الفصل الاول : الاعداد المركبة

في دراستنا السابقة تبين لنا ان المعادلة من الدرجة الثانية والتي بالشكل $X^2+a=0$, $a>0$ ليس لها حل في R , وكذلك المعادلات التربيعية التي يكون مميزها (b^2-4ac) عددا سالبا لا يوجد لها حل في R , لذلك نفترض وجود عدد يساوي $\sqrt{-1}$ وهو عدد غير حقيقي ونرمز له بالرمز (i) ويسمى بالوحدة التخيلية .

نستطيع حساب قوى (i) كما في الامثلة :

$$i^2=-1 \Rightarrow -i^2=1 \quad , \boxed{i=\sqrt{-1}}$$

$$i^4=i^2.i^2=(-1)(-1)=1 \quad , i^3=i^2.i=(-1)\,i=-i$$

حفظ $\Longleftarrow$ $\boxed{i^4=1}$, $\boxed{i^3=-i}$, $\boxed{-i^2=1}$, $\boxed{i^2=-1}$, $\boxed{i=\sqrt{-1}}$

بصورة عامة:

عند تبسيط (i^n) نقسم اس (n) على 4 فأذا كان الباقي :

- ✓ الباقي (0) : $\rightarrow i^n=1$
- ✓ الباقي (1) : $\rightarrow i^n=i$
- ✓ الباقي (2) : $\rightarrow i^n=-1$
- ✓ الباقي (3) : $\rightarrow i^n=-i$

الاعداد اكبر من 100 نقسم فقط الاحاد والعشرات على 4 والباقي هو الاس الجديد

س/ اكتب ما يلي بأبسط صورة .

$$i^5=i \ , \quad i^{16}=i^{4(4)+0}=i^0=1 \ , \quad i^{58}=i^{4(14)+2}=i^2=-1$$

$$i^{27}=i^{26}.i=(i^2)^{13}.i=(-1)^{13}.i=-i \ , \quad i^{81}=i^{80}.i=(i^2)^{40}.i=(-1)^{40}.i=i$$

$$i^6=i^2=-1 \ , \ i^{124}=1 \ , \ i^{999}=i^3=-i$$

$$i^{-15}=i^{-15}.i^{16}=i \quad , \quad i^{-7}=i^{-7}.i^8=i^{-7+8}=i$$

ملاحظة

اذا كانت أ مرفوعة الى قوى صحيحة سالبة نضرب ب أ تقبل القسمة على 4 بدون باقي اكبر من مطلق القوى السالبة , او ننزل أ الى المقام ليصبح اسه موجب ثم نضع في البسط أ مرفوعة الى اس يقبل القسمة على 4 بدون باقي اكبر من مطلق القوى السالبة

الدكتور محمد الربيعي

$$i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i$$

(عند الضرب تجمع الاسس وعند القسمة تطرح الاسس اذا كانت الاساسات متشابهة)

$$i^{4n+1} = i^{4n}.i = (i^4)^n.i = i \, , i^{12n+93} = (i^4)^{3n}.i^{93} = (1)^{3n}\, i^{4(23)+1} = (1)(i) = i$$

$$i^{2n+1} = (i^2)^n .i = (-1)^n .i = \begin{cases} -i & n \text{ فردي} \\ +i & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

ملاحظة

يمكن كتابة الجذور التربيعية لأي عدد حقيقي سالب بدلالة i حيث تحذف الاشارة السالبة ونكتب i على يمين الجذر كما في الامثلة .

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4i$, $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1} = 5i$

$\sqrt{-12} = \sqrt{12}.\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}i$, $\sqrt{-15} = \sqrt{15}.\sqrt{-1} = \sqrt{15}i$

العدد المركب:- هو العدد الذي يكتب بالصيغة a+bi حيث a,b اعداد حقيقية و $i=\sqrt{-1}$ حيث يسمى a الجزء الحقيقي و b الجزء التخيلي , ويرمز لمجموعة الاعداد المركبة بالرمز C ويقال للصيغة a+bi بالصيغة العادية (الجبرية) للعدد .

س / عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للاعداد المركبة الاتية :

العدد	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
-2+3i	-2	3
-2	-2	0
-3i	0	-3
3-5i	3	-5

س/ اكتب الاعداد الاتية على صورة a+bi :

$-5 = -5 + 0i$, $\sqrt{-100} = \sqrt{100}\sqrt{-1} = 10i = 0 + 10i$

$-1 - \sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3}i$, $\frac{1 + \sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{25}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

$9i^{24} + 5i^9 = 9 + 5i$, $\sqrt{3}i + 9 - i = 9 + (\sqrt{3} - 1)i$

ملاحظة

اذا كان العدد المركب يتكون من جزء حقيقي فقط فان الجزء التخيلي يكون صفرا والعكس بالعكس .

الصيغة الديكارتية للعدد المركب :- هو تحويل العدد المركب من الصيغة العادية (الجبرية) $(a+bi)$ الى زوج مرتب $(a\,,b)$.

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	الصيغة الديكارتية	الصيغة القطبية
2	3	(3,2)	$3+2i$
1	-1	(-1,1)	$-1+i$
-1	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},-1)$	$\sqrt{3}-i$
-3	0	(0,-3)	$,-3i$
0	2	(2,0)	2

مساواة عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان اذا تساوى جزئيهما الحقيقيين وتساوى جزئيهما التخيليين وبالعكس .

اذا كان : $c_1=a_1+b_1i \quad , c_2=a_2+b_2i$

فأن $c_1=c_2 \ , \ a_1=a_2 \ , \ b_1=b_2$

س/ جد قيمة كل من x , y الحقيقتين اللتين تحققان المعادلة في كل مما يأتي .

$a+bi=1+2i \Rightarrow a=1 \ , b=2$

$a+bi=3-4i \Rightarrow a=3 \ , b=-4$

1) $2x-1+2i=1+(y+1)i$

sol: $2x-1=1 \ \Rightarrow 2x=2 \ \Rightarrow x=1$

$2=y+1 \ \Rightarrow y=2-1 \Rightarrow y=1$

2) $3x+4i=2+8yi$

sol: $3x=2 \ \rightarrow x=\frac{2}{3} \ , \quad 4=8y \ \rightarrow y=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

3) $(2y+1)-(2x-1)i=-8+3i$

sol: $2y+1=-8 \ \Rightarrow 2y=-9 \ \Rightarrow y=\frac{-9}{2}$

$-(2x-1)=3 \ \Rightarrow -2x+1=3 \Rightarrow -2x=2 \Rightarrow x=-1$

العمليات على مجموعة الاعداد المركبة

اولا : عملية الجمع :

نجمع الجزء الحقيقي مع الحقيقي والجزء التخيلي مع التخيلي وبحسب الاشارات .

س) جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

1) $(3+4\sqrt{2}i)+(5-2\sqrt{2}i)=8+2\sqrt{2}i$

2) $(1-i)+3i=1+2i$

3) $3+(2-5i)=(3+0i)+(2-5i)=5-5i$

خواص عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة :

1) الخاصية الابدالية $c_1+c_2=c_2+c_1$

2) الخاصية التجميعية $c_1+(c_2+c_3)=(c_1+c_2)+c_3$

3) النظير الجمعