a-3a=-1\Rightarrow a=1\Rightarrow b=-3\ \ in(1)$

$1-3+c=-11\Rightarrow c=-9$

ملاحظة: يمكن اعتبار المستقيم $g(x)=1-12x$ بالصورة $y=1-12x$ ثم حساب ميله عن طريق قانون ميل المستقيم ويصبح $m=-12$ بعد أن نجعل المتغيرين x,y بنفس الجهة علماً أن الطالب مخير بين استخدام المشتقة أو قانون ميل المستقيم.

2012 خارج القطر

س4/ إذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى لمنحني الدالة $f(x)=3x^2-x^3+c$ فجد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه

Sol: $y=6$, $f'(x)=6x-3x^2\Rightarrow 6x-3x^2=0\Rightarrow 3x(2-x)=0$

$x=0\ OR\ x=2$

$f''(x)=6-6x\Rightarrow f''(0)=6-0=6>0$, $f''(2)=6-12=-6<0$

$f(x)\in (0,6)$ هي نقطة النهاية الصغرى

$6=0-0+c\Rightarrow c=6$

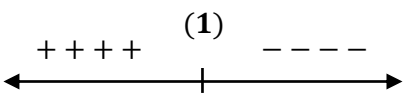
$f(x)=3x^2-x^3+6=6\Rightarrow f'(x)=6x-3x^2\Rightarrow f''(x)=6-6x$

$6-6x=0\Rightarrow 6x=6\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=3-1+6=8\Rightarrow (1,8)$ نقطة انقلاب مرشحة

$(1,8)$ نقطة انقلاب ومماس , $m=f'(1)=6-3=3$

معادلة المماس $(y-y_1)=m(x-x_1)$

معادلة المماس $(y-8)=3(x-1)\Rightarrow y-8=3x-3\Rightarrow 3x-y+5=0$



س5/ إذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة لكل $x>1$ ومحدبة لكل $x<1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية $(-1,5)$ فجد قيم الثوابت $a,b,c\in R$

2019 تطبيقي د1 داخل
2017 د3 تطبيقي
2016 د1 خارج
2015 د1
2012 د3
2019 احيائي د2

خريطة عمل

Sol: [$f(-1)=5$ لأنها نهاية عظمى ,
$f'(-1)=0$ لأنها عظمى ,
$f''(1)=0$ لأنها انقلاب]

$\because (-1,5)\in f(x)\Rightarrow -a+b-c=5$ ... ... (1
$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ,\because f'(-1)=0\Rightarrow 3a-2b+c=0$ ... ... (2
$-a+b-c=5$ ... ... (1
$3a-2b+c=0$ ... ... (2
$2a-b=5$ ... ... (3 بالجمع
$f''(x)=6ax+2b\ ,\because f''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0$ ... ... (4
$2b=-6a\Rightarrow b=-3a\ ...in(3)$
$2[ ]+3a=5\Rightarrow 5a=5\Rightarrow a=1\Rightarrow b=-3\ ...in(1)$
$-1-3-c=5\Rightarrow c=-9$

2018 د1 احيائي خارج

إذا كانت النقطة $(-1,5)$ حرجة لمنحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وللدالة نقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيم الثوابت a,b,c ثم بيّن نوع النقطة الحرجة.

❖ يمكنك عزيزي الطالب أن ترى التغيير الطفيف في السؤال حيث تم استبدال الإشارة الضمنية إلى نقطة الانقلاب في سؤال الكتاب من خلال قوله مقعرة لكل $x>1$ ومحدبة لكل $x<1$ إلى إشارة صريحة بذلك.. وكذلك تم استبدال نقطة النهاية العظمى بالنقطة الحرجة وهنا سيضاف للحل خطوة واحدة من خلال تعويض قيمة x بالنقطة الحرجة بالمشتقة الثانية بعد استخراج قيم a,b للتحقق من كون الناتج سالباً فنقول إن النقطة الحرجة هي نهاية عظمى محلية أو يتم إظهار اختبار خط الأعداد للمشتقة الأولى.

هل يمكنك فعل ذلك بنفسك.. أكيد أنك قادر على ذلك..

2013 د1 – 2018 د1 تطبيقي داخل – 2019 د3 احيائي

س6/ إذا كانت $f(x)=x^2-\frac{a}{x}$ حيث $x\neq 0$ بيّن أنّ الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية

Sol: $f(x)=x^2-ax^{-1}$

$f'(x)=2x+ax^{-2}\Rightarrow 2x+ax^{-2}=0$

$2x+\frac{a}{x^2}=0\Rightarrow 2x=-\frac{a}{x^2}$

$2x^3=-a\Rightarrow x^3=-\frac{a}{2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

$f''(x)=2-2ax^{-3}=2-\frac{2a}{x^3}$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right)=2-\frac{2a}{\frac{-a}{2}}=2+(2a)\left(\frac{2}{a}\right)=2+4=6>0$

∴ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية ولا يمكن أن تمتلك نهاية عظمى محلية.

س7/ إذا كان المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $f(x)=ax^2+bx+c$ عند النقطة $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x=\frac{1}{2}$ جد قيم $a,b,c\in R$.

خريطة عمل

Sol: [$f(2)=-1$ لأنها تماس ,

$f'(2)=m$ لأنها تماس ,

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ لأنها صغرى]

$m=-\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=\frac{-a}{b}=\frac{-3}{-1}=3$

$(2,-\square)\in f(x)\Rightarrow 4a+2b+c=-1\ldots\ldots(1$

$f'(x)=2ax+b\,,\because f'(2)=m\Rightarrow 4a+b=3\ldots\ldots(2$

$\because f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow a+b=0\ldots\ldots(3\Rightarrow a=-b\ldots in(2)$

$-4b+b=3\Rightarrow -3b=3\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=1\ldots in(1)$

$4-2+c=-1\Rightarrow c=-3$

2003 د2
2014 د4 انبار
2015 د1 خارج
2016 د1

2015 د4 رصافة – 2017 د3 احيائي داخل – 2018 د1 احيائي

إذا كان المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $f(x)=ax^2+bx+c$ عند النقطة $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x=5$ جد قيم $a,b,c\in R$.

تأكيد: في السنوات أعلاه أوقع واضع الأسئلة الوزارية نفسه في إشكال عندما قام بتغيير x من 0.5 إلى 5 عندها أصبحت النهاية عظمى محلية وليست صغرى ولعله كان هناك خطأ مطبعي عند كتابة السؤال وفي العام 2018 كان هناك خطا طباعي آخر في نهاية السؤال بأنه طلب إيجاد $a,b\in R$ وقد سقطت c منها وكان الجواب النموذجي عندها إهمال قيمة c المستخرجة بصرف النظر عن صحتها والاكتفاء بقيمتي a,b.

الأسئلة الوزارية الخاصة بموضوع رسم الدوال

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنيات الدوال التالية:

2000 د1 – 2006 د2
2008 تمهيدي – 2007 خارج القطر
2013 د3 – 2014 تمهيدي
2014 نازحين – 2015 د2 نازحين
2020 تطبيقي د3

Ex1: $f(x) = x^5$

Sol:

1- R أوسع مجال للدالة

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 0\ , if\ y = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0,0)$ نقطة التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

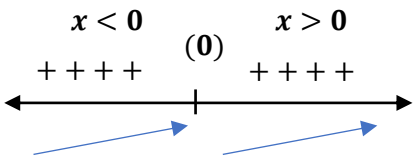
$f(-x) = (-x)^5 = -(x)^5 = -f(x)$

المنحني متناظر حول نقطة الأصل

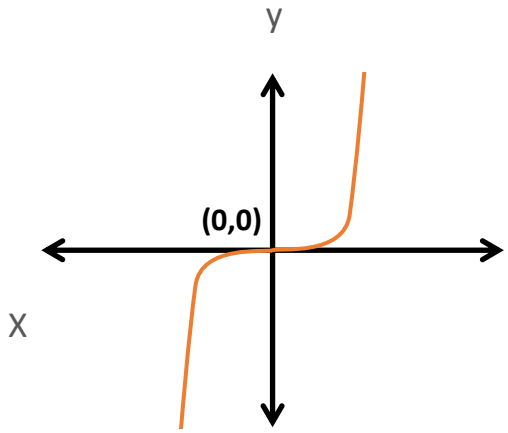
5- النهايات

$f'(x) = 5x^4 \Rightarrow 5x^4 = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة حرجة



إشارة المشتقة الأولى



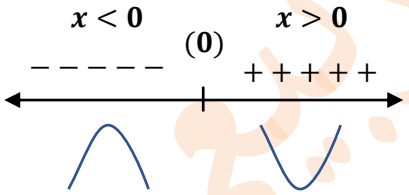
الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x > 0\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x < 0\}$

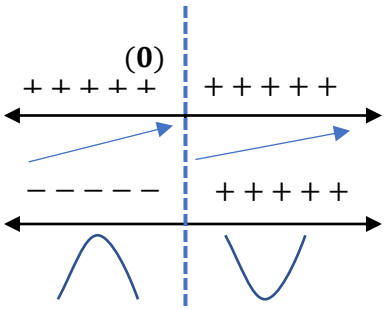
$(0,0)$ مجرد نقطة حرجة

$f''(x) = 20x^3 \Rightarrow 20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة انقلاب مرشحة



إشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x \in R; x < 0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x > 0\}$

$(0,0)$ نقطة انقلاب

2015 تمهيدي
2020 تطبيقي د2 تكميلي

Ex-2: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

sol: 1- أوسع مجال للدالة R 2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

غير مطلوبة وزارياً

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 4\ , if\ y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$x^3 + x^2 - x^2 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - 4(x^2 - 1) = 0$

$x^2(x+1) - 4(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)[x^2 - 4(x-1)] = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = -1\ OR\ x = 2$

$\Rightarrow (0,4), (-1,0), (2,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين هي

4- التناظر $\forall x \in R, \exists(-x) \in R$

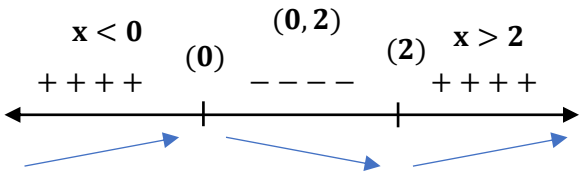
$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 = -(x^3 + 3x^2 - 4) \neq -f(x)$

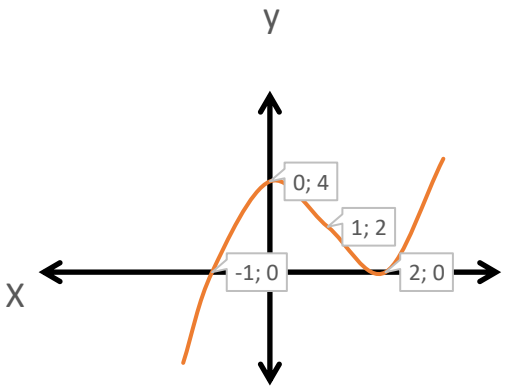
$\Rightarrow$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الأصل

5- النهايات $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4\ OR\ x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow (0,4), (2,0)$ نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى





$\{x: x \in R; x > 2\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x < 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة

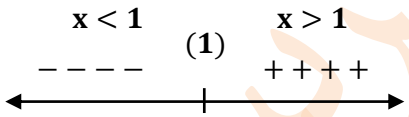
$\{x: x \in R; x \in (0,2)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

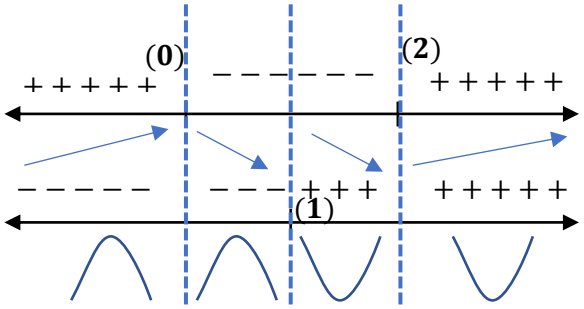
$(0,4)$ نقطة نهاية عظمى , $(2,0)$ نقطة نهاية صغرى

$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 \Rightarrow (1,2)$ نقطة انقلاب مرشحة

إشارة المشتقة الثانية





$\{x: x \in R; x > 1\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$\{x: x \in R; x < 1\}$ الدالة محدبة بالفترة

$(1,2)$ نقطة انقلاب

تلميح: أي معادلة ثلاثية تكون فيها درجة الحد الأوسط ليست نصف درجة الحد الأول عند ترتيبها تنازلياً لا يطلب فيها إيجاد نقاط التقاطع مع محور السينات وزارياً ونكتفي بإيجاد نقاط التقاطع مع محور الصادات كما في السؤال السابق..

2007 دور أول – 1999 دور أول – 2006 تمهيدي

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 0\ , if\ y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0\ OR\ x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$(0,0), (\sqrt{3},0), (-\sqrt{3},0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ المنحني متناظر حول نقطة الأصل

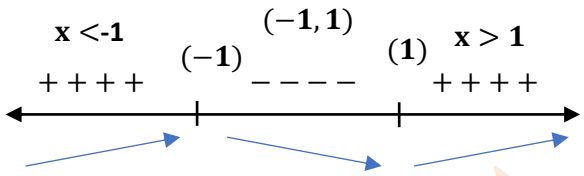
5- النهايات

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = -2\ OR\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2$

$(1,-2), (-1,2)$ نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



$\{x: x \in R; x > 1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

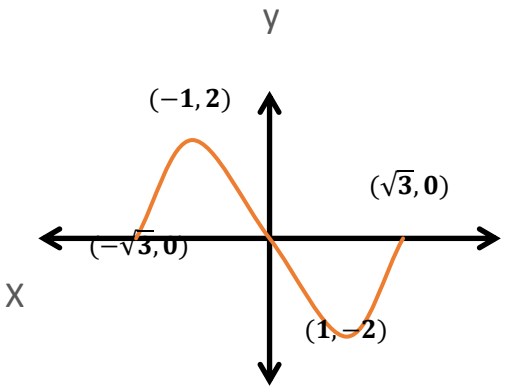
$\{x: x \in R; x < -1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x \in (-1,1)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

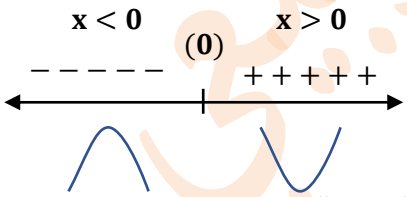
$(-1,2)$ نقطة نهاية عظمى , $(1,-2)$ نقطة نهاية صغرى

$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة انقلاب مرشحة



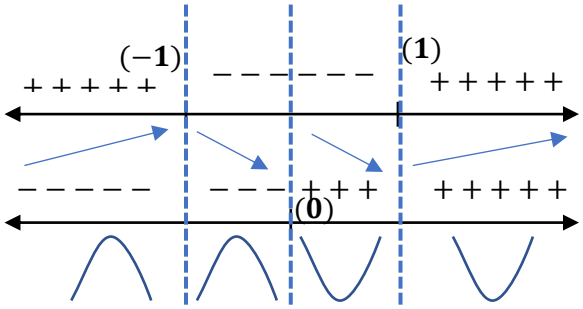
إشارة المشتقة الثانية



$\{x: x \in R; x < 0\}$ الدالة محدبة بالفترة

$\{x: x \in R; x > 0\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$(0,0)$ نقطة انقلاب



2000 د2

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة: $f(x)=(x^2-1)^2$

Sol: $f(x)=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$

1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x=0\Rightarrow y=1\ ,if\ y=0\Rightarrow (x^2-1)^2=0\Rightarrow (x^2-1)=0$

$x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow (0,1),(-1,0),(1,0)$ **نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين**

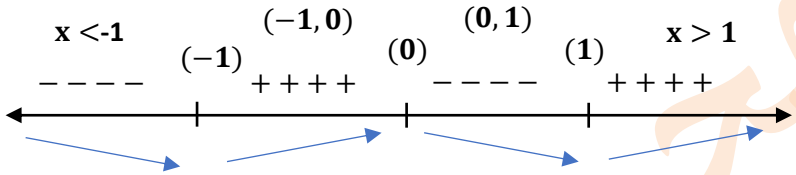
4- التناظر $\forall x\in R\ ,\exists(-x)\in R$

$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+1=x^4-2x^2+1=f(x)\Rightarrow$ **المنحني متناظر حول محور الصادات**

5- النهايات

$f'(x)=4x^3-4x\Rightarrow 4x^3-4x=0\Rightarrow 4x(x^2-1)=0\Rightarrow$
$x=0\Rightarrow f(x)=1\ OR\ x=1\Rightarrow f(1)=0\ OR\ x=-1\Rightarrow f(-1)=0$
$(0,1),(-1,0),(1,0)$ **نقاط حرجة**

إشارة المشتقة الأولى



$\{x: x\in R; x>1\}$ **الدالة متزايدة بالفترة**

$\{x: x\in R; x<-1\}$ **الدالة متناقصة بالفترة**

$\{x: x\in R; x\in(-1,0)\}$ **الدالة متزايدة بالفترة**

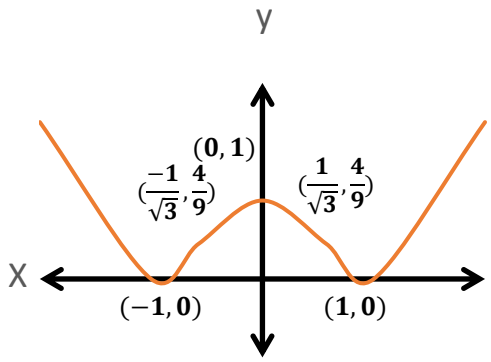
$\{x: x\in R; x\in(0,1)\}$ **الدالة متناقصة بالفترة**

$(-1,0)$ **صغرى** , $(1,0)$ **صغرى** , $(0,1)$ **عظمى**

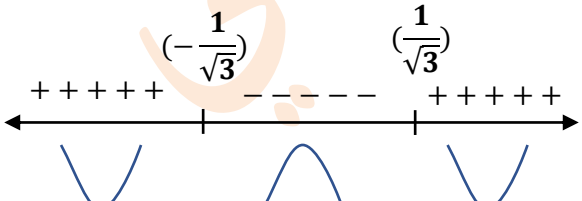
$f''(x)=12x^2-4\Rightarrow 12x^2=4\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}\ ,f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right)$ **نقاط انقلاب مرشحة**



إشارة المشتقة الثانية



$\left\{x: x\in R; x>\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\left\{x: x\in R; x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **الدالة مقعرة بالفترتين**

$\{x: x\in R; x\in(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$ **الدالة محدبة بالفترة**

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right)$ **نقاط انقلاب**

2001 دور ثاني | باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 + 3x^2$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 0\ , if\ y = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0$
$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0\ OR\ x = -3$
$(0,0), (-3,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

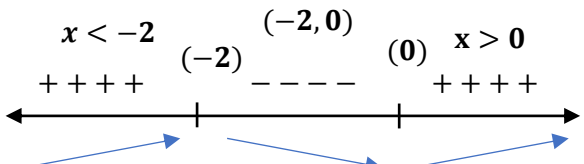
4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2 = -(x^3 - 3x^2) \neq -f(x)$ لا يوجد تناظر

5- النهايات

$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0$
$either\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 0\ OR\ x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4$
$(0,0), (-2,4)$ نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



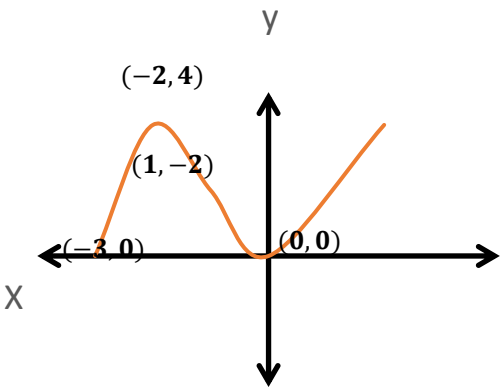
$\{x: x \in R; x > 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x < -2\}$ الدالة متزايدة بالفترة

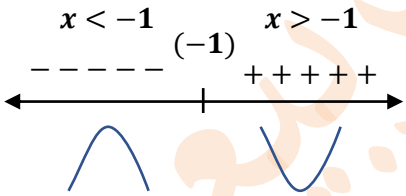
$\{x: x \in R; x \in (-2,0)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

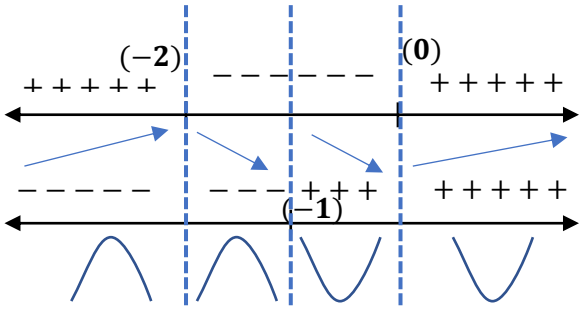
$(-2,4)$ نهاية عظمى , $(0,0)$ نهاية صغرى

$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$
$f(-1) = 2 \Rightarrow (-1,2)$ نقطة انقلاب مرشحة



إشارة المشتقة الثانية





$\{x: x \in R; x < -1\}$ الدالة محدبة بالفترة

$\{x: x \in R; x > -1\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$(-1,2)$ نقطة انقلاب

2002 دور ثاني | باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = -3\ , if\ y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3\ OR\ x = -1$

$(0,-3), (3,0), (-1,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in$ ؟

$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3 \neq -f(x)$ لا يوجد تناظر

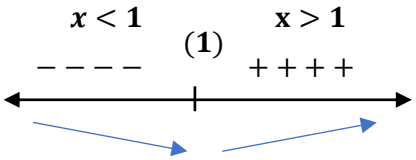
5- النهايات

$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

$(1,-4)$ نقطة حرجة

إشارة المشتقة الأولى



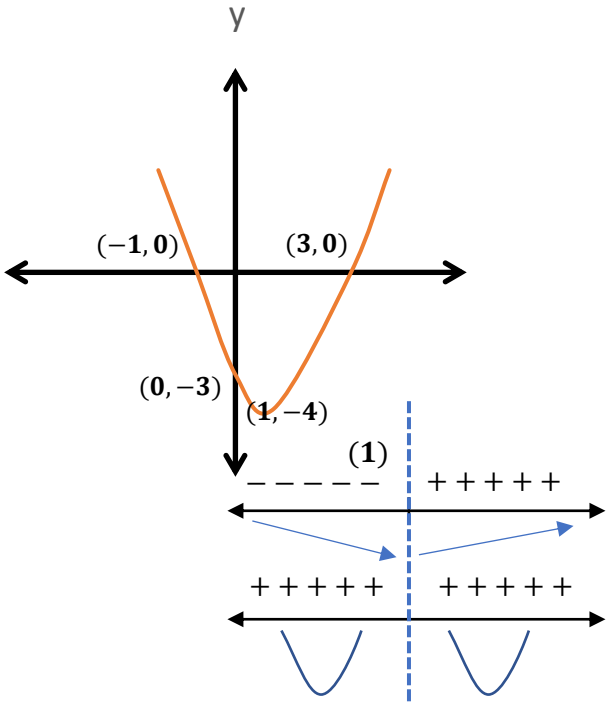
$\{x: x \in R; x > 1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x < 1\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(-2,4)$ نهاية عظمى , $(0,0)$ نهاية صغرى

$f''(x) = 2 > 0$

الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب



2006 دور 1

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x)=x^3-3x+2$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x=0\Rightarrow y=2\ ,if\ y=0\Rightarrow x^3-3x+2=0\Rightarrow (x+2)(x-1)^2=0$

$\Rightarrow x=-2\ OR\ x=1\Rightarrow (0,2),(-2,0),(1,0)$ **نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين**

4- التناظر $\forall x\in R\ ,\exists(-x)\in R$

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)+2=-x^3+3x+2=-(x^3-3x-2)\neq -f(x)$

$\Rightarrow$ المنحني غير متناظر حول نقطة الأصل ولا حول محور الصادات

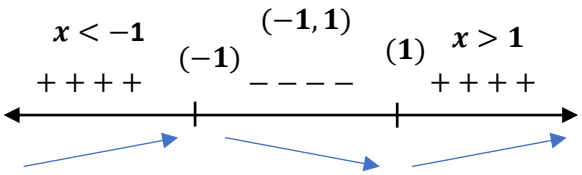
5- النهايات

$f'(x)=3x^2-3\Rightarrow 3x^2-3=0\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

$x=1\Rightarrow f(1)=0\ OR\ x=-1\Rightarrow f(-1)=4$

$(1,0),(-1,4)$ **نقاط حرجة**

إشارة المشتقة الأولى



الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x\in R; x>1\}$

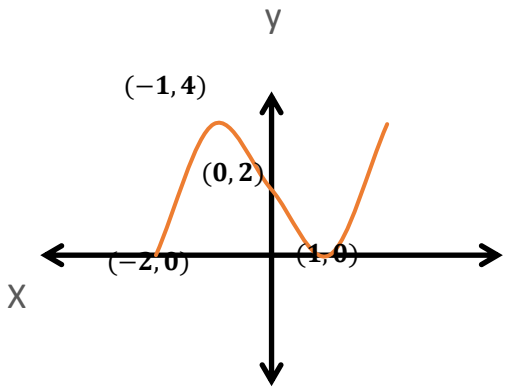
الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x\in R; x<-1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x\in R; x\in(-1,1)\}$

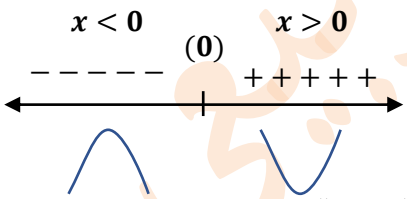
نهاية صغرى $(1,0)$ **, نهاية عظمى** $(-1,4)$

$f''(x)=6x\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0$

$f(0)=2\Rightarrow (0,2)$ **نقطة انقلاب مرشحة**



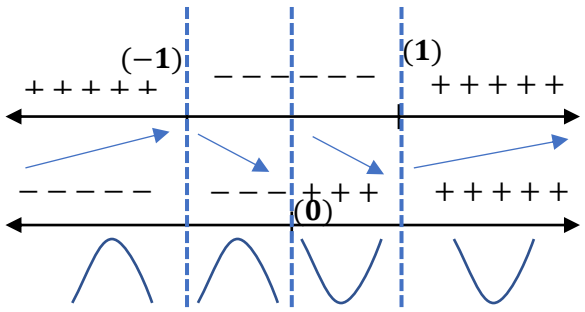
إشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x\in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x\in R; x>0\}$

نقطة انقلاب $(0,2)$



2018 تمهيدي احيائي

Ex3: $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

1- $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow R/\{-1\}$ أوسع مجال للدالة

2- $x=-1$ المحاذي العمودي , $y=3$ المحاذي الأفقي

3- نقاط التقاطع

$if\ x=0\Rightarrow y=-1\ ,if\ y=0\Rightarrow 3x-1=0\Rightarrow 3x=\square\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$(0,-1),\left(\frac{1}{3},0\right)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر

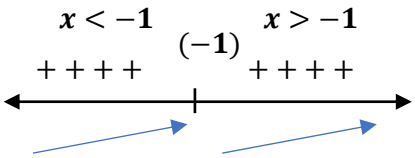
بما أن العدد (1) ينتمي إلى مجال الدالة لكن العدد (-1) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الأصل.

5- النهايات

$f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}\neq 0$

أي أنه لا توجد نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



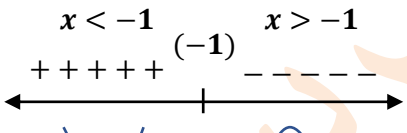
الدالة متزايدة بالفترتين $\{x: x\in R; x>-1\}$

$\{x: x\in R; x<-1\}$

$f''(x)=\frac{(x+1)^2\cdot(0)-4[2(x+1)]}{(x+1)^4}$

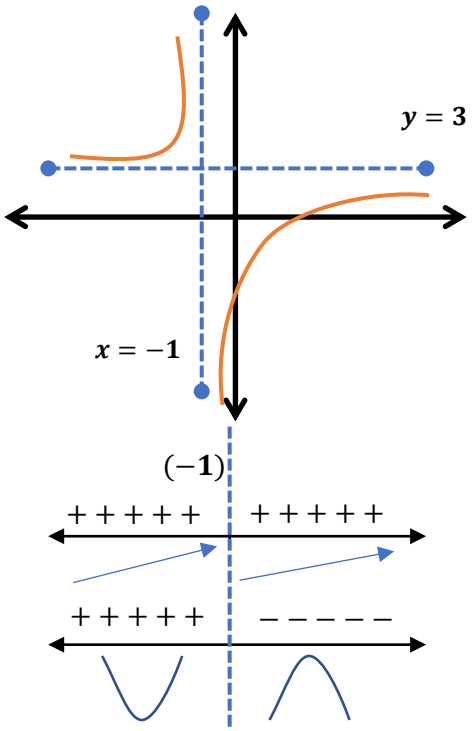
$=\frac{-8}{(x+1)^3}\neq 0\Rightarrow$ أي انه لا توجد نقاط انقلاب

إشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x\in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x\in R; x>0\}$



ملاحظة: أي دالة نسبية مشتقتها الأولى أو الثانية دالة نسبية بسطها ثابتاً فلا توجد لها نقاط حرجة أو انقلاب لعدم إمكانية مساواتها بالصفر ويجب تثبيت المحاذي العمودي على خطي الأعداد الأول والثاني حصراً على شكل فجوة.

2014 خارج – 2009 تمهيدي

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{1}{x+1}$

Sol: **1- $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow R/\{-1\}$ أوسع مجال للدالة**

2- $x=-1$ المحاذي العمودي , $y=0$ المحاذي الأفقي

3- نقاط التقاطع

$if\ x=0\Rightarrow y=1\ ,if\ y=0$ غير ممكن

نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0,1)$

4- التناظر

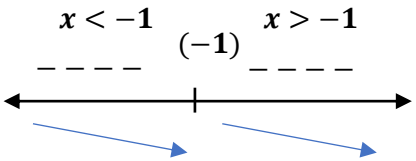
بما أن العدد (1) ينتمي إلى مجال الدالة لكن العدد (-1) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الأصل.

5- النهايات

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}\neq 0$$

أي أنه لا توجد نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



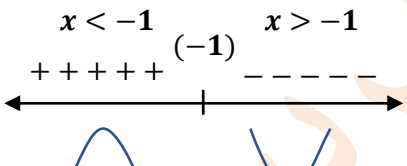
الدالة متناقصة بالفترتين $\{x: x\in R; x>-1\}$

$\{x: x\in R; x<-1\}$

$$f''(x)=\frac{(x+1)^2\cdot(0)+1[2(x+1)]}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}\neq 0$$

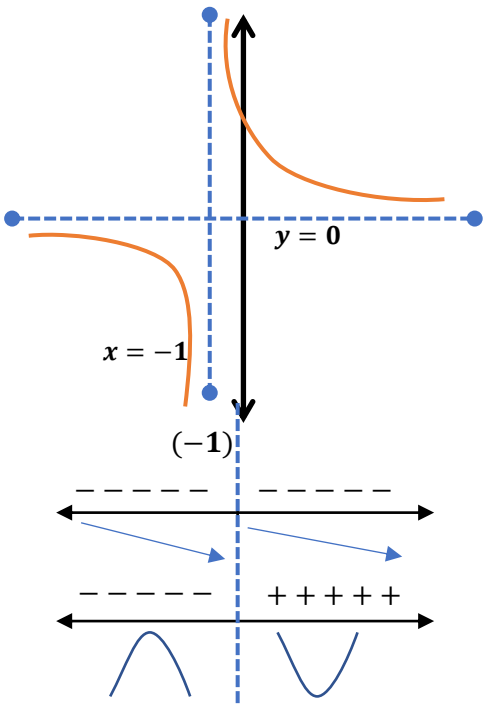
أي أنه لا توجد نقاط انقلاب

إشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x\in R; x<-1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x\in R; x>-1\}$



تمارين (3 – 5)

ارسم باستخدام معلومتك بالتفاضل الدوال التالية:

2013 تمهيدي

$1/\ f(x) = 10 - 3x - x^2$

Sol: 1- R أوسع مجال للدالة 2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 10\ , if\ y = 0 \Rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0 \Rightarrow (2 - x)(5 + x) = 0$
$\Rightarrow x = 2\ OR\ x = -5$

$(0, 10), (-5, 0), (2, 0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

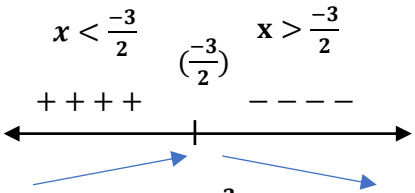
$f(-x) = 10 - 3(-x) - (x -)^2 = 10 + 3x - x^2 \neq -f(x) \Rightarrow$ لا يوجد تناظر

5- النهايات

$f'(x) = -3 - 2x \Rightarrow -3 - 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4}$

$(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4})$ نقطة حرجة



إشارة المشتقة الأولى

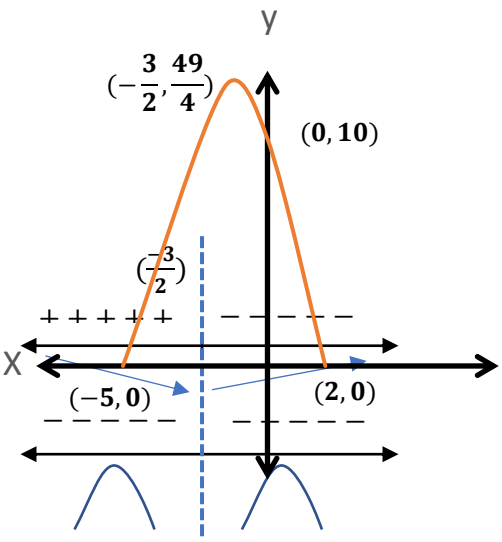
$\{x: x \in R; x < -\frac{3}{2}\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x > -\frac{3}{2}\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4})$ نهاية عظمى محلية

$f''(x) = -2 < 0$

الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب



2011 دور2
2013 دور2
2016 تمهيدي

$3/\ f(x) = (1-x)^3 + 1$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 2\ , if\ y = 0$

$(1-x)^3 + 1 = 0 \Rightarrow (1-x)^{\square} = -1$ بالجذر التكعيبي

$1 - x = -1 \Rightarrow x = -2$

$(0,2), (2,0)$ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين

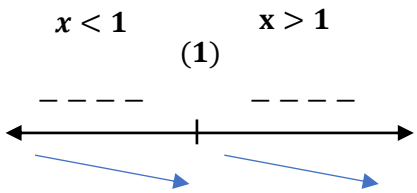
4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = (1+x)^3 + 1 = -[(-1-x)^3 - 1] \neq -f(x) \Rightarrow$ لا يوجد تناظر

5- النهايات

$f'(x) = 3(1-x)^2(-1) \Rightarrow -3(1-x)^2 \Rightarrow 1 - \square = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 \Rightarrow (1,1)$ نقطة حرجة



إشارة المشتقة الأولى

الدالة متناقصة بالفترتين $\{x: x \in R; x > 1\}$

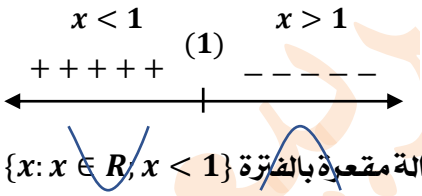
$\{x: x \in R; x < 1\}$

$(1,1)$ مجرد نقطة حرجة

$f''(x) = -6(1-x)(-1) = 6(1-x)$

$\Rightarrow 6(1-x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 \Rightarrow (1,1)$ نقطة انقلاب مرشحة

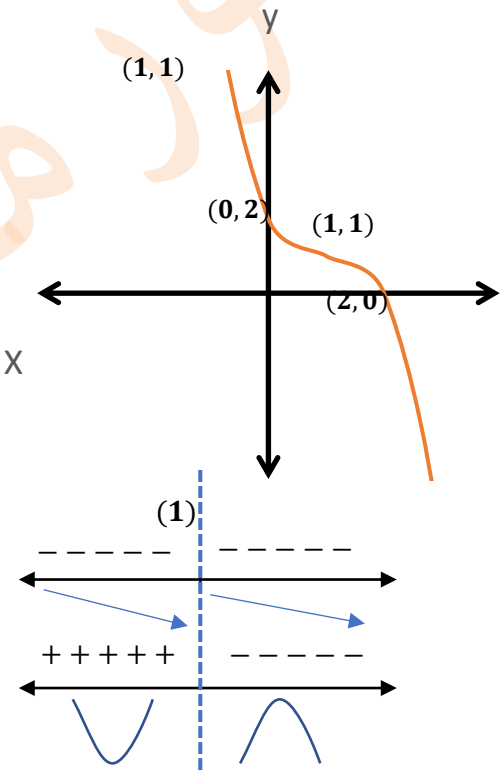


إشارة المشتقة الثانية

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R, x < 1\}$

الدالة محدبة بالفترة $\{x: x \in R; x > 1\}$

نقطة انقلاب $(1,1)$



2011 دور1
2015 دور3

3/ $f(x) = 6x - x^3$

Sol: 1- R أوسع مجال للدالة 2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 2\ , if\ y = 0 \Rightarrow 6x - x^3 = 0 \Rightarrow x(6 - x^2) = 0$

$\Rightarrow x = 0\ OR\ ^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$(0,0), (\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3 = -(6x - x^3) = -f(x)$

$\Rightarrow$ المنحني متناظر حول نقطة الأصل

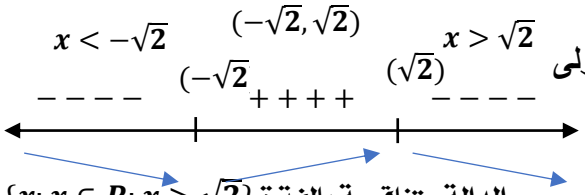
5- النهايات

$f'(x) = 6 - 3x^2 \Rightarrow 6 - x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\ OR\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى

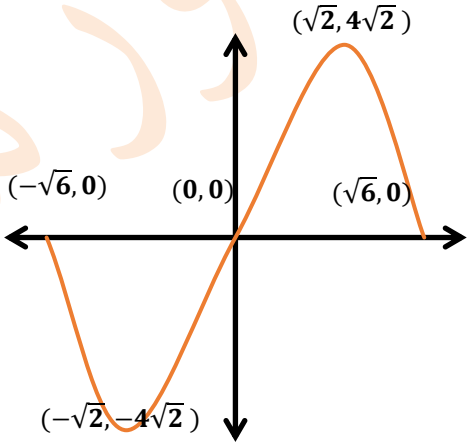


$\{x: x \in R; x > \sqrt{2}\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\{x: x \in R; x < -\sqrt{2}\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\{: x \in R; x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$ الدالة متزايدة بالفترة

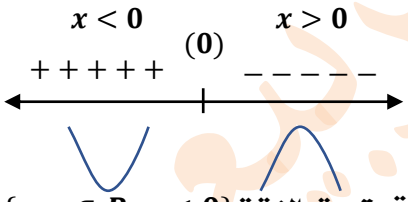
$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نهاية عظمى , $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نهاية صغرى



$f''(x) = -6x \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة انقلاب مرشحة

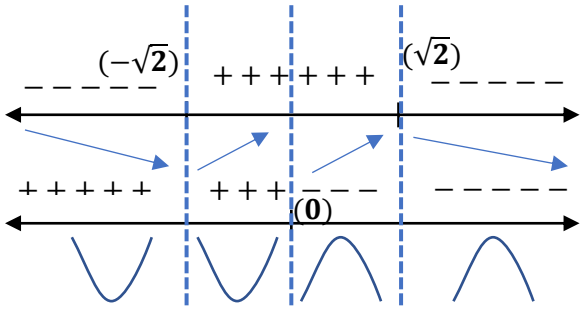
إشارة المشتقة الثانية



$\{x: x \in R; x < 0\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$\{x: x \in R; x > 0\}$ الدالة محدبة بالفترة

$(0,0)$ نقطة انقلاب



2012 تمهيدي
2020 احيائي د1 خارج

$5/\ f(x)=\frac{1}{x}$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة $R/\{0\}$

2- المحاذي الأفقي $y=0$, المحاذي العمودي $x=0$

3- نقاط التقاطع

$if\ y=0\Rightarrow x=$ غير معرف , $if\ x=0\Rightarrow y=$ غير معرف

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين $x\neq 0\ ,y\neq 0$

4- التناظر $\forall x\in R\ ,\exists(-x)\in R$

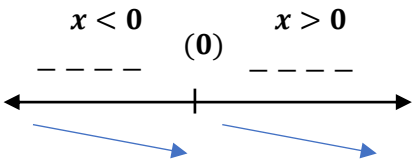
$f(-x)=\frac{1}{(-x)}=-(\frac{1}{x})=-f(x)\Rightarrow$ المنحني متناظر حول نقطة الأصل

5- النهايات

$$f'(x)=\frac{(x)(0)-(1)(1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}\neq 0$$

أي أنه لا توجد نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



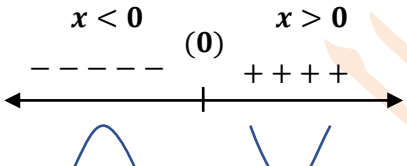
الدالة متناقصة بالفترتين $\{x: x\in R; x>0\}$

$\{x: x\in R; x<0\}$

$$f''(x)=\frac{x^2\cdot(0)-(-1)(2x)}{x^4}=\frac{2}{x^3}\neq 0$$

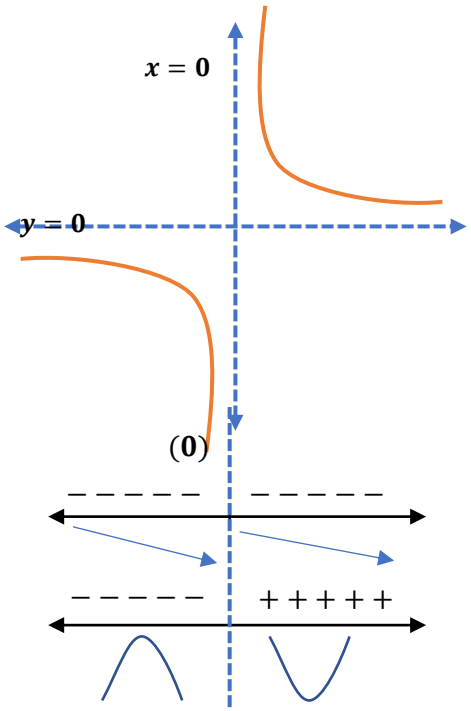
أي أنه لا توجد نقاط انقلاب

إشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x\in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x\in R; x>0\}$



2016 دور2
2017 د2 تطبيقي خارج

$6/\ f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

Sol: 1- $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow R/\{-1\}$ أوسع مجال للدالة

2- $x=-1$ المحاذي العمودي , $y=1$ المحاذي الأفقي

3- نقاط التقاطع

$if\ x=0\Rightarrow y=-1\ ,if\ y=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$

$(0,-1),(1,0)$ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر

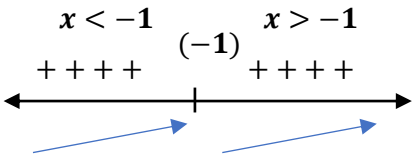
بما أن العدد (1) ينتمي إلى مجال الدالة لكن العدد (-1) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصـادات ولا مع نقطة الأصل.

5- النهايات

$$f'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\neq 0$$

أي أنه لا توجد نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



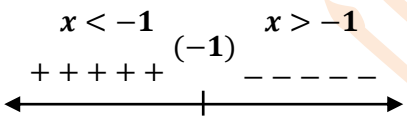
الدالة متزايدة بالفترتين $\{x: x\in R; x>-1\}$

$\{x: x\in R; x<-1\}$

$$f''(x)=\frac{(x+1)^2\cdot(0)-2[2(x+1)]}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}\neq 0$$

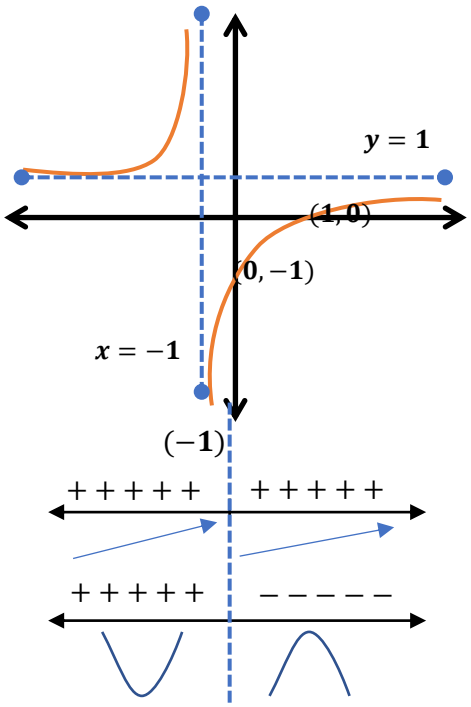
أي أنه لا توجد نقاط انقلاب

إشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x\in R; x>-1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x\in R; x<-1\}$



1د 2005
1د 2008

7/ $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x=0\Rightarrow y=2\ ,if\ y=0\Rightarrow (x+2)(x-1)^2=0\Rightarrow x=-2\ OR\ x=1$

$(0,2),(-2,0),(1,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر $\forall x\in R\ ,\exists(-x)\in R$

$f(-x)=(-x+2)(-x-1)^2=-(x-2)(-x-1)^2\neq -f(x)\Rightarrow$ لا يوجد تناظر

5- النهايات

$f(x)=(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$

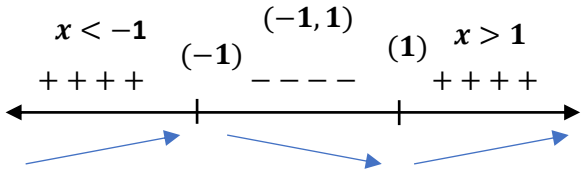
$f'(x)=(x+2)(2x-2)+(x^2-2x+1)(1)=2x^2-2x+4x-4+x^2-2x+1$

$=3x^2-3\Rightarrow 3x^2-3=0\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

$x=1\Rightarrow f(1)=0\ OR\ x=-1\Rightarrow f(-1)=4$

$(1,0),(-1,4)$ نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



$\{x: x\in R; x>1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

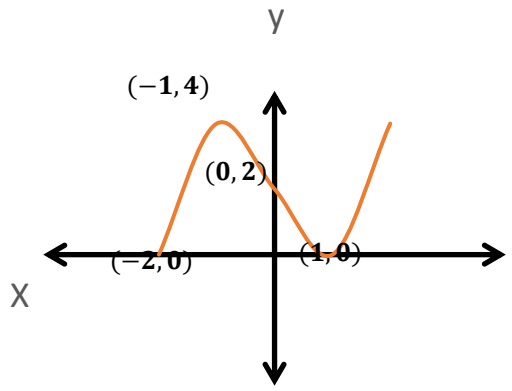
$\{x: x\in R; x<-1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x\in R; x\in(-1,1)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

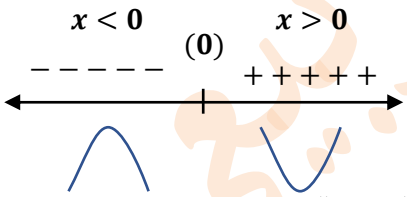
$(-1,4)$ عظمى , $(1,0)$ صغرى

$f''(x)=6x\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0$

$f(0)=2\Rightarrow (0,2)$ نقطة انقلاب مرشحة



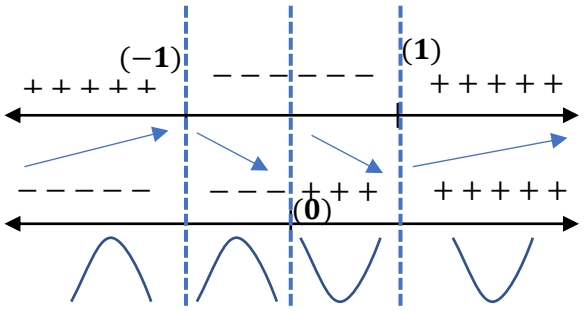
إشارة المشتقة الثانية



$\{x: x\in R; x<0\}$ الدالة محدبة بالفترة

$\{x: x\in R; x>0\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$(0,2)$ نقطة انقلاب



1997 دور اول
2020 احيائي د2 داخل

$8/\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذي الأفقي $y=1$, المحاذي العمودي لا يوجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x=0\Rightarrow y=-1\ ,if\ y=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,-1),(1,0),(-1,0)$

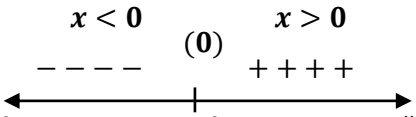
4- التناظر $\forall x\in R\ ,\exists(-x)\in R$

$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=-f(x)\Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

5- النهايات

$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}=0$

$4x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow (0,-1)$ نقطة حرجة



إشارة المشتقة الأولى

$\{x: x\in R; x>0\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x\in R; x<0\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(0,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

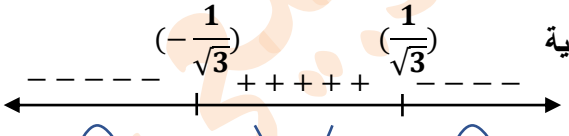
$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2\cdot(4)-4x\cdot2(x^2+)\cdot2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4(x^2+1)^2-16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$f''(x)=\frac{(x^2+1)[4(x^2+1)-16x^2]}{(x^2+1)^4}=\frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}=0$

$4-12x^2=0\Rightarrow 12x^2=4\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2}\right)$ نقاط انقلاب مرشحة

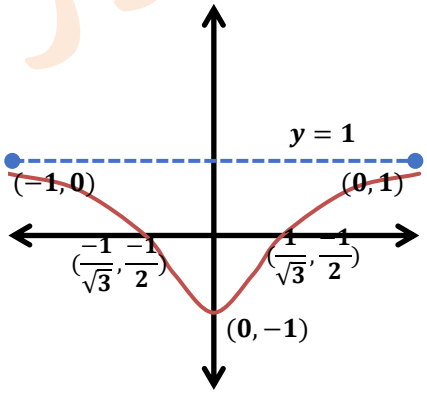


إشارة المشتقة الثانية

$\left\{x: x\in R; x>\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\{x: x\in R; x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ الدالة محدبة بالفترتين

$\{x: x\in R; x\in(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2}\right),(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{2})$ نقاط انقلاب



2012 دور2
2018 تطبيقي د2 خارج

9/ $f(x) = 2x^2 - x^4$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R 2- المحاذيات لا توجد

3- نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \Rightarrow y = 2\ , if\ y = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x = x^2(2 - x^2) = 0$

$\Rightarrow x = 0\ , x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$(0,0), (-\sqrt{2},0), (\sqrt{2},0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

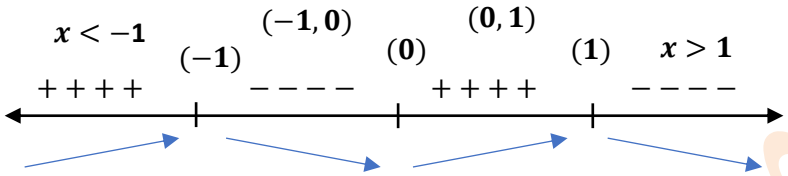
5- النهايات

$f'(x) = 4x - 4x^3 \Rightarrow 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0\ OR\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 1\ OR\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1$

$(0,0), (-1,1), (1,1)$ نقاط حرجة

إشارة المشتقة الأولى



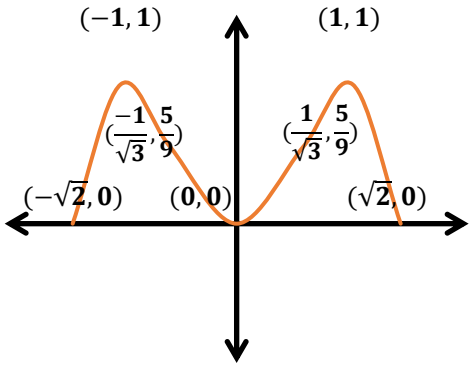
$\{x: x \in R; x > 1\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\{x: x \in R; x < -1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x \in (-1,0)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\{x: x \in R; x \in (0,1)\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$(-1,1)$ نهاية عظمى , $(1,1)$ نهاية عظمى , $(0,0)$ نهاية صغرى

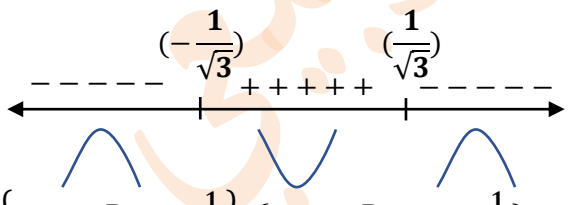


$f''(x) = 4 - 12x^2 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}\ , f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$ نقاط انقلاب مرشحة

إشارة المشتقة الثانية



$\left\{x: x \in R; x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \{x: x \in R; x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ الدالة محدبة بالفترتين

$\left\{x: x \in R; x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$ نقاط انقلاب

2005 تمهيدي

باستهدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^4 - 2x^2$

2015 دور2

$10/\ f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

Sol: 1- أوسع مجال للدالة R

2- المحاذي الأفقي $y = 0$, المحاذي العمودي لا يوجد

3- نقاط التقاطع

نقطة التقاطع مع المحور الصادي $if\ x = 0 \Rightarrow y = 2\ , if\ y \neq 0 \Rightarrow (0,2)$

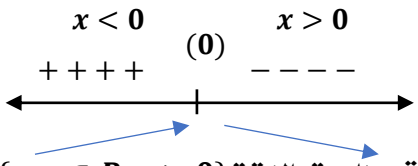
4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

5- النهايات

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)(0) - (6)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-12x}{(x^2+3)^2} = 0$$

$-12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$ نقطة حرجة



إشارة المشتقة الأولى

$\{x: x \in R; x > 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x: x \in R; x < 0\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(0,2)$ نقطة نهاية صغرى محلية

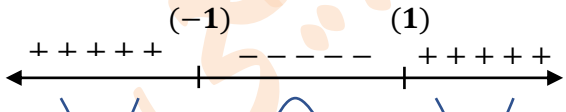
$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2 \cdot (-12) - (-12x) \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12(x^2+3)^2 - 48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3)+48x^2]}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2-36+48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3} = 0$$

$36x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 36x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$y = \frac{6}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ نقاط انقلاب مرشحة

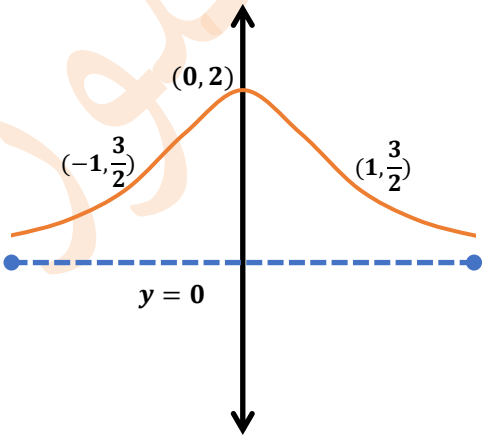


إشارة المشتقة الثانية

$\{x: x \in R; x > 1\}, \{x: x \in R; x < -1\}$ الدالة مقعرة بالفترتين

$\{x: x \in R; x \in (-1,1)\}$ الدالة محدبة بالفترة

$\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ نقاط انقلاب



تمارين عامة

س12/ باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $yx^2 = 1$

Sol: $y = \frac{1}{x^2}$

2018 تطبيقي د2 خارج

1- أوسع مجال للدالة $R/\{0\}$

2- المحاذي الأفقي $y = 0$, المحاذي العمودي $x = 0$

3- نقاط التقاطع $if\ y = 0 \Rightarrow x =$ غير معرف , $if\ x = 0 \Rightarrow y =$ غير معرف

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين $x \neq 0\ , y \neq 0$

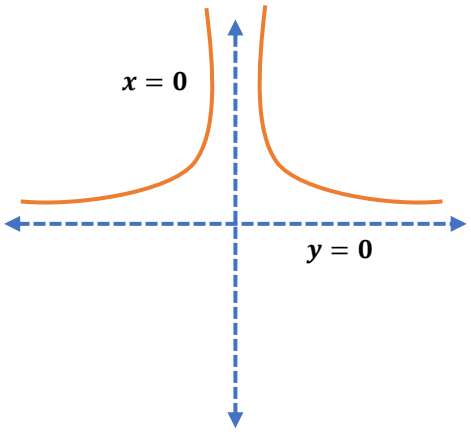
4- التناظر $\forall x \in R\ , \exists(-x) \in$ ؟

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x) \Rightarrow$ المنحني متناظر حول محور الصادات

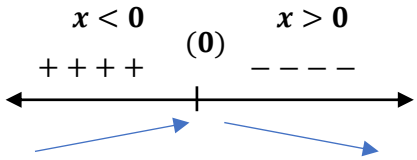
5- النهايات

$f'(x) = \frac{(x)(0)-(1)(2x)}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$

أي أنه لا توجد نقاط حرجة



إشارة المشتقة الأولى



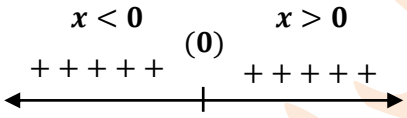
الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x \in R; x > 0\}$

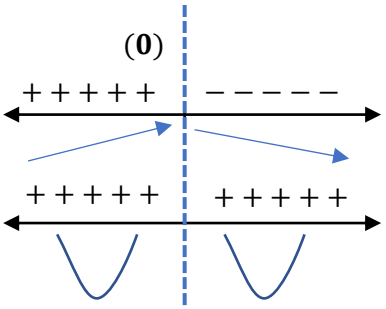
الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x < 0\}$

$f''(x) = \frac{x^2 \cdot (0)-(-2)(3x^2)}{x^6} = \frac{6}{x^4} \neq 0$

أي أنه لا توجد نقاط انقلاب

إشارة المشتقة الثانية





الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x < 0\}$

$\{x: x \in R; x > 0\}$

2014 د3

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = \frac{3}{x^2}$

الفصل الرابع : التكامل

الاسئلة الوزارية الخاصة بالتكامل غير المحدد

2017د 2 أحيائي موصل

1) $\int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$= 3\int \left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$= (3)\left(\frac{2}{3}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$

$= 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3} + c$

$\boxed{u = x^{\frac{1}{3}}+1}$

$\boxed{du = \frac{1}{3}x^{-2/3}\,dx}$

2015دور ثاني

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int \left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}(2)\left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{x}} + c$

---

3) $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

2015دور ثاني

$= \int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx = 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$= 3\left(\frac{3}{5}\right)(x-2)^{\frac{5}{3}} + c$

$= \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + c$

2017مهني

4)

$$= \int 3(2x-1)(2x^2-2x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)\int (2x^2-2x)^{\frac{1}{2}}\,[2(2x-1)]dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x^2-2x)^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{(2x^2-2x)^3} + c$$

$u = 2x^2 - 2x$

$du\ 4x-2 = 2(2x-1)dx$

2019د 3 احيائي

5)

$$= \int cos2x\,(1 - sin^2 2x)\,dx$$

$$= \int (cos2x - sin^2 2x\ \ cos 2x)dx$$

$$= (cos2x - sin^2 2x\, cos2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\,sin2x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)si^3 2x +$$

$$= \frac{1}{2}sin2x - \frac{1}{6}\,sin^3 2x + c$$

---

6)

$= \frac{1}{2}\int tan^3 2x\,.2sec^2 2x\ dx = \frac{1}{8}\,tan^4 2x + c$

$u = tan2x\,, du = 2sec^2 2x\,dx$

2017د 3 أحيائي داخل / 2018 د 2 أحيائي خارج

$u = tan\,x$

$du\ sec^2 x\,dx$

---

7)

$$\int \tan^{-3}x\,\sec^2 x\ dx = -\frac{1}{2}\tan^{-2}x + c = \frac{-1}{2tan^2 x} + c$$

---

8)

$= tan\,x\,.sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}tan^2 x + c$

$u = tanx\,, du = sec^2 x\,dx$

2018أحيائي د 3 داخل

9)

$$= 2\,cos^5 3x\,sin\,3x dx$$

$$= 2\left(\frac{-1}{3}\right)cos^5\,3x\,(-3sin3x)dx$$

$$= \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) cos^5 3x + c$$
$$= \left(\frac{-1}{9}\right) cos^6 3x + c$$

$u = cos3x\ du$
$du = -3sin3x\ dx$

2016دور اول

$$sin6x\ cos^2\ 3x\ dx = \int 2sin3x\ cos3x\ cos^2\ 3x\ dx$$
$$= 2\int cos^3\ 3x\ sin3x\ dx = (2)\left(\frac{-1}{3}\right)\int cos^3\ 3x\ (-3sin3x)\ dx$$
$$= \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) cos^4 3x + c = \left(\frac{-1}{6}\right) cos^4\ 3x + c$$

2020احيائي د1

تأكيد / يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة فالطريقة أعلاه تم توحيد الزوايا بدلالة 3x | وهناك طريقة أخرى باستخدام القانون $cos^2 3x = \frac{1}{2}(1 + cos\ 6x)$ كما سيرد ذكرها ادناه وهو ما سيتم تفصيله في الاحتمال الرابع.

$$\int \sin6x\ \cos^2 3x\ dx = \int \sin6x\left[\frac{1}{2}\ (1 + \cos6x)\right] dx$$
$$\frac{1}{2}\int \sin6x\ dx + \frac{1}{2}\int \sin6x\ \cos6x\ dx$$
$$\frac{1}{12}\int sin6x.\ 6dx + \frac{1}{12}\int sin6x\ (6cos6x)\ dx$$
$$= -\frac{1}{12} cos6x + \frac{1}{24}\ sin^2 6x\ c$$

تأكيد / يمكن حل $\frac{1}{2}\int \sin6x\ \cos6x\ dx$ بطريقتين إضافيتين الأولى نجعل القوس الأصلي هو cos6x ويكون الجواب $\frac{-1}{24}\ cos^2 6x$ والأخرى تحويل $\sin6x\ \cos6x = \frac{1}{2}\ \sin12x$ ثم اجراء التكامل cos26x

2014دور 1 / 2019احيائى د2 / 2017د 2 أحيائي موصل /

10) $\int \frac{cos\ 6x}{cos\ 3x - sin\ 3x}\ dx = \int \frac{cos^2 3x - sin^2\ 3x}{cos\ 3x - sin\ 3}$

$$\int \frac{(\cos3x - \sin3x)(\cos3x + \sin3x)}{\cos3x - \sin3x\ dx}\ dx$$
$$= \int (cos3x - sin3x)\ dx = \frac{1}{3}\ sin\ 3x + c$$

2019تطبيقي م 1 خارج / 2017د1 تطبيقي داخل / 2020احيائي د 2 داخل / 2017د 1 تطبيقي خارج

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$$

2001دور اول

11)

$$\int \sin^2 x.\cos^2 x\ dx = \int (\sin x.\cos x)^2\ dx = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx =$$
$$\frac{1}{4}\, s\int in^2\, 2x\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}(x - 1\, \sin 4x) + c$$

2000دور اول

2020احيائي د 3

12) $\int \sin^4 x\ dx = \int [\sin^2 x]^2\, dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right]\ dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right]\ dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right]\ dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + c$$

---

13) $\int (\cos x - \sin 2x)\ dx$

1998 د 1

$$\int (\cos x = \sin 2x)^2\ dx = \int (\cos^2 x - 2\sin 2x \cos x + \sin^2 2x)\, dx$$
$$= \int \left[(1 + \cos 2x) - 2\,.\,2\sin x \cos x\ \cos x + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\right] dx$$
$$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x + \frac{\square}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

2دور1999

14) $\int(sin^2x+cos^4x)\,dx$

$$=\int(sin^2x+cos^4x)\,dx=\int\left[\frac{1}{2}(1-cos2x)+(cos^2x)^2\right]dx$$

$$\int\left[\frac{1}{2}(1-cos2x)+\left(\frac{1}{2}(1+cos2x)\right)^2\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{2}(1-cos2x)+\frac{1}{4}(1+2cos2x+cos^22x)\right]dx$$

$$=\int\left[\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}cos2x\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}cos2x+\frac{1}{4}cos^22x\right)\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}cos^22x\right]dx+\int\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}(1+cos4x)\right]dx$$

$$\int\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}cos\,4x\right]dx=\int\left[\frac{7}{8}+\frac{1}{8}cos\,4x\right]dx$$

$$=\frac{7}{8}x+\frac{1}{32}sin4x+c$$

2دور2008

15) $\int cos^22x\,sinx\,dx=\int(cos2x)^2sinx\,dx$

$$\int(2cos^2x-1)^2\,sinx\,dx=\int(4cos^4x-4cos^2x+1)\,sinxdx$$

$$\int 4\,c\square s\,x\,sinx\,dx-4\int cos^2x\,sinx\,dx+\int sinx\,dx$$

$$-4\int cost^4x\,(-)sinx\,dx+4\int cos^2x\,(-)\,sinx\,dx+\int sinx\,dx$$

$$=\frac{-4}{5}cos^5x+cos^3x-cosx+c$$

2015دور 4 / 2017د1 أحيائي خارج

16) $\int(sin^22x+2sin2x\,.cos2x+cos^2\,2x)\,dx$

$$(1+sin4x)dx=x-\frac{1}{4}cos4x+c$$

2019تطبيقي د2 / 2014دور رابع انبار / 2013خارج / 017 2د1 أحيائي موصل

17) $\int\sqrt{1-sin2x\,dx}$

$$=\int\sqrt{(sin^2x-2sinx\,cosx+cos^2x)}\,dx$$

$$\int\sqrt{(sinx-cosx)^2}\,dx=\pm\int(sinx-cosx)\,dx$$

$$=\pm(-cosx-sinx)+c$$

2020تطبيقي د 2 داخل

18) $\int(3-sinx)^2\ dx = \int(9-6sinx+sin^2x)\ dx$

2020تطبيقي د 1

$$\int\left[9-6sinx+\frac{1}{2}(1-cos2x)\right]dx = \int\left(9-6sinx+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2x\right)dx$$
$$= \int\left(\frac{19}{2}-6sinx-\frac{1}{2}cos2x\right)dx = \frac{19}{2}x+6cosx-\frac{1}{4}sin2x+c$$

ملاحظة | يمكن اجراء التكامل من الخطوة الثالثة في الحل بالصورة التالية

$$\int\left[9-6\sin x+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]dx$$
$$= 9x+6\cos x+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c$$

2020تطبيقي د2 داخل

19)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(x^2+4)^3+c = \frac{1}{6}(x^2+4)^3+c$$

2020تطبيقي د2 تكميلي

20)

$$= 3\int(2x+5)^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{3}{2}(2x+5)^{\frac{3}{2}}\ 2dx$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(2x+5)^{\frac{5}{2}}+c = \frac{3}{5}\sqrt{(2x+5)^5}+c$$

2020تطبيقي ده تكميلي

21) $\int(cos2x\ sec\ x)(cos2x+secx)dx$

$$= (cos^2 2x - sec^2 x)dx = \int\left[\frac{1}{2}(1+cos4x)-sec^2x\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}sin4x-tanx+c$$

2020تطبيقي د3

22) $\int\frac{tan\ x}{cos^2 x}\ dx$

$$\tan x\sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x+c$$

يمكن حل السؤال بطريقتين أخرى ... حاول ذلك

وزاريات تمارين (4-4)

1-

$$\int \frac{(4x^2-12)(x^2)}{x^2}\,dx = \int (4x^2-12)\,dx = \frac{4}{3}x^3 - 12x + c$$

ملاحظة // يمكن حل السؤال باسلوب آخر وذلك بتحليل البسط فرق بين مربعين ثم التبسيط والاختصار للوصول الى نفس النتائج (جرب بنفسك)

2017د 3 تطبيقي داخل

$$\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx$$

2014خارج / 2010تمهيدي / 2017د 3 تطبيقي داخل

2- $\int \frac{cos^3}{1-sin\,x}dx = \int \frac{cosx.cos^2x}{1-sin\,x}dx$

$$\frac{cosx.(1-sin^2x)}{1-sin\,x}dx = \int \frac{cos\,x\,.(1-sin\,x)(1+sin\,x)}{1-sin\,x}\,dx$$

$$= \int (1+sinx)\,cos\,x\,dx = \frac{1}{2}(1+sinx)2 + c$$

ملاحظة // يمكن حل السؤال السابق بطريقة (ضرب البسط والمقام بمرافق المقام $1+\sin x$ فيصبح المقام عندها $=1-\sin^2 x$ cos^2x ليتم اختصاره مع البسط للوصول الى نفس النتيجة ، اما الخطوة قبل الأخيرة فيمكن اجراء التكامل بطرق أخرى (حاول ذلك)

2018د1 تطبيقي داخل

$$\int \frac{sin^3x}{1-cos\,x}\,dx$$

3- $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}dx$

$$= \int (3x^2+5)^{-4}\,x\,dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}\,6x\,dx$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(3x^2+5)^{-3} + c$$

$$= \frac{-1}{18(3x^2+5)^3} + c$$

2017 د1 تطبيقي موصل / 2020تطبيقي د 3

$$\int \frac{x}{(3x^2+7)^4}\,dx$$

1997دور ثاني / 2013دور ثاني

6-$\int (1+\cos 3x)^2 dx$

$$= \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)\,dx$$
$$= \int \left[1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right] dx$$
$$\int \left(1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx$$
$$\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx$$
$$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

7- $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx$

$$\int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{\sqrt{7}\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}\,x^{-\frac{1}{2}}\right)^7 x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\int \left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7 \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{35}}\right)\left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^8 + c$$
$$= \frac{-1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8 + c$$

$$u = 3 - \sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}$$
$$du = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

2017د 3 أحيائي داخل

$$\int \frac{(2-\sqrt{7x})^7}{\sqrt{5x}}\,dx$$

2013 دور اول / 2017 د 1 تطبيقي موصل

8-

$$\int csc^2x\,.cosx\,dx = \int \left(\frac{1}{sin^2x}.cosx\right)$$

$$\int \frac{cos\,x}{sin^2x}\,dx = \int \left(\frac{cosx}{sinx}.\frac{1}{sinx}\right)dx$$

$$= \int cotx.cscx\,dx = -csc + c$$

2020 احيائي د 3

9- $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\;dx$

$$\int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx = \int (x+5)^{\frac{2}{3}}dx$$

$$= \frac{3}{5}(x+5)^{5/3} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+5)^5} + c$$

تذكر / لو كان السؤال بالصورة $\sqrt{x^2+10x+25}$ ويتم تحويله الى $\sqrt{(x+5)^2}$ فانه

سيكون $\pm(x+5)$ وهذا الأمر يعمم على كل الجذور ذات الدليل الزوجي على أن تكون قوة القوس زوجية ايضا.

10- $\int \frac{cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

$$= \int cos\,(1-x)^{\frac{1}{2}}\,(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2\int cos(1-x)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$= -2\,sin\,(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = -2\,xin\sqrt{1-x} + c$$

$$\boxed{u = (1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{du = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx}$$

2017 تطبيقي موصل

$$\int \left(\frac{8cos\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} + x\right)dx$$

2017د 2 تطبيقي خارج / 2019احيائي د2

11- $\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx\,,x>0$

$$\int \frac{\left[x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}.\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{4}}\,dx$$

$$\int \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{2}{4}}\,dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= 2\int \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\,dx = (2)\left(\frac{2}{3}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{3}{2}}+c = \frac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{x}-1)^3}+c$$

$u = x^{\frac{1}{2}}-1$

$du = x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

2020احيائي د 2 داخل / 2015دور اول / 2017تمهيدي أحيائي

15- $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\,dx$

$$\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}\,dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}\csc^2 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(-2)\csc^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}}2x + c$$

16- $\int \sin^2 8x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 16x)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{16}\sin 16x\right)+c$

2017د 3 تطبيقي داخل

$$\int \sin^2 9x\,dx$$

17- $\int \cos^2 2x\,dx$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$$

18- $\cos^4 3x\,dx = \int [\cos^2 3x]^2\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]^2\,dx$

2018د 2 تطبيقي خارج

$$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 6x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 6x+\cos^2 6x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1+\cos 6x+\frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1+2\cos 6x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 12x\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2}+2\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 12x\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\,sin6x + \frac{1}{24}\,sin12x\right] + c$$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالنظرية الأساسية للتكامل

2014 د4 انبار

اذا كانت F دالة مستمرة على الفترة [1 , 5] بحيث ان $F(x) = 3x^2$ هي دالة مقابلة للدالة F

جد $\int_1^5 f$

الحل: $\int_1^5 f = [F(x)]_1^5 = [3x^2]_1^5 = (75) - (3) = 72$

2020احيائي د1 خارج

اثبت فيما اذا كانت الدالة $F: [0, 2\pi] \to R, F(x) = \frac{1}{2}sin2x$

هي دالة مقابلة للدالة $F: [0, 2\pi] \to R, F(x) = cos2x$ ثم أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\,dx$

2020احيائي د2 داخل

الحل / الدالة $F = \frac{1}{2}\sin 2x$ مستمرة على الفترة [0 , 2π] وقابلة للإشتقاق على $(0, 2\pi)$

الدالة f (x) = cos2x مستمرة على الفترة $[0, 2\pi]$

$\because F'(x)\,cos2x = f(x) \Rightarrow f(x)$ **هي دالة مقابلة للدالة** $F(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{os2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

تأكيد / لو كانت $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 4$ مثلا فإن اشتقاقها سيكون بنفس الكيفية السابقة لان مشتقة الثابت يكون صفرا

ولكن $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\,2x\,dx = \left[\frac{1}{2}sin2x + 4\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

للأننا استخدمنا مفهوم الدالة القابلة وليس قوانين التكامل الاعتيادية على الرغم من ان الجواب سيكون نفسه في الحالتين ... لذا وجب التنويه.

2017 د1موصل

اذا كانت الدالة $\frac{1}{2}\sin 2x$ = F(x) دالة مقابلة للدالة

f(x) المستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{4}]$ جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$

للسؤال نفس الحل السابق ولكن بخطوته الأخيرة فقط

2017احيائي د1 داخل /

اثبت فيما اذا كانت الدالة: $F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to R,\ F(x)=1-\cos x$

هي دالة مقابلة للدالة: $F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to R, F(x)=Sin\,x$ ثم اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$

2017احيائي د 2 خارج / واجب بيتيH.W

اذا كانت الدالة $F(x)=\sin x$ دالة مقابلة للدالة f(x) المستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx$

2018احيائي د 2 خارج / واجب بيتيH.W

اذا كانت الدالة $F(x)=2\sin 4x$ دالة مقابلة للدالة f(x) المستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

2017احياني د3 داخل / واجب بيتي H.W

اذا كانت الدالة $F(x)=2x^3$ دالة مقابلة للدالة f(x) المستمرة على الفترة $[1,4]$ جد $\int_1^4 f(x)dx$

2017احياني د3 داخل / واجب بيتي H.W

اذا كانت الدالة $F(x)=x^3-2$ دالة مقابلة للدالة f(x) المستمرة على الفترة $[2,4]$ جد $\int_2^4 f(x)dx$

2020احيائي د 3

اثبت فيما اذا كانت الدالة $F:[1,3]\to R, F(x)=x^3-7$

هي دالة مقابلة للدالة $f:[1,3]\to R, f(x)=3x^2$

ثم جد $\int_1^3 f(x)\,dx$ حسب البرهنة الأساسية للتكامل

Sol /

الدالة $F(x)=x^3-7$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على الفترة $[1,3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1,3)$

الدالة $f(x)=3x^2$ مستمرة على الفترة $[1,3]$

$$\because F'(x)=3x^2=f(x)\Rightarrow f(x) \text{ هي دالة مقابلة للدالة } F(x)$$

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 3x^2\,dx=[x^3]_1^3=(27-1)=26$$

2019 د1 تطبيقي خارج

اذا كانت $f(x)=\sqrt{7+x^2}$ اثبت انها دالة مقابلة للدالة $f(x)=\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}$ ثم جد $\int_1^3 f(x)dx$

علما انهما مستمرتين على الفترة $[1,3]$

الحل \ 1) الدالة $f(x)=\sqrt{7+x^2}$ مستمرة على الفترة $[1,3]$ لإن مجالها R

وقابلة للإشتقاق على الفترة $(1,3)$ لإن مجال المشتقة R

2) الدالة $f(x)=\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}$ مستمرة على الفترة $[1,3]$

3) $F'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{7+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}$

اي ان الدالة F(x) هي دالة مقابلة للدالة f(x)

$$\int_1^3 f(x)\,dx=[F(x)]_3^1=\left[\sqrt{7+x^2}\right]_1^3=\sqrt{7+9}-\sqrt{7+1}=4-2\sqrt{2}$$

تأكيدا \ بما ان الدالتين مستمرتين فلا يجب ذكر النقطتين 1 و 2 ويمكن الاكتفاء بذكر النقطة الثالثة فقط وفي حالة لم يذكر ان الدالتين مستمرتين في السؤال عندها يجب ذكرهما بعد ان نقوم بإستخراج مجالي الدالة ومشتقتها

تأكيد / لو كانت الدالة $f(x)=\sqrt{7+x^2}$ وكانت $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{7+x^2}}$ سيتم حساب مجال الدالة حسب الطريقة التالية $7-x^2\geq$

$$0\to x^2\leq 7\to -\sqrt{7}\leq x\leq\sqrt{7}$$

نيكون مجال الدالة $[\sqrt{-7}\ \sqrt{7}]$ عندها تكون الدالة غير مستمرة على $[1,3]$ وبالتالي فإن F(x) هي ليست دالة مقابلة للدالة f(x)

الاسئلة الوزارية الخاصة بالتكامل المحدد وخواصه

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ,\forall x < 1 \\ 3 & ,\forall x \geq 1 \end{cases}$ جد $\int_0^5 f(x)dx$

Sol / $f(1) = 3$

$$lim\, f(x) = 3\ L1 \quad , \quad lim\, f(x) = 2 + 1 = 3\ L2$$

الغاية موجودة $\Rightarrow$ $\because L1 = L2 = 3$

الدالة مستمرة عند ال(ا) = $\Rightarrow f(1) = lim\, f(x) = 3$

وكذلك الدالة مستمرة لكل $x<1$, $x>1$ لان الدالة الأولى كثيرة حدود والثانية دالة ثابتة وتعامل معاملة كثيرات الحدود

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x+1)\,dx + \int_1^5 3dx$$
$$= [x^2 + x]_0^1 + [3x]_1^5 = [(1+1) - (0)] + [(15) - (3)]$$
$$= 2 + 12 = 14$$

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3 & ,\forall x < 1 \\ 2X+1 & ,\forall x \geq 1 \end{cases}$ جد $\int_0^5 f(x)dx$

**تلميح/ لاحظ الفرق بين هذا المثال والثال الذي قبله قمنا بتبديل مواقع ترتيب الدالة ، ماذا تتوقع !! جرب بنفسك لترى ان الدالة تبقى مستمرة لكن ناتج التكامل سيكون مختلفا. 2019 احيائي د 1 داخل

الجواب $\int_0^5 f(x)dx = 31$

2011 دور اول

لتكن $f(x) = |x|$ جد $\int_{-3}^4 f(x)dx$

Sol /

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$f(0) = 0$

$$lim_{x \to 0(+)}\, f(x) = 0\ L1 \quad , \quad lim_{x \to 0(-)}\, f(x) = 0\ L2$$

يمكن ذكر أن الدالة مستمرة على [-3,4] فقط دون ذكر تفصيلا لاستمراريتها

$\because L1 = L2 = 0 \Rightarrow$ موجودة الغاية $\because f(0) = \lim f(x) = 0 \Rightarrow$ مستمرة الدالة

$$\int_{-3}^4 f(x)\,dx = \int_{-3}^0 f(x)\,dx + \int_0^4 f(x)\,dx = \int_{-3}^0 f(-x)\,dx + \int_0^4 x\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \left[(0) - \left(\frac{-9}{2}\right)\right] + [(8) - (0)] = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2} = 12.5$$

1997 د 1

جد $\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx$

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^8 2x\,(x^2-15)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(x^2-15)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$
$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2-15)^3}\;\right]_4^8 = \frac{1}{3}[\sqrt{(64-15)^3} - \sqrt{(16-15)^3}$$
$$= \frac{1}{3}(343-1) = \frac{342}{3} = 114$$

1998 د1

اذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx = \frac{-9}{4}$ جد قيمة $a \in R$

$$\text{Sol} / \int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4}$$
$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4}$$
$$= \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) = -2 \Rightarrow 2a^2 - a^4 = -8 \Rightarrow a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$
$$= (a^2-4)(a^2+2) = 0 \Rightarrow a2 - 4 = 0 \Rightarrow a2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$
$$a2 + 2 \neq 0$$

1998 د2

اذا كان $\int_a^b(2x+3)dx = 12$ وكان $a+2b=3$ جد قيمتي $a, \square \in R$

$$\text{Sol} / \int_a^b(2x+3)dx = 12 \Rightarrow [x^2+3x]_a^b = 12$$

$$(b^2+3b) - (a^2+3a) = 12 \Rightarrow b^2+3b-a^2-3a = 12 \ldots..(1)$$
$$a = 3-2b \ldots(2)\ in\ 1$$
$$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b) = 12$$
$$b^2+3b\,(9-12b+4b^2)\,9+6b-12 = 0$$
$$b^2+3b-9+12b-4b^2-9+6b-12 = 0$$
$$-3b^2+21b-30 = 0] \div (-3) \rightarrow b^2-7b+10 = 0$$
$$(b-2)(b-5) = 0 \rightarrow either\ b = 2 \rightarrow a = -1$$
$$Or\ b = 5 \rightarrow a = -7$$

2001 د 1 / جد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)\,dx$

$$sol: \int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)\,dx = \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}\,(2x+5)dx$$
$$\frac{2}{3}\left[(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+5x)^3}\;\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(36)^3} - \sqrt{(0)^3}\;\right)$$
$$= \frac{2}{3}(216) = 14$$

2000 د 2 / 2002 د 1 / 2005 د 2

جد $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx$

$$sol: \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx = \int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\, x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\, 2x\, dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2+9)^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{(16+9)^3}\right) - \left(\sqrt{(0+9)^3}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}\right] = \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}$$

2004 د 1

اذا كان $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = 2$ جد قيمة $a \in R$

$$\text{Sol} / \int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = 2 \Rightarrow \int_a^4 (x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\, x\, dx = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\, 2x\, dx = 2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2 \Rightarrow \left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2$$

$$= \left(\sqrt{16+9}\right)\left(\sqrt{a^2+9}\right) = 2 \Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

$$\sqrt{a^2+9} = 3 \Rightarrow a^2+9 = 9 \Rightarrow a^2 = 0\ a = 0$$

2001 د 2 / جد $\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1(3-2x)^2} = \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}\ (-2)dx = \frac{1}{2}\left[(3-2x)^{-1}\right]_{-1}^1$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

2003 د 2 / جد $\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_0^1 (3-2x)^{-2}\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (3-2x)^{-2}(-2)dx = \frac{1}{2}\left[(3-2x)^{-1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2002 / د 2/ جد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x}(x+6)\,dx$

$$\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}(x+6)\,dx$$

$$= \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}})\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 4\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{4^5} + 4\sqrt{4^3}\right) - (0) = \frac{64}{5} + 32 = \frac{224}{5}$$

2004 د 2 / 2015 د1 خارج | جد $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3 - 2x^5}\,dx$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}\,dx = \int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}} x\,dx$$

$$= \frac{-1}{4}\int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}}(-4)x\,dx = \frac{-1}{4}\,\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{16}(1-1) = 0$$

2006 د 1 / جد $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} = \int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2} = \int_1^2 (5-2x)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int_1^2 (5-2x)^{-2}\,(-2)dx = \frac{1}{2}[(5-2x)^{-1}]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5-2x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2009 د 1 / جد $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}$

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} = \int_0^1 (x^2+1)^{-2}\,xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}\,2xdx$$

$$= \frac{-1}{2}[(x^2+1)^{-1}]_0^1 = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}$$

2008 تمهيدي / جد $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = \int_0^7 (x+1)^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7 = \frac{3}{2}\left[\sqrt{(x+-1)^2}\right]_0^7$$

$$= \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}$$

2008 د 1 / اذا كانت $\int_a^b f(x)\,dx = 3$ ، $\int_c^b f(x)\,dx$

وكانت $c \in [a,b]$ جد قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$5 = \int_a^c f(x)dx + 3 \rightarrow \int_a^c f(x)dx = 2$$

2009 د 2 / جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$

2018 د 2 احيائي خارج

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}dx$$

$$= \int_3^8 \frac{x}{|x|\sqrt{(x+1)}}dx = \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}}dx$$

$$= \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{(x+1)}}\,dx = \int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = 2\left[\sqrt{x+1}\right]_3^8 = 2(3-2) = 2$$

$$|x| = \begin{cases} -x\,, x < 0 \\ x\,, x \geq 0 \end{cases}$$

2006 د 2 / جد $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{(3x-4)^2} = \int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2} = \int_1^2 (3x-4)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (3x-4)^{-2}\,(3)dx = \frac{-1}{3}\left[(3x-4)^{-1}\right]_1^2$$

$$= \frac{-1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_1^2 = \frac{-1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

تلميح \\ السؤال بالمفهوم العلمي يعد خاطئاً لإن مجال التكامل هو $R/\{\frac{4}{3}\}$ والقيمة المستثناة توجد ضمن الفترة المعطاة وبعد ضمن التكاملات المعتلة التي لليمكن تكاملها منهجيا ويمكن أن يكسب السؤال الصحة العلمية اذا ماتبدلت حدود التكامل .

201 دا / 2019 تطبيقي د 1 داخل / جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + +2\sin x\cos x + \cos^2 x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x)\,dx = \left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0 - = \frac{1}{2}\cos 0\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

2015 نازحين داخل / جد $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx = \int (\sin x)^{-\frac{1}{3}}\cos x\,dx = \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt{\sin^2 x} + c$$

2017 د 1 احيائي خارج / جد $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}dx = \int_0^1 x(\sqrt{x}+1)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + x\right) dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left[\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) - (0)\right] = \frac{9}{10}$$

تأكيد / في السؤال السابق قد ناقض واضع السؤال الكتاب المنهجي في وجوب استمرارية أي دالة أو غيرها على الفترة المغلقة قبل التفكير في إيجاد تكاملها وما لا يقبل الشك ان دالة السؤال غير مستمرة على احد حدود التكامل وهو العدد { 1 } لأنه جعل المقام صفر عندها لا يجوز التحليل والاختصار الا في الرياضيات المتقدمة وبسبب تكرار هذه الظاهرة والأكثر من مرة في الأسئلة الوزارية من خلال اختيار أسئلة في التكامل غير مستمرة على احد طرفي الفترة المحددة للتكامل لذا انصح طلبتنا تجاهل تحقق الاستمرارية في هذه الأسئلة والشروع بعملية التكامل لحين ورود تأكيد رسمي يبين جواز او عدم جواز ما كرره واضع الأسئلة الوزارية ولأكثر من مناسبة ... لذا اقتضى التنويه.

2018 د1 تطبيقي داخل / جد $\int_4^0 x(x-1)(x-2)dx$

$$sol: \int_4^0 x\,(x-1)(x-2)\,dx = \int_0^4 x(x^2 - 3x + 2)\,dx$$
$$= -\int_0^4 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2\right]_0^4$$
$$-[(64 - 64 + 16) - (0)] = -16$$

تأكيد/في التكاملات التي يكون فيها الحد الأعلى أصغر من الحد الأدنى يفضل اجراء التبديل على مواقع حدود التكامل مع اخراج إشارة سالبة الى الخارج ثم تطبيق كل قواعد التكامل علما ان الجواب يبقى نفسه في حالة عدم تطبيق الخاصية.

2018 د 1 احيائي خارج / جد $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin\,2x\,sin^2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin\,2x\,sin^2x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sinx\,cosx\,sin^2x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^3x\,cosx\,dx$$
$$= \frac{2}{4}\,[sin^4]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left[\left(sin\frac{\pi}{6}\right)^4 - (sin0)^4\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{32}$$

تأكيد / من المعلوم انه لا يمكن اجراء التكامل الا اذا كانت الزوايا موحدة وفي الحل أعلاه تم تحويل الزاوية من حالة الضعف إلى حالة النصف ... فهل يمكنك تحويل الزاوية من حالة النصف الى حالة الضعف أي بجعل كل من الزاويتين (2x) للحصول على نفس الناتج ... حاول وستنجح ....

2018 د3 داخل / جد قيمة التكامل $\int_{-1}^{4}[8-2f(x)]\,dx$ اذا كان $\int_{-1}^{4}f(x)=2$

$$\int_{-1}^{4}[8-2f(x)]\,dx = \int_{-1}^{4}8dx - \int_{-1}^{4}[2f(x)]\,dx = [8x]_{-1}^{4} - 2\,,\int_{-1}^{4}f(x)dx$$
$$= [(32)-(-8)] - 2(2) = 40 - 4 = 36$$

2020 احيائي د 1 / جد $\int_{4}^{1}\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)$

$$\int_{4}^{1}\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1) = -\int_{1}^{4}x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)ax = -\int_{1}^{4}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= -\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = -\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4$$
$$= -\left[\left(8+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\right] = -\left(8+\frac{16}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)$$
$$= -\left(8+\frac{14}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{48+28-3}{6}\right) = -\frac{73}{6}$$

2020 تطبيقي د 1 / لتكن $|2x-4|$ جد $\int_{-3}^{4}f(x)dx$ حيث $f(x)$

$$f(x) = |2x-4| \begin{cases} 2x-4\,, & x \geq 2 \\ -2x+4\,, & x < 2 \end{cases}$$

الدالة مستمرة على [-3,4]

$$\int_{-3}^{4}f(x)dx = \int_{-3}^{2}f(x)dx + \int_{2}^{4}f(x)dx = \int_{-3}^{2}(-2x+4)\,dx + \int_{2}^{4}(2x-4)\,dx$$
$$= [x^2+4x]_{-3}^{2} + [x^2-4x]_{2}^{4}$$
$$= [(-4+8)-(-9-12)] + [(16-16)-(4-8)]$$
$$= [4+21]+[0+4] = 25+4 = 29$$

وزاريات تمارين / التكامل المحدد

س 1 / احسب كلا من التكاملات التالية :

c) $\int_{1}^{3}(x^4+4x)dx = \left[\frac{1}{5}x^5+2x^2\right]_1^3$

2017 احيائي داخل

$$= \left(\frac{1}{5}(3)^5+2(3)^2\right)-\left(\frac{1}{5}(1)^5+2(1)^2\right)$$
$$= \frac{243}{5}+18\,)-\left(\frac{1}{5}+2\right) = (\frac{243}{5}+18-\frac{1}{5}-2\,)$$
$$= \frac{242}{5}+16 = \frac{242+80}{5} = \frac{322}{5}$$

2018 تمهيدي احيائي / 2015 د 4 رصافة

f) $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1} = -\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1} = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$

$$= -\int_2^3 (x^2 + x + 1)\,dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_2^3$$

$$= -\left[\left(9 + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2\right)\right] = -\left[12 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} - 4\right]$$

$$= -8 + -\frac{9}{2} + \frac{8}{3} = \frac{-48 - 27 + 16}{6} = \frac{-59}{6}$$

2017 د 1 احيائي موصل

d) $\int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2 dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 2\right)^2 dx$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x + 4x^{\frac{1}{2}}\,6 + 4\right) dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 4x + \square x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2x^2 + \frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

2020 تطبيق د 2 داخل

G) $\int_1^3 \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2}\,dx = \int_1^3 (2x^3 - 4x^2 + 5)\,x^{-2}dx$

$$= \int_1^3 (2x - 4 + 5x^{-2})\,dx = [x^2 - 4x - 5x^{-1}]_1^3 = \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$= \left(9 - 12 - \frac{5}{3}\right) - (1 - 4 - 5) = -3 - \frac{5}{3} + 8 = = \frac{10}{3}$$

---

4) اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x\,, \forall\ x \geq 3 \\ 6\,, \forall x < 3 \end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x)\,dx$

2018 تطبيقي د 3 داخل / 2015 د 2 خارج

Sol / $f(3) = (2)(3) = 6$

$\lim f(x) = (2)(3) = 6\ \ L1\,, \quad \lim f(x) = 6\ \ L2$

$x \to 3(-) x \to 3(+)$

$\because L1 = L2 = 6 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(3) = \lim f(x) = 6 \Rightarrow$ الدالة مستمرة عند الـ(3)

وكذلك الدالة مستمرة لكل $x<3\,,\ x>3$ لانهما كثيرتا الحدود

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_1^3 6dx + \int_3^4 2x\,dx$$

$$= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4 = [(18) - (6)] + [(16)(9)] = 12 + 7 = 19$$

---

5) اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 , \forall\ x \geq 0 \\ 2x , \forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)\ dx$

2020 احيائي د1 خارج / 2017 احيائي تمهيدي

$Sol/\ \ f(0) = 0$

$lim\ f(x) = 0 \quad L1 , \qquad lim\ f(x) = 0 \quad L2$

$x \to 0(-) x \to 0(+)$

$\because L1 = L2 = 0 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(0) = lim\ f(x) = 0 \Rightarrow (0)$ الدالة مستمرة عند الـ

وكذلك الدالة مستمرة لكل $x < 0 , x > 0$ لانهما كثيرتا الحدود

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (2x)dx + \int_{0}^{3} (3x^2)\,dx$$
$$= [x^2]_{-1}^{0} + [x^3]_{0}^{3} = [(0) - (1)] + [(27) - (0)]$$
$$= -1 + 27 = 26$$

اللوغارتم الطبيعي The

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

$y = e^{-5x^2+3x+5}$

2020 احيائي د1 خارج

$Sol: \frac{dy}{dx} = (-10x + 3)e^{-5x^2+3x+5}$

$y = 7^{\sqrt{x}}$

2020 تطبيقي د 1 خارج

$Sol: \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} 7^{\sqrt{x}} . \ln 7 = \frac{7^{\sqrt{x}} . ln\ 7}{2\sqrt{x}}$

$y = x^3\ e^x$

2020 تطبيقي د 1 خارج

$Sol: \frac{dy}{dx} = (x^3 . e^x + e^x . 3x^2) = x^3 . e^x + 3x^2 . e^x$

$y = In(tan^2 x)$

2020 تطبيقي د 1 خارج

$sol: \frac{dy}{dx} = \frac{1}{tan^2 x}(2tanx . sec^2 x) = 2cotx . sec^2 x\ tan^2 x$

$y = \cos e^{\pi x}$

2020 احيائي د 2 تكميلي

$sol: \frac{dy}{dx} = -\pi e^{\pi x} \sin e^{\pi x}$

$y = 3\sqrt{x}$

2020 احيائي د 2 تكميلي

$sol: \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = ln\ 3.3^{\sqrt{x}}$

$y = 3x^2 ln\ |x|$

2020 احيائي د 2 تكميلي

$sol: \frac{dy}{dx} = 3x^2 . \left(\frac{1}{x}\right) + ln\ |x| . 6x = 3x + 6x\ ln|x|$

جد التكاملات التالية

2013 دور 3 / 2012 تمهيدي / 2016 تمهيدي

1) $\int x . e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x . e^2 dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tanx\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin}{cosx}\ dx = [-ln|cos\ x|]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left[\left(ln\ \left|cos\frac{\pi}{3}\right|\right) - (ln\ |cos\ 0|)\right]$

$= -\left[ln\ \left|\frac{1}{2}\right|\right] - (ln|1|)] = -(ln\frac{1}{2} - 0\ ) = -ln\frac{1}{2}$

2014 دور ثاني /

3) $Sol / \int \frac{x}{(3x^2+5)}\ dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+5} dx = \frac{1}{6} ln\ (3x^2 + 5\ ) + c$

لاحظ اننا لم نضع القيمة المطلقة بعد اجراء التكامل لان الناتج مجموع مربعين ويكون موجبا

2018 د 2 احيائي خارج

4) $\int \frac{5x^2}{3x^3+7}\ dx$

---

5) $\int \sqrt{e^{2x} - 4}\ \ dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}}\ dx = \int e^{x-2}\ dx = e^{x-2} + c$

نلاحظ ان التربيع عندما الغى الجذر التربيعي لم نترك $\mp$ لأن الاساس ثابت وليس المتغير

---

6) $\int(\tan x - \sec^2 x)\,dx \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx - \int \sec^2 x\,dx$

Sol /

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx - \int \sec^2 x\,dx = -\ln|\cos x| - \tan x + c$$

وزاريات تمارين / اللوغارتم الطيبعي

2) جد التكاملات التالية

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln|x+1|]_0^3 = (\ln 4) - (\ln 1) = \ln 4$

2015 تمهيدي / 2012 تمهيدي / 2019 د 3 احيائي / 2020 تطبيقي د1

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = [\ln|x^2+9|]_0^4$

$$(\ln 25) - (\ln 9) = \ln\frac{25}{9}$$

$$\int_0^4 \frac{12x}{x^2+9} = 6\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} = 6[\ln|x^2+9|]_0^4$$

$$6[(\ln 25) - (\ln 9)] = 6\ln\frac{25}{9}$$

2020 احيائي د 2 داخل

2012 دور اول / 2014 دور ثاني

c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{ln3}^{ln5} = \frac{1}{2}(e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3})$

$$= \frac{1}{2}\left[(e^{\ln 5})^2 - (e^{\ln 3})^2\right] = \frac{1}{2}[(5)^2 - (3)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[25 - 9] = (\frac{1}{2})(16) = 8$$

2016 دور ثاني / 2017 د 1 تطبيقي خارج

d)

$$= -\left((e^{\ln 2})^{-1} - 1\right) = -(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{2}$$

2011 دور اول / 2013 دور ثاني / 2016 تمهيدي

$\boxed{u = 1 + e^x \rightarrow du = e^x dx}$

$$= \frac{1}{3}[(1 + e^1)^3 - (1 + e^0)^3]$$

$$= \frac{1}{3}[(1 + e^1)^3 - (1 + 1)^3]$$

$$\frac{1}{3} = [(1 + e^1)^3 - 8]$$

e)

2012 دور ثاني / 2011 دور ثاني / 2012 خارج /2018 احيائي د3 داخل

$$= \left[In\left| x^3 + 4x + 1 \right|\right]_0^1$$
$$= ln6 - ln1 = ln6$$

---

f) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

2020 د2 تكميلي / 2015 دور ثاني / 2017 تمهيدي تطبيقي / 2017 تمهيدي احيائي

$$\boxed{u = \sqrt{x}\ , du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx}$$

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = \left(e^{\sqrt{4}}\right) - \left(e^{\sqrt{1}}\right) = e^2 - e$$

2018 د1 أحيائي داخل

$$\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$$

g) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2 x}{(2+tanx)}$

2018 د1 حارج تطبيقي / 2011 دور اول / 2019 د3 تطبيقي

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2 x}{(2+tanx)} = [ln\,(2 + tan\,\square)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$\left[ln\left(2 + tan\frac{\pi}{4}\right) - In\left(2 + tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$
$$\left[ln\left(2 + tan\frac{\pi}{4}\right) - In\left(2 - tan\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= ln\,(2+1) - In(2 - 1)$$
$$= ln3 - ln1 = ln3$$

h)

2015 تمهيدي / 2020 احيائي د2 تكميلي

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{si\square\, x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sin)^{-\frac{1}{2}}\ cos\,x = \left[2(sin\,x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[2\sqrt{sin\,x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(2\sqrt{sin\frac{\pi}{2}}\right) - \left(2\sqrt{sin\frac{\pi}{6}}\right) = (2\sqrt{1}) - \left(2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

i) $\int cot^3 5x\ dx$

2016 د3 احيائي داخل / 2020 تطبيقي د1 خارج / 2018 تطبيقي د3 داخل / 2017 د2 احيائي داخل / 2020 احيائي د2 تكميلي

$$\int cot^3 5x\ dx = \int cot^2 5x\, cot5x\ dx = \int (csc^2 5x - 1)\ cot5x dx$$

$$\int (cot5x\ csc^2 5x - cot5x)\, dx$$

$$= \left(-\frac{1}{5} cot5x\ (-5csc^2 5x) - \frac{1}{5}\frac{5cos5x}{5sin5x}\right)dx$$

$$-\frac{1}{10} cot^2 5x - \frac{1}{5} ln|sin5x| + c$$

---

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx} sinx\ dx$

2011 خارج / 2017 د1 تطبيقي داخل / 2018 د2 تطبيقي خارج / 2020 احيائي د1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx} sinx\ dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cos}\ (-sinx)dx = [-e^{cosx}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-e^{cos\frac{\pi}{2}}\right) - (-e^{cos0}) = -e^0 + e^1 = -1 + e$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2siny}\ cosy\ dy$$

$$\int x\ e^{cosx^2} sinx^2\ dx$$

$$\int e^{cosx}\ sinx\ dx$$ حاول بنفسك

---

k) $\int_1^2 xe^{-lnx}\ dx$

2015 نازحين / 2014 خارج

$$\int_1^2 x(e^{-lnx}\ dx = \int_1^2 x(e^{-lnx})^{-1}\ dx = \int_0^2 x.x^{-1}\ dx$$

$$\int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

حاول بنفسك

$\int_2^5 3xe^{-lnx} dx$ — 2017 د2 تطبيقي موصل

$\int_1^3 3x\ e^{lnx} dx$ — 2017 د2 تطبيقي خارج

$\int_1^3 xe^{-lnx}\ dx$ — 2019 تمهيدي احيائي

$\int_1^2 8x\ e^{-lnx}\ dx$ — 2019 تطبيقي د1 خارج

$\int xe^{3lnx}\ dx$ — 2020 تطبيقي د1

3) اثبت ان :

2015 د2 خارج / 2019احيائي د1 خارج

A) $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2 = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} x^{-\frac{-2}{3}}\,dx$$

$$= \left[3.\frac{2}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \left[2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3}\right]_1^8$$

$$= \left(2\sqrt{\left(\sqrt[3]{8}-1\right)^3}\right) - \left(2\sqrt{\left(\sqrt[3]{1}-1\right)^3}\right) = \left(2\sqrt{(1)^3}\right) - \left(2\sqrt{(0)^3}\right) = 2$$

حاول بنفسك / 2018 د2 أحيائي خارج

B) $\int_0^{27} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

2014 دور ثالث / 2017 د2 احيائي خارج / 2019تمهيدي احيائي/ 2017 د3 تطبيقي داخل

$Sol: |3x-6| = \begin{cases} 3x-6, & x \geq 2 \\ -x+6, & x < 2 \end{cases}$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to 2(+)} f(x) = 0 \quad L1 \;,\quad \lim_{x\to 2(-)} f(x) = 0 \quad L2 \quad \because L1 = L2 = 0 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 0 \Rightarrow$ الدالة مستمرة

$$\int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = \int_{-2}^2 (-3x+6)dx + \int_2^4 (3x\,6-6)\,dx$$

$$= \left[-\frac{3}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^2 + \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_2^4$$

$$= [(-6+12) - (-6-12)] + [(24-24) - (6-12)]$$

$$= (6+18) + (6) = 30$$

4) f(x) دالة مستمرة على الفترة [-2 ,6] فاذا كان $\int_1^6 f(x)dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x)+3]dx = 32$

جد $\int_{-2}^1 f(x)dx$

2019 احيائي دور 2 / 2016 دور اول / 2020 احيائي د 2 تكميلي

$$\int_{-2}^{6}[f(x)+\square]dx=32 \Rightarrow \int_{-2}^{6}[f(x)]dx+\int_{-2}^{6}[3x]=32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx+[3x]_{-2}^{6}=32 \Rightarrow \int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx+(18)-(-6)=32$$

$$\therefore \int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx+24=32 \Rightarrow \int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx=8 \;,\because \int_{1}^{6}[f(x)]\,dx=6$$

$$\int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{6}f(x)dx$$

$$\Rightarrow 8=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx+6=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx=2$$

5) جد قيمة $a\in R$ اذا علمت ان $\int_{1}^{a}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}sec^2x\,dx$

2014 تمهيدي / 2017 د2 تطبيقي داخل / 2019 د3 احيائي / 2018 د2 تطبيقي داخل

$$\int_{1}^{a}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}sec^2x\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{1}^{a}=2\,[tanx]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(tan\frac{\pi}{4}\right)-(tan0)\right]$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1=2(1-0) \Rightarrow \left[\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1=2\right].2$$

$$a^2+a-2=4 \Rightarrow a^2+a-6=0 \Rightarrow (a+3)(a-2)=0$$

$$a=-3 \quad Or\ a=2$$

6) لتكن $k\in R$ حيث $f(x)=x^2+2x+k$ دالة نهايتها الصغرى (-5) جد $\int_{1}^{3}f(x)\,dx$

2020 تطبيقي دور 2 داخل / 2015 دور 4

$Sol: f'(x)=0$ بما ان الدالة تمتلك نهاية صغرى فأن

$$f'(x)=2x+2 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$$

$\because f''(x)=2>0 \Rightarrow$ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

$\therefore (-1,-5)$ نقطة النهاية الصغرى المحلية $\in f(x)$

$$-5=1-2+k \rightarrow k=-4 \rightarrow f(x)=x^2+2x-$$

$$\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{3}(x^2+2x-4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-4x\right]_{1}^{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}(3)^3+(3)^2-4(3)\right)-\left(\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2-4(1)\right)$$

$$=(9+9-12)-\left(\frac{1}{3}+1-4\right)=6-\frac{1}{3}+3=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

7) اذا كان المنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ يمتلك نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$

2017 د1 احيائي داخل / 2019 احيائي د1 خارج / 2020 تطبيقي د2 تكميلي

Sol / نقطة الانقلاب ناتجة من مساواة المشتقة الثانية بالصفر

$$f'(x) = 3(x-3)^2 \rightarrow f''(x) = 6(x-3) \rightarrow 6(x-3) = 0 \rightarrow x = 3$$

$$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1 \rightarrow (3,1) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$(3,1) = (a,b) = a = 3, b = 1$$

$$\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx = \int_0^1 3(x-3)^2 dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$= [(x-3)^3]_0^1 [3(x-3)^2]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)^3] - [3(3-3)^2 - 3(0-3)^2]$$

$$= [-8 + 27] - [0 - 27] = 19 + 27 = 46$$

التمارين العامة الخاصة بالموضوع

س 6 // جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما ياتي :

2019 تطبيقي د3 داخل

c) $y = e^{x^2} \ln|2x|$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} \cdot \frac{1}{2x}(2) + \ln|2x| \cdot 2x\, e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xe^{x^2} \ln|2x|$$

---

e) $y = x^2 \ln|x|$ 2019 د3 تطبيقي

sol: $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln|x| \cdot 2x = x + 2x\ln|x|$

س 14 // جد التكاملات التالية

d) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2\int \sin x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 6\int \sin x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx$

$= -6\cos x^{\frac{1}{3}} + c = -6\cos\sqrt[3]{x} + c$

$\int x^2 \sin x^3 dx$ 2017 د3 احيائي داخل

e) $\cot x \csc^3 x\, dx = \int c\square c^2 x\,(\csc x \cot x)\, dx$

$= -\csc^2 x\,(-\csc x \cot x)dx = -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$ 2012 دور / 2019 تمهيدي

---

f) $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\, dx = \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\, dx = \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}} \square\, dx$

$= \frac{-1}{10}\int (3 - 5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10x)\, dx = \frac{-1}{10}\cdot\frac{3}{4}(3 - 5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{-3}{40}\sqrt[3]{(3-5x^2)^4} + c$ 2019 تطبيقي د1 داخل

---

h) $\int \sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\, d\square = \frac{1}{3}\int \sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + c$

2018 تمهيدي احيائي / 2018 د1 احيائي خارج / 2019 احيائي د1 داخل

$\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x}\, dx$ 2020 تطبيقي د3 / 2015 خارج

$\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x}\, dx = \frac{1}{8}\int 8\sec^2 8x\, e^{\tan 8x}\, dx = \frac{1}{8} e^{\tan 8x} + c$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالمساحات

جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^3 - 4\square$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$

2007 تمهيدي

$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$x = 0 \in [-2,2]$ يجزئ $OR\ x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \in [-2,2]$ لا يجزئ

$$A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} f(x)dx\right|$$

$$\left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$|(0) - (4-8)| + |(4-8) - 0|$$

$= |4| + |-4| = 4 + 4 = 8$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3 - 9x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-3, 3]$

جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمين x=1, x=3 2003 دور ثالث

$$if\ y = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \notin [1,3]$$

$$A = \left| \int_1^3 f(x)dx \right| = \left| \int_1^3 (x^2)\,dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3\right] \right|$$

$= \left|(9) - \left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{26}{3}\right| = \frac{26}{3}$ وحدة مساحة

2017 تطبيقي د3 داخل / 2006 تمهيدي / 2013 دور اول

جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

2020 احيائي د1 خارج

$$if\ y = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$
$$\rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \rightarrow x(x-2)(x-1) = 0$$
$$x = 0\ OR\ x = 2\ OR\ x = 1$$

$$A = \left| \int_0^1 f(x)dx \right| + \left| \int_1^2 f(x)dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2 \right|$$

$$\left|\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0)\right| + \left|(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right|$$

$$\left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 3x^2 + 4$ ومحور السينات بالفترة [-2,2]

2008 تمهيدي / 2010 تمهيدي

$y \neq 0$ دائماً $3x^2 + 4 > 0$ حيث

$$A = \left| \int_{-2}^2 f(x)dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (3x^2 + 4)\,dx \right|$$

$$\left|[x^3 + 4x]_{-2}^2\right| = |(8 + 8) - (-8 - 8)|$$

$= |16 + 16| = 32$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة [-2,3]

$$if\ y = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \mp 1 \in [-2,3]$$

$$A = \left| \int_{-2}^{-1} f(x)dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} f(x)dx \right| + \left| \int_1^3 f(x)dx \right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{-1}(x^2 - 1)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)dx\right| + \left|\int_{1}^{3}(x^2 - 1)dx\right|$$

$$\left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{3}\right|$$

$$= \left|(-\frac{1}{3}+1) - (-\frac{8}{3}+2)\right| + \left|(\frac{1}{3}-1) - (-\frac{1}{3}+1)\right| + \left|(9-3) - \left(\frac{1}{3}-1\right)\right|$$

$$\left|\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right| + \left|6+\frac{2}{3}\right|$$

$\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3} = \frac{28}{3}$ وحدة مساحة

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 4$ ومحور السينات وعلى الفترة [-2,3]

A= 13 unit ^{2} 2014 تمهيدي

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = sin\ 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2018 احيائي د1 داخل / 2007 دور اول

$$if\ y = 0 \rightarrow sin4x = 0 \rightarrow 4x = 0 + n\pi, n = 0,1,2$$

$$n = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], n = 1 \rightarrow 4x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$n = 2 \rightarrow 4x = 2\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin\ 4x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sin\ 4x)dx\right|$$

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة.

$$= \left|\left[-\frac{1}{4}\ cos4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[-\frac{1}{4}cos4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{4}|(cos\ \pi) - (cos0)| + \frac{1}{4}|(cos2\pi) - |(cos\ 2\pi) - (cos\pi)|$$

$$= \frac{1}{4}|(-1) - (1)| + \frac{1}{4}|(1) - (-1)| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بالمنحني $y = cos\ x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$

2018 تطبيقي د1 خارج

$$Sol: cosx = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , n = ?, 1, 2, -1, -2$$

$$n = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi], \qquad n = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-T, T], n = -2 \rightarrow x = \frac{-3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$$

$$A = \left|\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right| + \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\right|$$

$$\left|\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (cos\ x)dx\right| + \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\ x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (cos\ x)dx\right|$$

$$= \left|[sinx]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[sinx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[sinx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\left(sin\ -\frac{\pi}{2}\right) - (sin\ -\pi)\right| + \left|\left(sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(sin\ -\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|(sin\ \pi) - (sin\ \frac{\pi}{2})\right|$$

$$= |-1\ -\ 0| + |1\ +\ 1| + |0\ -\ 1| = 1 + 2 + 1 = 4$$ وحدة مساحة

تأكيد //

1- كانت $\sin ax, \cos ax = \pm\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ نستخرج زاوية اسناد ثم نستخرج قيمة x حسب موقع الزاوية في الارباع الاربعة .

2- اذا كانت $\tan ax, \cot ax = \pm\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, 1\right\}$ نستخرج زاوية اسناد ثم نستخرج قيمة x حسب موقع الزاوية في الارباع الاربعة .

3- اذا كانت $\sin ax, \cos ax = \{1, -1\}$ نستخرج قيمةء من خلال موقعها في دائرة الواحدة

4- كل زاوية يتم استخراجها نضيف لها $2n\pi$ حيث ان .... $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ حسب الحاجة

علما ان الملاحظة الرابعة تعد خارج حدود الاسئلة المنهجية وتستخدم في حالات خاصة

مثال / جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

2011 دور اول

$h(x) = \sqrt{x} - x \rightarrow \sqrt{x} - x = 0 \rightarrow [\sqrt{x} = x]$ تربيع الطرفين

$x = x^2 \rightarrow x - x^2 = 0 \rightarrow x(1 - x = 0 \rightarrow x = 0 \ OR \ x = 1$

$$A = \left| \int_0^1 h(x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right)dx \right|$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^3} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \left|\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right| - (0 - 0) = \left|\frac{4-3}{6}\right| = \frac{1}{6}$$ وحدة مساحة

مثال / جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

2015 تمهيدي / 2017 د1 احيائي / 2017 د3 احيائي داخل / 2018 د1 احيائي داخل / 2019 د3 تطبيقي

Sol:

$h(x) = x^3 - x \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = 0 \quad OR \quad x = 1 \quad 0R \quad x = -1$

$$A = \left| \int_{-1}^0 h(x)\,dx \right| + \left| \int_0^1 h(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x)\,dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x)\,dx \right|$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \left|(0 - 0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = y = x^2 + 5x - 4$ والمستقيم $y = 6x + 2$

2017 احيائي د1 خارج

$$h(x) = (x\,\hat{}\,2 + 5x - 4) - (6x + 2)$$
$$= x^2 + 5x - 4 - 6x - 2 = x^2 - x - 6$$

$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 3 \ OR \ x = -2$ حدود التكامل

$A = \int_{-2}^{3}(x^2 - x - 6)\ dx$ اكمل الحل ولا تنسى التكامل ومن ثم التعويض

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = \sin 2x , g(x) = sin\ x$ وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

f (x) = sin2x , g (x) = sinx الدالتين بمنعني العددة ية [0 5] الفترة وعلى

2005 دور 2 / 2006 دور 1

Sol:

$h(x) = \sin 2x = \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x =$

$= \sin x(2\cos x - 1)\ \sin x(2\cos x - 1) = 0$

$sin\ x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ اما لايجزئ $or\ x = \pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$cos\ x - 1 = 0 \rightarrow 2cos\ x = 1 \rightarrow cosx = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ او ؟ زاوية الاسناد

$x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ الربع الاول $or\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ الربع الرابع

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx\right|$

$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(2\cos x - 1)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(2\cos x - 1)dx\right|$

$= \left|-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)(-2\sin x)\,dx\right| + \left|-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - 1)(-2\sin x)\,dx\right|$

$= \left|\left[-\frac{1}{4}(2\cos - 1)^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[-\frac{1}{4}(2\cos x - 1)^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \frac{1}{4}\left|\left[\left(2cos\frac{\pi}{3} - 1\right) - (2cos\ 0 - 1)^2\right]\right| + \frac{1}{4}\left|\left(2\cos\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 - \left(2\cos\frac{\pi}{3} - 1\right)^2\right|$

$= \frac{1}{4}\left|[(1-1)^2 - (2-1)^2]\right| + \frac{1}{4}\left|[(0-1)^2 - (1-1)^2]\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $g(x) = x , f(x) = \sqrt{2x-1}$ بالفترة $[1, 5]$

2017 تطبيقي د2 خارج

$h(x) = \sqrt{2x - 1} - x , h(x) = ؟ \rightarrow \sqrt{2x - 1} - x = 0$

$\sqrt{2x - 1} - x$ بتربيع الطرفين

$2x - 1 = x^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \in [1, 5]$ لايجزئ

$A = \int_1^5 [(2x-1)^{\frac{1}{2}} - x]\,dx$ ... اكمل الحل ولاتنسى اجراء التكامل قبل التعويض

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = \cos x,\ y = sin\ x$ وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2017 احيائي د2 داخل / 2019 تطبيقي د1 داخل / 2017 د2 خارج / 2014 تمهيدي خ

$$h(x) = cosx - sinx \rightarrow cosx - sinx = 0$$

$$\rightarrow cosx = sinx \rightarrow tanx = 1$$

ودالة الظل تكون موجبة في الربعين الاول والثالث $\theta = \frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

$$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad OR \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (cosx - sinx)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (cosx = sinx)dx\right|$$

$$= \left|[sinx + cosx]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[sinx + cosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right| + \left|\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1 + 0)\right| + \left|(1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|$$

$$\left|\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right)\right| + \left|1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right| = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}|$$

$$= (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بين المنحنين $y = sin\ x, g(x) = \sqrt[3]{x}$ بالفترة $[-1, 1]$

1999 دور اول / 2005 تمهيدي

$$h(x) = x - \sqrt[3]{x} \rightarrow \sqrt[3]{x} - x = 0 \rightarrow [\sqrt[3]{x} = x]$$ بتربيع الطرفين

$$x = x^3 \rightarrow x - x^3 = 0 \rightarrow x(1 - x^2) = 0 \rightarrow x = 0\ or\ x = \pm 1 \in [-1, 1]$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0} h(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} h(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{0} \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right)dx\right|$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \left|(0 - 0) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بين المنحنين $y = sin^2 x , y = sin x$ بالفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2012 خارج

Sol:

$$h(x) = sin^2 x - sinx = sinx\,(sinx - 1)$$

$$sinx\,(sinx - 1) = 0 \rightarrow either\ sinx = 0 \rightarrow x = 0 + n\pi$$

$$n = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{لايجزئ التكامل}$$

$$n = 1 \rightarrow x = \pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{لايجزئ التكامل}\ or\ sin\, x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{لايجزئ التكامل}$$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2 x - sinx)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(1 - cos2x) - sinx\right] dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2} sin2x\right) + cosx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} sin\pi\right) + cos\frac{\pi}{2}\right] \right| - \left| [(0 - sino) + cos\, 0] \right|$$

$$= \left|\frac{\pi}{4} - 1\right| = 1 - \frac{\pi}{4} unit^2$$

لاحظ إن النصف قبل إجراء التكامل لم نستطع إن نخرجه إلى خارج التكامل لأنه غير تابع لكل ما بعده

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = sin2\,x$ ومحور السينات بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2008 دور ثاني

Sol:

$$if\ y = 0 \rightarrow sin2x = 0 \rightarrow 4x = 0 + n\pi \ \ ,n = 0,1,2$$

$$n = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$ يجزئ التكامل

$$n = 1 \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$ لايجزئ التكامل

$$n = -1 \rightarrow 2x = -\pi \rightarrow x = \frac{-\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$ لايجزئ التكامل

$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{\square}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}(sin\,2x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(sin\,2x)dx\right|$$

$$\left|\left[-\frac{1}{2}\,cos2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|-\frac{1}{2}\,cos2x\right|$$

لاحظ انه سنقوم بتعويض القيم السالبة لـ (n)
لان الفترة في السؤال موجبة وسالبة

$$= \frac{1}{2}|(cos0) - (cos - \pi)| + \frac{1}{2}|(cos\pi) - (cos0)|$$

$$= \frac{1}{2}|(1) - (-1)| + \frac{1}{2}|(-1) - (1)|$$

$$\frac{1}{2}|2| + \frac{1}{2}|-2| = 1 + 1 = 2$$ وحدة مساحة

وزاريات التمارين الخاصة بالمساحة

-2 جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - 3x^2 - 4$ ومحور السينات بالفترة $[-2, 3]$

2002 دور 2 / 2020 تطبيقي د2 / 2020 احيائي د2 تكميلي

Sol:

$$if\ y = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \in [-2, 3] \quad OR\ x = -2 \in [-2, 3]$$ لايجز

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (x^4 - 3x^2 - 4)dx \right|$$

$$A = |A1| + |A2|$$

$$A = |A1| + |A2| = \left|\frac{-96}{5}\right| + \left|\frac{96}{5}\right| = \frac{96}{5} + \frac{96}{5} = \frac{192}{5}$$ الوحدة مساحة

$$A_1 = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)dx \right|$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$\left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) + -\left(\frac{-32}{5+}8 + 8\right)$$

$$\frac{32}{5} - 8 - 8 + \frac{32}{5} - 8 - 8$$

$$\frac{64}{5} - 32 = \frac{64 - 160}{5} = \frac{-96}{5}$$

$$A_2 = \left| \int_{2}^{3} (x^4 - 3x^2 - 4)dx \right|$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x\right]_{2}^{3}$$

$$\left(\frac{243}{5} - 27 - 12\right) - \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right)$$

$$\frac{243}{5} - 39 - \frac{32}{5} + 16$$

$$= \frac{211}{5} - 23 = \frac{211 - 115}{5} = \frac{96}{5}$$

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^4 - 4$ الجواب $\frac{96}{5}$

-3 جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x^2$ ومحور السينات 2020 احيائي د3

$if\ y = 0 = x^4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$$= x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \quad OR \quad x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$A = \left| \int_{-1}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} f(x)dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^4 - x^2)\,dx \right|$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A_1 = \left| \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\,dx \right| = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$= (0) - \left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15}$$

$$A_2 = \left| \int_{0}^{1} (x^4 - x^2)\,dx \right| = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

1998 د1

جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^4 - 4x^2$ ومحور السينات بالفترة $[1,3]$

Ans: A=20 unit²

2018 احيائي تمهيدي / 2020 تطبيقي د2 داخل / 2017 احيائي د1 خارج

-4 جد المساحة المحددة بالمنحني $y = sin\,3x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

$if\ y = 0 \rightarrow sin3x = 0 \rightarrow 3x = 0 + n\pi\ ,n = 0,1,2$

$n = 0 \rightarrow 3x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لايجزئ التكامل

$n = 1 \rightarrow 3x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ يجزئ التكامل

$n = 2 \rightarrow 3x = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لايجزئ التكامل

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة

$$A = \left| \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| = \left| \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (sin3x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (sin3x)\,dx \right|$$

$$: \left| \left[-\frac{1}{3}\,cos3x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \right| + \left| \left[-\frac{1}{3}cos3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$\frac{1}{3}\left|(cos\pi)-(cos0)\right|+\frac{1}{3}\left|\left(cos\frac{3\pi}{2}\right)-(cos\pi)\right|$$

$$=\frac{1}{3}|(-1)-(1)|+\left|\frac{1}{3}(0)-(-1)\right|=\frac{1}{3}|-2|+\frac{1}{3}|1|=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$ وحدة مساحة

-5 جد المساحة المحددة بالمنحني $y=2cos^2x-1$ ومحور السينات بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

2018 احيائي د2 / 2003 د2 / 2006 د2 / 2009 د2 / 2001 د2/ 2016 د1خارج / 2016 د2 / 2020 احيائي د1

$$if\ y=0\rightarrow y=2cos^2x-1=0\rightarrow cos\,2x=0$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,n=0,1,2$$

$$n=0\rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$n=1\rightarrow 2x=\frac{3\pi}{2}\rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$n=2\rightarrow 2x=\frac{5\pi}{2}\rightarrow x=\frac{5\pi}{2}\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\right|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos\,2x)dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(cos2x)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(sin\frac{\pi}{2}\right)-(sin0)\right|+\left|\frac{1}{2}(sin\pi)-\left(sin\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}|(1)-(0)|+\frac{1}{2}|(0)-(1)|$$

$$=\frac{1}{2}|1|+\frac{1}{2}|-1|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$ وحدة مساحة

((لقد وردت الأسئلة الوزارية ببعض تلك الصيغ ويتوقع ان ترد بالصيغ الاخرى))

1) $y=1\,2sin^2x=cos2x$
2) $y=cos^2x-sin^2x=cos2x$
3) $y=cos^4x-sin^4x=cos2x$
4) $y=2sin^2x-1=-cos2x$
5) $y=1-2cos^2x=-cos2x$
6) $y\,sin^2x\,cos^2x=-cos2x$

-6 جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $g(x)=\sqrt{x-1}$, $f(x)=\frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2,5]$

2018 تطبيقي د3 داخل

$$h(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x-1}\rightarrow\frac{1}{2}x-\sqrt{x-1}=0\rightarrow\left[\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1}\right]$$ بتربيع الطرفين

$$\frac{1}{4}x^2=x-1\rightarrow x^2=4x-4\rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow(x-2)^2=0$$

$= x - 2 = 0 = x = 2 \in [2, 5]$ لايجزئ التكامل

$$A = \left|\int_2^5 h(x)\,dx\right| = \left|\int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x-1}\right)dx\right| = \left|\int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5\right| = \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{16}{3}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{25}{4} - \frac{16}{3} - 1 + \frac{2}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{75 - 64 - 12 + 8}{12}\right| = \frac{7}{12}$$ وحدة مساحة

7- المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^2, y = x^4 - 12$

2017 تطبيقي د1 موصل / 2008 د1 / 1997 د2 / 2015 د3 / 2016 د2 خارج / 2015 د2 خارج / 2008 خارج / 2020 تطبيقي د3

$$h(x) = x^4 - 12 - x^2 \rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3)$$

$$\rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = +2$$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 12x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right) - \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 24\right)\right|$$

$$= \left|\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right|$$

$$= \left|\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48\right| = \left|\frac{192 - 80 - 720}{15}\right| = \left|\frac{-608}{15}\right| = \frac{608}{15}$$ وحدة مساحة

8- جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = sinx\,, g(x) = sin\,x\,.\,cos\,x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

2019 تطبيقي د1 خارج

$$h(x) = \text{inxcosx} - sinx = sinx(cosx - 1) = sinx(cosx - 1) = 0$$

اما $sinx = 0 \rightarrow x = 0 \in [0, 2\pi] Or\ x = \pi \in [0, 2\pi]$

$Or\ x = 2\pi \in [0, 2\pi]$ أو $cos\,x - 1 = 0 \rightarrow cos\,x = 1 \rightarrow x = 0$

$$A = \left|\int_0^{\pi} h(x)dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} h(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \sin x\,(cosx - 1)\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,(cosx - 1)\right|$$

$$= -\left|\int_0^{\pi} (cosx - 1)(-sinx)dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} (cosx - 1)(-sinx)dx\right|$$

$$= \left|\left[-\frac{1}{2}(\cos n - 1)^2\right]_0^{\pi}\right| - \left|\left[-\frac{1}{2}(\cos n - 1)^2\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|[(\cos\pi - 1)^2 - (\cos 0 - 1)^2]\right| + \frac{1}{2}\left|[(\cos 2\pi - 1)^2 - (\cos\pi - 1)^2]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(-1-1)^2 - (1-1)^2\right| + \left|(1-1)^2 - (-1-1)^2\right|$$

$$\frac{1}{2}|4| + \frac{1}{2}|4| = 2 + 2 = 4 \text{ وحدة مساحة}$$

-9 جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = 2\sin x\ , g(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

2013 / 2017 / 2015

Sol:

$h(x) = 2\sin x + 1 - \sin x = \sin x + 1$

$$\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ لايتجزئ التكامل}$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x)dx\right| = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)\,dx\right| = \left|[-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) - (-\cos 0 + 0)\right| = \left|\left(\frac{3\pi}{2}\right) - (-1)\right| = \frac{3\pi + 2}{2} \text{ وحدة مساحة}$$

-10 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات

2005/ 2019 احيائي د2 / 2019 احيائي د1 خارج

Sol:

if $y = 0 = x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

$\rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0 \rightarrow x(x+3)(x+1) = 0$

$x = 0 \quad OR \quad x = -3 \quad OR \quad x = -1$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx\right|$$

$$\left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right|$$

$$\left|\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right)\right| + \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + \frac{108}{3} - \frac{27}{2}\right)\right| + \left|-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{-80}{4} + \frac{104}{3} - \frac{24}{2}\right| + \left|\frac{-3 + 16 - 18}{12}\right| = \left|-32 + \frac{104}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right|$$

$$= \left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12} \text{ وحدة مساحة}$$

الاسئلة الوزارية الخاصة بموضوع المسافة

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V = 2t - 4 \ m/sec$

A) نجد المسافة المقطوعة بالفترة $[1 ، 3]$

2000دور 2

$$v(t) = 0 \rightarrow 2t - 4 = 0 \rightarrow t = 2 \in [1,3]$$

$$d = \left| \int_1^2 v(t)dt \right| + \left| \int_2^3 v(t)dt \right|$$

$$= \left| \int_1^2 (2t - 4)dt \right| + \left| \int_2^3 (2t - 4)dt \right|$$

$$= \left| [t^2 - 4t]_1^2 \right| + \left| [t^2 - 4t]_2^3 \right|$$

$$= |(4 - 8) - (1 - 4)| + |(9 - 12)(4 - 8)|$$

$$= |-4 + 3| + |-3 + 4| = 1 + 1 = 2\,m$$

B) الازاحة المقطوعة $[1 ، 3]$

$$= \int_a^b v(t)dt = \int_1^3 (2t - 4)dt = [t^2 - 4t]_1^3$$

$$= (9 - 12) - (1 - 4) = -3 + 3 = 0\,m$$

2019د 3 أحيائي

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (6t^2 - 12t) \ m/sec$ فجد المسافة المقطوعة بالفترة $[1 ، 3]$

$$v(t) = 0 \rightarrow\rightarrow 6t^2 - 12t = 0 \rightarrow 6t(t - 2) = 0$$

$$\rightarrow t = 0 \notin [1,3] \ OR \ t = 2 \in [1,3]$$

$$d = \left| \int_1^2 v(t)dt \right| + \left| \int_2^3 v(t)dt \right|$$

$$= \left| \int_1^2 (6t^2 - 12t)\,dt \right| + \left| \int_2^3 (6t^2 - 12t)dt \right|$$

$$\left| [2t^3 - 6t^2]_1^2 \right| + \left| [2t^3 - 6t^2]_2^3 \right|$$

$$= |(16 - 24) - (2 - 6)| + |(54 - 54)(16 - 24)|$$

$$= |-8 + 4| + |0 + 8| = 4 + 8 = 12\,m$$

الازاحة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

$$s = \int_a^b v(t)dt = \int_1^3 (6t^2 - 12t)\,dt = [2t^3 - 6t^2]$$

$$(54 - 54) - (2 - 6) = 4\,m$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t - 6\ m/s$ جد

1)المسافة المقطوعة بالفترة $[1, 3]$

2019 تطبيقي د2

Sol

$$v(t) = 0 \to 3t - 6 = 0 \to t = 2 \in [1,3]$$

$$d = \left|\int_1^2 v(t)dt\right| + \left|\int_2^3 v(t)dt\right|$$

$$\left|\int_1^2 (3t - 6)dt\right| + \left|\int_2^3 (3t - 6)dt\right|$$

$$= \left|\left[\frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_2^3\right|$$

$$= \left|(6 - 12) - \left(\frac{3}{2} - 6\right)\right| + \left|\left(\frac{27}{2} - 18\right) - (6 - 12)\right|$$

$$\left|-6 + \frac{9}{2}\right| + \left|\frac{-9}{2} + 6\right| = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3\ m$$

2) الازاحة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$s = \left|\int_4^5 v(t)dt\right| = \int_4^5 (3t - 6)dt$$

$$\left[\frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_4^5 = \left(\frac{75}{2} - 30\right) - (24 - 24) = \frac{15}{2}m$$

3) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة

$$s = \int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 (3t - 6)dt = \left[\frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_0^4$$

$$(24 - 24) - (0 - 0) = 0\ m$$

مثال / جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $18\ m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/sec$ بعد مرور (4) sec من بدء الحركة جد: a) المسافة خلال الثانية الثالثة b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني 2017 تطبيقي د2 خارج / 1997 دور 1

Sol

$$v(t) = \int a(t)\,dt \to v(t) = \int 18\,dt \to v(t) = 18t + c$$

$v(t) = 82$ عندما $t = 4$

$$82 = 72 + c \to c = 10 \to v(t) = 18t + 10$$

$$d = \left|\int_2^3 v(t)dt\right| = \left|\int_2^3 (18t + 10)dt\right|$$

a)

$$= |111 - 56| = 55\ m$$

b)

$$= (81 + 30) - (0 - 0)\ 111\ m$$

التمارين الوزارية الخاصة بالمسافة

-1 جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t^2 - 6t + 3 \frac{m}{sec}$ فجد

(A) المسافة المقطوعة بالفترة $[2,4]$

2013 خارج / 2014 د4 انبار / 2020 تطبيقي د1

Sol

$$v(t) = 0 = 3t^2 - 6t + 3 = 0$$
$$\rightarrow 3(t^2 - 2t + 1) = 0 \rightarrow 3(t-1)^2 = 0$$
$$t = 1 \notin [2,4]$$
$$d = \left|\int_2^4 v(t)dt\right| = \left|\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt\right|$$
$$= \left| [t^3 - 3t^2 + 3t \ ]_2^4 \right|$$

$$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |26| = 26\,m$$

(B) *الازاحة المقطوعة بالفترة* $[0,5]$

Sol:

$$S = \int_0^5 V(t)\,dt = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)dt$$
$$= [t^3 - 3t^2 + 3t\,]_0^5$$
$$= (125 - 75 + 15) - (0) = 65\,m$$

اذا كانت سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم هي $v(t) = 3t^2 + 6t + 3$ احسب

-1 المسافة المقطوعة بالفترة

-2 الازاحة المقطوعة بالفترة $[2,4]$

-3 الزمن اللازم ليصبح التعجيل $18\ m/sec^2$

2003 دور 2

$$\text{Sol} / v(t) = 0 \rightarrow 3t^2 + 6t + 3 = 0 \rightarrow 3(t^2 + 2t + 1) = 0 \rightarrow 3(t+1)^2 = 0$$
$$\rightarrow t = -1 \notin [2,4]$$
$$d = \left|\int_2^4 v(t)\,dt\right| = \left|\int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt\right|$$
$$= [t^3 + 3t^2 + 3t\,]_2^4 = (64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)|$$
$$= 1124 - 26| = 98m$$
$$a(t) = v'(t) = 6t + 6 \rightarrow 18 = 6t + 6 \rightarrow 6t = 12 \rightarrow t = 2\,sec$$

12) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $90\ m/sec$ بعد مرور $4\ sec$ من بداية الحركة جد :

(a) السرعة عندما $t=2$.

(b) المسافة خلال الفترة $[1,2]$

(c) الازاحة بعد $10sec$ من بدء الحركة .

2020 احيائي د3 / 2019 احيائي د1 خارج / 2018 تطبيقي د1 خارج / 2011 دور 2

Sol:

$$v(t)=\int a(t)dt \rightarrow v(t)=\int(4t+12)\,dt \rightarrow v(t)=2t^2+c$$

$$v(t)=90 \text{ عندما } t=4$$

$$90=2(16)+48+c \rightarrow c=10 \rightarrow v(t)=2t^2+12t+10$$

$$a)\ v(2)=8+24+10=42\ m/s$$

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فال داعي الى مساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معين لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لايجزئ التكامل

الحل \ بما ان السرعة أكبر من صفر فإن المسافة تكون تكاملا واحداً على الفترة $[1,2]$

$$d=|\int_1^2 v(t)dt\ |=|\int_1^2(2t^2+12t+10)\,d$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}t^3+6t^2+10t\right]_1^2\right|$$

$$\left|\left(\frac{16}{3}+24+20\right)-\left(\frac{2}{3}+6+10\right)\right|$$

$$|\frac{16}{3}+44-\frac{2}{3}-16\ |$$

$$=\left|\frac{14}{3}+28\right|=\left|\frac{14+84}{3}\right|=\frac{98}{3}=32.6\ m$$

$$c)\ s=\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^{10}(2t^2+12t+10)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3+6t^2+10t\right]_0^{10}$$

$$=\left(\frac{2000}{3}+600+100\right)-(0)=\frac{2000+2100}{3}=\frac{4100}{3}=1366.6\ m$$

13)تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)m/sec$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عندها .

2007 تمهيدي / 2014 خارج القطر / 2014دور 2 / 2016 دور 2 / 2020 احيائي د2 تكميلي

نفرض ان الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول n

$$S = \int_0^n V(t)dt = \int_0^n (100t - 6t^2)dt$$
$$[50t^2 - 2t^3]_0^n$$
$$= (50n^2 - 2n^3) - (0)$$
$$= 50n^2 - 2n^3$$

الجسم عاد الى النقطة التي تحرك منها فأن الازاحة تساوي (0)

$$0 = 50n^2 - 2n^3 \rightarrow 2n^2(25 - n) = 0 \rightarrow n = 0 \text{ يهمل } OR\ n = 25\ sec$$
$$a(t) = v'(t) = 100 - 12t \rightarrow a(25)$$
$$= 100 - 300 = -200\ m/sec^2$$

حل اخر // 2018 احيائي د1 داخل

$$s = \int v(t)\,dt = \int (100t - 6t^2)dt \rightarrow s = 50t^2 - 2t^3 + c$$

بما ان الحركة من السكون فأن$(s = 0, t = 0)$

بما ان الجسم عاد الى موضعه الاول فان$(s = 0)$ $0 = 0 + c \rightarrow c = 0 \rightarrow s = 50t^2 - 2t^3$

$$0 = 50t^2 - 2t^3 \rightarrow 2t^2(25 - t) = 0 \rightarrow t = 0 \text{ يهمل}$$
$$OR\ t = 25\ sec$$
$$a(t) = v'(t) = 100 - 12t$$
$$= a(25) = 100 - 300 = -200\ m/sec^2$$

2016 دور 2 خارج / 2019 تمهيدي تطبيقي / 2019 احيائي دور 1 خارج

تتحرك سيارة من السكون وبعد (1) دقيقة من بدء الحركة اصبحت سرعتها$(50t - 3t^2)$ km/□in

جد الزمن اللازم لعودة السيارة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عند ذلك الزمن

نفس فكرة سؤال الكتاب والجواب بعد 25 دقيقة اصبح التعجيل $(-100)\ km/(min)^2$

2003د 1/ تمهيدي 2010

جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}\ m/sec$ وكان بعده بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20 m جد ازاحته عند كل t

اذا علمت معادلة السرعة وطلب ايجاد الازاحة في ثانية محددة او الازاحة في اي زمن وعلم في السؤال بعد الجسم والزمن المقطوع عنده فان نوع التكامل يكون غير محددا علما ان هذا الاحتمال تم تجاهله في المنهج الحالي ولابأس بالتطرق اليه للاحتياط

$$s(t) = \int v(t)\ dt = \int (\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}})dt = \int (\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + 3\ t^{\frac{-1}{2}})\ dt = \frac{3}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 3.2\ t^{\frac{1}{2}} + c$$

$$s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + c \to 20 = 8 + 12 + c \to c = 0\ s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v = (2t - 4)\ m/s$ جد المسافة المقطوعة بالفترة [1,6] ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة 2018 تطبيقي د2 داخل

1) المسافة المقطوعة بالفترة [6 ، 1] .

$$Sol: (t) = 0 \to 2t - 4 = 0 \to t = 2 \in [1,6]$$

$$d = \left|\int_1^2 v(t)dt\right| + \left|\int_2^6 v(t)dt\right| = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^6 (2t-4)dt\right|$$

$$= \left|[t^2 - 4t]_1^2\right| + \left|[t^2 - 4t]_2^6\right|$$

$$= |(4 - 8) - (1 - 4)| + |(36 - 24) - (4 - 8)|$$

$$= |-4 + 3| + |12 + 4| = 1 + 16 = 17\ m$$

(2)بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

2000 دور 2

Sol

$$S = \int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 (2t - 4)\ dt = [t^2 - 4t]_0^4$$

$$= (16 - 16) - (0 - 0) = 0\ m$$

2020 احيائي د2 داخل / 2018 احيائي د2 خارج / 2017 احيائي د2 موصل

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $5\ m/sec^2$ فاذا كان بعده من بدء الحركةيساوي 180 m بعد مرور 6sec والسرعة عندها 45 m/sec جد السرعة عند t =2 2004 دور 2

Sol:

$$v(t) = \int a(t)\ dt \to v(t) = \int 5\ dt \to v(t) = 5t + c$$

$$v(t) = 45 \text{ عندما } t = 6$$

$$45 = 30 + c \to c = 15 \to v(t) = 5t + 15$$

$$v(2) = 10 + 15 = 25\ m/s$$

تلميح 2005تمهيدي

لو طلب ايجاد الازاحة او البعد في زمن محدد او في اي زمن عندها نجري تكامل غير محددا لان البعد معلوم 180 بعد مرور 4 ثواني ومنها نستخرج قيمة c ، وهذا السؤال يدل على ان ليس بالضرورة ان كل المعلومات التي تعطى في السؤال يمكن الاستفادة منها

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $(3t + 2)\,m/s^2$ جد سرعة الجسم بعد مضي 2sec من بدء الحركة ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة [2 , 6]

Sol:

$$v(t) = \int a(t)\,dt \rightarrow v(t) = \int (3t + 2)\,dt \rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c$$

بما ان التعجيل منتظم فانه في بدء الحركة يكون فيها $v = 0\,, t = 0$ اي انه $c = 0$

$$v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$$

$$v(2) = 6 + 4 = 10\ m/s$$

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى ساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معين لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لا يجزأ التكامل.

$$d = \left|\int_2^6 v(t)\,dt\right| = \left|\int_2^6 \left(\frac{3}{2}t^2 + 2t\right)dt\right| = \left|\left[\frac{1}{2}t^3 + t^2\right]_2^6\right|$$
$$= |(108 + 36) - (4 + 4)| = |136| = 136\ m$$

2020احياني د 1 / 2017تطبيقي د 1 خارج

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل مقداره $10m / s^2$ وبعد 2 ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعته $24m / s$ جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ثم بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

Sol

$$v(t) = \int a(t)dt \rightarrow v(t) = \int 10\,dt \rightarrow v(t) = 1\square t + c$$
$$v(t0 = 10\,t + 4$$

2007دور 1 / 2015دور 2

$$a)\ d = \left|\int_4^5 v(t)dt\right| = \left|\int_4^5 (10t + 4)dt\right|$$
$$= [5t^2 + 4t]_4^5| = |(125 + 20) - (80 + 16)| = 49\ m$$
$$b)\ s = \int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 (10t + 4)dt = \left|[5\square^2 + 4t]_0^4\right|$$
$$= |(80 + 16) - (0 - 0)| = 96\ m$$

2010 دور 2 دور

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 4t + 7)\ m/s$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها

$$\text{Sol: } v(t) = 0 \rightarrow 3t^2 + 4t + 7 \neq 0$$

$$d = \left|\int_0^4 v(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)dt\right|$$

$$= |[t^3 + 2t^2 + 7t]_0^4|$$

$$= |(64 + 32 + 28) - (0)| = 124\ m$$

$$a(t) = v'(t) = 6t + 4 \rightarrow a(4) = 24 + 4 = 28\ m/sec^2$$

$= | [t^3 + 2t^2 + 7t$ől $= |(64 + 32 + 28)\ (0)| = 124$ m

$a(t) = v\ '(t) = 6t + 4 + a(4) = 24 + 4 = 28$ m/sec2

2009 دور 1

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 12t + 9)\ m/s$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 2 ثواني من بدء الحركة .

تلميح // المساحة المقطوعة بعد مرور t ثانية من بدء الحركة تعني بالفترة $[0,\ t]$ وليس بالضرورة ان يكون تكامل واحدا

$$\text{Sol: } v(t) = 0 \rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0$$

$$= 3(t-3)(t-1) = 0 \rightarrow \text{either } t = 1 \in [0,2]\text{, or } t = 3 \notin [0,2]$$

$$d = \left|\int_0^1 v(t)dt\right| + \left|\int_0^1 v(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (3t^2 - 12t + 9)\,dt\right| + \left|\int_1^2 (3t^2 - 12t + 9)dt\right|$$

$$= |[t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1 + [t^3 - 6t^2 + 9t|_1^2|$$

$$= |(1 - 6 + 9) - (0)| + |(8 - 24 + 18) - (1 - 6 + 9)| = |4| + |-2| = 6m$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12 \rightarrow 18 = 6t - 12 \rightarrow 30 = 6t \rightarrow t = 5\ min$$

2016تمهيدي

جسم تحرك على خط مستقيم بحيث ان $V(t) = 3t^2 - 6t$ فجد

1- المسافة المقطوعة بالفترة $[1, 3]$

Sol:

$$v(t) = 0 \rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \rightarrow 3t(t-2) = 0$$
$$\rightarrow t = 0 \notin [1,3] \text{ or } t = 2 \in [13]$$
$$d = \left|\int_1^2 V(t)dt\right| + \left|\int_2^3 V(t)dt\right|$$
$$= \left|\int_1^2 (3t^2 - 6t)dt\right| + \left|\int_2^3 (3t^2 - 6t)dt\right|$$
$$= \left|[t^3 - 3t^2]_1^2\right| + \left|[t^3 - 3t^2]_2^3\right|$$
$$= |(8-12) - (1-3)| + |(27-27) - (8-12)|$$
$$|-4+2| = |0+4| + 2 + 4 = \text{وحدة طول}$$

2) الازاحة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

Sol

$$s = \int_1^3 v(t)dt = \int_{11}^3 (3t^2 - 6t)dt = [t^3 - 3t^2]_{\square}^3$$
$$2 = (27-27) - (3-1) = 2 \text{ طول وحدة}$$

الفصل الخامس : المعادلات التفاضلية

الجزء الاول / اسئلة الاثبات

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلًا للمعادلة التفاضلية $x\acute{y} = x^2 + y$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساوين

2013 دور ثالث

$L.H.S: \ x\acute{y} = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

2014 دور اول

$R.H.S: x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$

$\because L.H.S = R.H.S \Rightarrow x\acute{y} = x^2 + y$

العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية

حل العادلة التفاضلية هو أي علاقة بين متغيرات العادلة التفاضلية بحيث تحقق هذه المعادلة وهو ما يسمى بالحل الخاص أما الحل العام فهو علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية تحتوي على ثوابت اختيارية يعتمد عددها على رتبة المعادلة التفاضلية ويكون عددها مساويا لرتبة المعادلة التفاضلية. كما سيتم بيانه لاحقا عن دراسة طرق حل المعادلات التفاضليلة

2017 تطبيقي د 2 خارج , 2018 احيائي د 3 داخل , 2015 تمهيدي

اثبت ان $y = x\ln x - x$ $x > 0$ احد حلول المعادلة , $x\frac{dy}{dx} = x + y$

$Sol / \frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) - 1 = \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي العادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$L.H.S: x\frac{dy}{dx} \ x\ln x$

$RHS: x + y = x + x\,lnx - x = x\,ln\,x$

$\because LHS = RHS$ أذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

الاحظ الفرق بين هذا المثال السابق والسؤال الوزاري أدناه

اثبت ان $y = x\ln x - x$ $x > 0$ احد حلول المعادلة , $x\frac{dy}{dx} = x + y$ ؟ 2014 دور ثالث

تأكيد مهم : حتى ان ذكر $\ln|x|$ ستكون مشتقتها $\frac{1}{x}$ سواء ذكر في السؤال ان x موجبة أم لم يذكر

2014 دور ثاني / بين ان $Iny^2 = x + a \ , a \in R$ هو حلا للمعادلة $2\acute{y} - y = 0$

Sol / = $\left(\frac{1}{y^2}\right) 2y' = 1 \Rightarrow \frac{2}{y}y' = 1 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y =$ ⍰

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2011دور ثاني 2014تمهيدي / 2017احيائي د 2 خارج

هل أن $y = x^3 - x - 2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية $\frac{⍰y}{dx} = 3x^2 - 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6$

2018تطبيقي د 2 خارج

هل يمثل $y = sin6x$ حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 36y = 0$ ؟ بين ذلك؟

Sol/

$$y = sin6x \Rightarrow y' = 6\,cos6x \Rightarrow y" = -36\,sin6x$$

L.H. S : $y" + 36y = -36sin⍰x + 36sin6x = 0$: RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

201دور اول / 2015تمهيدي / 2015د 2 خارج / 2017احيائي د خارج2019 / تمهيدي احيائي

برهن ان $y = 3cos2x + 2sin2x$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y" + 4y = 0$ ؟

Sol / $y' = -6sin2x + 4cos2x \ , y" = -12cos2x - 8sin2x$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

L.H.S : $y" + 4y = (-12cos2x - 8sin2x) + 4(3cos2x + 2sin2x)$

$= -12cos2x - 8sin2x + 12cos2x + 8sin2x = 0 = RHS$

$\because$ LHS = RHS اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2019احيائي د 1 خارج

هل أن $y = 3cos2x + 2sin2x$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 2$ ؟

هنا سيكون نفس الحل بالنسبة للطرف الأيسر ولكنه سوف لايساوي 2 وبالتالي فإن العلاقة المعطاة ليست حلا للمعادلة التفاضلية .

2011دور ثاني / 2017 تطبيقي د1 موصل / 2018احيائي د2داخل

هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y') - 3x = 5$ ؟

$2y\,y' = 6x + 3x^2 \Rightarrow [2y\,y'' + y'.2y' = 6 + 6x]$ بالقسمة على (2)

$y\,y'' + (y')^2 = 3 + 3x \Rightarrow y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5 \ \because \ LHS \neq RHS$

اذن العلاقة المعطاة $y^2 = 3x^2 + x^3$ هي ليست حلا للمعادلة التفاضلية المعطاة

2019تمهيدي تطبيقي

هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 8$

2015نازحين دور اول / 2015 دور اول

هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 8$

ستكون العلاقة g علاة حل للمعادلة التفاضلية المعطاة

2017احيائي د1 خارج / 2018احيائي د 2 داخل / 2015دور رابع / 2011خارج

مثال // بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$ ؟

Sol / $y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}, y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$

نقوم بتعويضها بطرف العادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$\text{L.H.S}: y'' + y' - 6y = 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - (6)(e^{2x} + e^{-3x})$$
$$= 6e^{2x} + 6.e^{-3x} - 6.e^{2x} - 6e^{-3x} = 0 = RHS$$
$$\because LHS = RHS$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2005 دور اول

هل ان $y = \frac{\sin x}{a + b\cos x}$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos x + b}{(a + b\cos x)^2}$ ؟

Sol /

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a + b\cos x).\cos x - \sin x(-b\sin x)}{(a + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{a\cos x + b\cos^2 x + b\sin^2 x}{(a + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{a\cos x + b(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(a + b\cos x)^2} = \frac{a\cos x + b}{(a + b\cos x)^2}$$

اي ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2018احيائي د 2 خارج

هل ان $y = \frac{1}{2}\, x\, e^x$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $y'' - y = e^x$ ؟

$$y = \frac{1}{2}x\,e^x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x\,e^x + \frac{1}{2}e^x$$
$$\Rightarrow y'' = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}xe^x + e^x$$
$$L.H.S\ : t'' - y = \frac{1}{2}xe^x + e^x - \frac{1}{2}xe^x = e^x = R.H.S$$

اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

اثبت ان كلا من $(a)y = 2e^x \quad , \quad (b)y = 3x \quad , \quad (c)Ae^x + Be^x$

حيث A , B ثابتان هو حلا للمعادلة التفاضلية $y''(1 - x) + y'x - y = 0$

Sol

$y' = 2e^x \quad y'' = 2e^x$

نقوم بتعويضها بطرف العادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$\therefore y''(1 - x) + y'x - y = 2e^x(1 - x) + 2xe^x - 2e^x$$
$$= 2\,e^x - 2xe^x + 2xe^x - 2e^x = 0$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2017احيائي د 2 موصل

$b)\ y' = 3 \quad , \quad y'' = 0$

نقوم بتعويضها بطرف العادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$\therefore y''(1 - x) + y'x - y = 0(1 - x) + 3x - 3x = 0$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

$$y' = Ae^x + Be^x$$
$$y'' = Ae^x + Be^x$$

نقوم بتعويضها بطرف العادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$\therefore y''(1 - x) + y'x - y$$
$$= (Ae^x + Be^x)(1 - x) + (Ae^x + Be^x).x - (Ae^x + Be^x)$$
$$= Ae^x + Be^x - Axe^x - Bxe^x + Axe^x + Bxe^x - Ae^x - \square e^x = 0$$

أذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

بعض الاسئلة الوزارية التي تخص المعادلات التفاضلية

2007تمهيدي

هل ان $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=2\tan x\sec^2 x$

$$\text{Sol / } y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\tan^2 x=(\tan x)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=2\tan x\sec^2 x$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2008تمهيدي

هل ان $y=\cot x$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}=2\csc^2 x\cot x$

$$\frac{dy}{dx}=-\csc^2 x=-(\csc x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=-2\csc x\,(-\csc .\cot x)\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=2\csc^2 x\cot x$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2019د3احيائي / 2009دور اول

هل ان $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos x).\cos x-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

تمارين(5 - 1)

2012 خارج

02 // برهن ان y = sinx هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$ ؟

Sol / $y' = cosx \Rightarrow y'' = -sinx$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

LHS : $y'' + y = -sinx + sinx = 0 = RH$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية (لاحظ الفرق مع السؤال الوزاري ادناه)

2014نازحين

برهن ان y = Cosx هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$ ؟

Sol / $y' - sinx \Rightarrow y'' = -cos\,x$

LHS : $y'' + y = -cosx + Cosx = 0 = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية.

04// هل ان $y = x + 2$ هو حلا للمعادلة $y'' + 3y + y = x$

2017احيائي د3 داخل / 2018تطبيقي د1 خارج

Sol /

نقوم بتعويضها بطرفي العادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين $y' = 1\ ,\ y'' = 0$

$LHS: y'' + 3y' + y = 0 + 3 + x + 2 = x + 5\ ,RHS: x$

اذن العلاقة المعطاة هي ليست حلا للمعادلة التفاضلية LHS ≠ RSH

2018تطبيقي د 2

5//هل أن $y = tan\,x$ هو حلا للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$ ؟

$y' = sec^2x\ ,y'' 2secx.secx\,tanx = 2tanx.sec^2x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

LHS : $y'' = 2tanx.sec^2x$

RHS : $2y(1 + y^2) = 2tanx(1 + tan^2x) = 2tanx\,sec^2x$

$\because$ LHS = RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2019تطبيقي د 1 خارج

هل ان $y = \tan x$ يمثل حلا للمعادلة التفاضلية $2y\ y' - y'' = 0$

$$y' sec^2 x\ , y" \ 2secx.secx\ tanx = 2t\square nx.sec^2 x$$

$$LHS: 2y\ y' - y" = 2\ tanx\ sec^2 x - 2tanx\ sec^2 x = 0 : R.H.S$$

$$\because\ LHS = RHS$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

// 6

هل ان $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلا للمعادلة $y^3 y'' = -2$

2018احياني د 1 داخل /2015 دور اول خارج /2016 دور ثاني

$$Sol\ /\ 4x + 2y\ y' = 0 \Rightarrow 2y\ y' = -4x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y}$$

$$y'' = \frac{(y)(-2) - (-2x)(y')}{y^2} = \frac{-2y + 2x(y')}{y^2}$$

$$= \frac{-2y + 2x\left(-\frac{2x}{y}\right)}{y^2} = \frac{\frac{-2y^2 - 4x^2}{y}}{y^2} =$$

$$\frac{-2y^2 - 4x^2}{y^3} = \frac{-2(y^2 + 2x^2)}{y^3} = \frac{-2}{y^3}$$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$$LHS:\ y^3\ y" = y^3\left(\frac{-2}{y^3}\right) = -2 = RHS$$

$$\because\ LHS = RHS$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

طريقة أخرى

$$4x + 2y\ y' = 0 \Rightarrow 2y\ y' = -4x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y}$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y.(-2) - (-2x).\frac{dy}{dx}}{y^2}\right].y^2 \Rightarrow y^2\frac{d^2y}{dx^2} = -2y + 2x.\frac{dy}{dx}$$

$$= \left[y^2\frac{d^2y}{dx^2} = -2y + 2x.\left(\frac{-2x}{y}\right)\right].y \Rightarrow y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -2y - 4x^2$$

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -2(y^2 + 2x^2) \Rightarrow y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -2$$

2017احيائي د3 داخل

هل ان $2x^2 - y^2 = 1$ هو حلا للمعادلة $y\,y'' + (y')^2 = 2$

Sol / $2x - 2y\,y' = 0 \Rightarrow 4 - (2y\,y'' + y' \cdot 2y') = 0$

$$[4 - 2y\,y'' - 2(y')^2 = 0] \div 2$$

$$2 - yy'' - (y')^2 = 0 \Rightarrow y\,y'' + (y')^2 = 2$$

2019احيائى د 1 داخل / 2018احيائي تمهيدي / 2017تمهيدي ا ح / 2016دور اول خارج / 2015دور ثانى خارج

7 // هل ان $yx = sin\,5x$ حل للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$ ثم بين رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية ؟

Sol /

$$y + xy' = 5cos5x \Rightarrow y' + xy'' + y' = -25sin5x$$

$$xy'' + 2y' + 25sin5x = 0 \Rightarrow xy'' + 2y' + 25xy = 0$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية والمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

« طريقة أخرى مطولة لحل السؤل

$$y\,x = \sin 5x \Rightarrow y = \frac{sin\,5x}{x}$$

$$y' = \frac{(x)(5\cos 5x) - (\sin 5x)(1)}{x^2} = \frac{5x\,cos\,5x - sin\,5x}{x^2}$$

$$y'' = \frac{x^2[(5x)(-5sin5x) + (cos5x)(5) - 5cos5x] - (5xcos5x - sin5x)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{-25x^3\,sin5x - 10x^2\,cos5x + 2x\,sin5x}{x^4}$$

نقوم بتعويضها بطرف العادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$LHS: xy'' + 2y' + 5yx$$

$$= \frac{25x^3\,sin5x - 10x^2\,cos5x + 2x\,sin5x}{x^4} + 2\left(\frac{5xcos5x - sin5x}{x^2}\right) + 25\left(\frac{sin\,5x}{x}\right)(x)$$

$$= \left(\frac{-25x^3\,sin5x - 10x^2\,cos5x + 2x\,sin5x}{x^3}\right) + \left(\frac{10xcos5x - 2sin5x}{x^2}\right) + (25sin5x)$$

$$= \frac{-25x^3\,sin5x - 10x^2\,cos5x + 2x\,sin5x + 10x^2cos5x - 2xsin5x + 25x^3sin5x}{x^3}$$

$$\frac{0}{x^3} = 0$$

$$\because LHS = RHS$$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

2019احيائي د 2

هل ان $yx = \sin 5x$ حلا للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 8$ ثم بين رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية؟ يمكن ببساطة ملاحظة ان العلاقة المعطاة ليست حال للمعادلة التفاضلية

---

08 / بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلا للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in R$ ؟

2013دور اول / 2012تمهيدي

نقوم بتعويضها بطرف العادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$y' = -ae^{x}$$

$$L.H.S : y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = RHS$$

$\because LHS = RSH$ اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

---

09 / بين ان $\ln|y| = x^2 + c$ حيث $c \in R$ هو حلا للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$ ؟

2017تطبيقي د 1 خارج / 2015دور ثاني / 2013خارج

$$\frac{1}{y}y' = 2x \Rightarrow y' = 2xy \Rightarrow y'' = 2x\,y' + 2y$$

$$y'' = 2x\,(2xy) + 2y \Rightarrow y'' = 4x^2\,y + 2$$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفي متساويين

$$LHS : y'' = 4x^2\,y + 2y, \qquad RHS : 4x^2\,y + 2y$$

$\because LHS = RHS$ اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

الاسئلة الوزارية الخاصة بالمعادلات التفاضلية

الجزء الثاني 1 فصل المتغيرات

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2, y = 9$

2017احيائي دور 1 موصل / 2016دور اول

Sol / $g(y)dy = f(x)\,dx$

$$\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int x\,dx \quad 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$x = 2, y = 9 \Rightarrow 2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c$$

$$6 = 2 + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4$$

تبسيط للحل يكون الطالب غير ملزم به

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 4\sqrt{y} = x^2 + 2c \Rightarrow 4\sqrt{y} = x^2 + c_1$$

$$\because x = 2, y = 9 \Rightarrow 4\sqrt{9} = (2)^2 + c_1 \Rightarrow 12 = 4 + c_1 \Rightarrow c_1 = 8$$

$$4\sqrt{y} = x^2 + 8 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$$

تذكير

$$1 - \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c, \qquad 2 - \int \frac{du}{u} = ln\,|u| + c$$

2017احيائي ح 2 داخل

مثال / حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $x = 0, y = 0$

نجعل المعادلة التفاضلية بالصورة $g(y)\,dy = f(x)dx$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.e^{y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{y}} = e^{2x}x \Rightarrow e^{-y}\,dy = e^{2x}dx \Rightarrow \int e^{-y}\,dy = \int e^{2x}\,dx$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c \Rightarrow -e^{0} = \frac{1}{2}e^{0} + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{e^{y}} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\right].(2) \Rightarrow -\frac{2}{e^{y}} = e^{2x} - 3$$

تأكيد هناك تبسيط غير ملزم بتحويل الناتج الى دالة صريحة سيترك للطالب حسب رغبته.

2015 دور ثاني

مثال // جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1 + x)\frac{dy}{dx} = 2y$

نجعل المعادلة التفاضلية بالصورة $g(y)\,dy = f(x)dx$

Sol /

$$(x + 1)dy = 2y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow In|y| = 2ln|x + 1| + c$$

تبسيط للحل يكون الطالب غير ملزم به

$$ln|y| = In(x + 1)^2 + c \Rightarrow In|1| = In(x + 1)^2 + In\,c_1$$
$$In|y| = In\,c_1(x + 1)^2 \Rightarrow |y| = c_1(x + 1)^2$$

يمكنكم ملاحظة ان التبسيط الذي يتم اجراؤه مبنيا على الخواص التي تعلمتها في المرحلة الدراسية السابقة حيث انه

اذا كان $\ln f(y) = \ln g(x) + c$ **يفضل استبدال c بعد التكامل مباشرة**

بـ $(\ln c)$ **او كتابتها c ، ومن ثم استبدالها ب** $(\ln c_1)$ **للاستفادة من الخواص العامة ادناه**

$$In\,a + In\,b = In\,ab$$
$$In\,a - ln\,b = In\frac{a}{b}$$
$$a\,ln\,f(x) = In\,[f(x)]^a$$

$$In\,a = In\,b \Rightarrow a = b$$

$$In|a| = In|b| \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

2019 د 3 تطبيقي

حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \cos^2 y \, dx$ حيث $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \cos y \neq 0$

نجعل المعادلة التفاضلية بالصورة

$$g(y)dy = f(x)dx$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x \, dx \Rightarrow \sec^2 y \, dy = \sin x \, dx \Rightarrow \sec^2 y \, dy = \int \sin x \, dx$$

$$\tan y = -\cos x + c$$

تمارين(2-5)

حل المعادلات التفاضلية الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

a) $y' \cos^3 x = \sin x$

Sol / $\frac{dy}{dx}\cos^3 x = \sin x \Rightarrow dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \Rightarrow dy \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$dy = \tan x \cdot \sec^2 x \, dx \Rightarrow \int dy = \int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$y = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$$

اختبر قدراتك !

يمكن ان يكون الجواب $y = \frac{1}{2}\sec^2 x + c$ اثبت ذلك

b) $\frac{dy}{dx} + \square y = 3x \, ; \, x = 1, y = 2$

Sol / $\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3 - y) \Rightarrow \frac{dy}{3-y} = xdx$

$$\int \frac{dy}{3-y} = \int xdx \Rightarrow -1n|3-y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$= -In|3-2| = \frac{1}{2} + C \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$-In|3-2| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$In|3-y| = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

$$|3-y| = e^{-\frac{1}{2}(x^2-1)} \Rightarrow |3-y| = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}(x^2-1)}}$$

c) $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

$$\frac{dy}{y-1} = (x+1)dx \Rightarrow \int (x+1)\, dx$$

$$In|y-1| = \frac{1}{\square} x^2 + x + c$$

2018احيائي د 1 خارج / 2012 د2

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث x=2 , y=2 ؟

الحل المطلوب $\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

d) $(y^2+4y-1)y' = (x^2-2x+3)$

$$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = (x^2-2x+3)$$
$$(y^2+4y-1)dy = (x^2-2x+3)dx$$
$$\int (y^2+4y-1)dy = \int (x^2-2x+3)dx$$
$$\frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + c$$

e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$ تطبيقي د 2 داخل 2017

Sol / $y\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{(1+y^2)^3} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}dy = 4dx$

$$(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}y\,dy = 4dx \Rightarrow \int (1+y^2)^{-\frac{3}{2}}ydy = \int 4dx$$
$$\frac{1}{2}\int (1+y^2)^{-\frac{3}{2}}ydy = \int 4dx$$
$$-(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = 4x + c \Rightarrow -\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4x + c \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$$
$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{(4x+c)^2}$$
$$y^2 = \frac{1}{(4x+c)^2} - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{(4x+c)^2} - 1}$$

2011دور 2

f) $e^x dx - y^3 dy = 0$

Sol /

$$y^3\,dy = e^x\,dx \Rightarrow \int y^3\,dy = \int e^x\,dx$$
$$\frac{1}{4}y^4 = e^x + c$$

g) $y' = 2e^x y^3 \; ; x = 0 \; , y = \frac{1}{2}$

2019د3 احيائي

Sol / $\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = 2e^x dx \Rightarrow \int y^{-3}\,dy = \int 2e^x dx$

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = 2e^x + c \Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$$

$\because x = 0 \; , y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2e^0 + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -4$

$= -\frac{1}{2y^2} = 2e^x - 4$ اذن حل المعادلة هو

02// جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية:

a) $xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$

2016دور 1

Sol / $xy\frac{dy}{dx}=1-2y^2 \Rightarrow xy\,dy=(1-2y^2)dx$

$$\frac{y}{1-2y^2}dy=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int\frac{y}{1-2y^2}dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)\int\frac{-4y}{1-2y^2}dy=\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)ln\,|1-2y^2|=1n\,|x|+c$$

$$In|(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}}|=In|x|+Inc_1,\quad c_1>0$$

$$In\left|(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}}\right|=In\,|c_1x| \Rightarrow \left|(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}}\right|=|c_1x|$$

الحل العام للمعادلات التفاضلية

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2y^2}}=c_1x$$

2017تطبيقي د 3 داخل / 2019احيائي د 1 داخل

b) $sin\,x\,.cos\,y\,\frac{dy}{dx}+cos\,x\,.sin\,y=0$

Sol// $sinx.cosy\,\frac{dy}{dx}=-cos\,x\,sin\,y$

$$\frac{cos\,y}{siny}dy=\frac{-cosx}{sinx}\,dx \Rightarrow \int\frac{cos\,y}{sin\,y}\,dy=-\int\frac{cosx}{sinx}dx$$

$$ln\,|sin\,y|=-ln\,|sin\,x\,|+c$$

تبسيط غير ملزم به الطالب

$$In|sin\,y|=ln|(sinx)-1|+ln\,c_1, c_1>0$$

$$ln\,|sin\,y\,|=ln\,|c_1(sinx)-1| \Rightarrow |sin\,y\,|=|c_1(sin\,x)-1\,|$$

$$|sin\,y|=\left|\frac{c_1}{(sinx)}\right| \Rightarrow sin\,y=\pm\frac{c_1}{sinx}$$

2014دور 4 انبار

c) $x\,cos^2y\,dx+tany\,dy=0$

Sol / $tany\,dy=-x\,cos^2y\,dx \Rightarrow tan\,y\frac{1}{cos^2y}dy=-xdx$

$$tany\,.sec^2y\,dy=-x\,dx \Rightarrow \int tany\,.sec^2y\,dy=-\int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\,tan^2y=\frac{-1}{\square}x^2+c$$

2014د 4 انبار / 2017د 3 تطبيقي داخل / 2017 تمهيدي تطبيقي

d) $\tan^2 y\ dy = \sin^3 x dx$

Sol /

$$\int \tan^2 y\, dy = \int \sin^3 x\, dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int \sin x \cdot \sin^2 x\ dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int (\sin x - \cos^2 x \cdot \sin x) dx$$

$$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

2017 تطبيقي د 2 خارج / حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^3 x}{\tan^2 y}$

e) $\frac{dy}{dx} \cos^2 x \cdot \cos^2 y$

$$= \frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x\, dx \Rightarrow \sec^2 y\, dy = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\int \sec^2 y\, dy = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x) \Rightarrow \tan y \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + c$$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

2019تطبيقي د2 / 2018تطبيقي د 2 داخل

Sol / $(3y^2 + e^y)dy = \cos x\, dx$

$$\int (3y^2 + e^y)\, dy = \int \cos x\, dx$$

$$y^3 + e^y = \sin x + c$$

2018تطبيقي د1 داخل / 2019تطبيقي د1 داخل

g) $e^{x+2y} + y' = 0$

sol $e^x \cdot e^{2y} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^x \cdot e^{2y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{2y}} = -e^x dx$

$$e^{-2y} dy = -e^x dx \Rightarrow \int e^{-2y} dy = -\int e^x dx$$

$$-\frac{1}{2} e^{-2y} = -e^x + c \Rightarrow \frac{-1}{2e^{2y}} = -e^x + c$$

التمارين العامة (الفصل الخامس)

2018تطبيقي د3 داخل / 2018احيائي تمهيدي / 2014تمهيدي

س 14 حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{cos^2 y}{x}$, $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Sol/ } \frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{x} \Rightarrow sec^2 y dy = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int sec^2 y \, dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow tan\, y = ln\,|x| + c \Rightarrow tan\,\frac{\pi}{4} = ln\,1 + c \Rightarrow 1 = 0 + c$$

$$c = 1 \Rightarrow tan\, y = ln\,|x| + 1$$

2017تطبيقي د1خارج

س 15 / حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -2x\, tan\, y$ حيث ان $x = 0$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = -2x\, tan\, y \Rightarrow \frac{dy}{tany} = -2xdx \Rightarrow coty\, dy = -2xdx$$

$$\int coty\, dy = -2 \int xdx \Rightarrow \int \frac{cosy}{siny} dy = -2 \int xdx \Rightarrow In|siny| = x^2 + c$$

$$In\left|sin\frac{\pi}{2}\right| = 0 + c \Rightarrow ln\,1 = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow In|siny] = -x^2$$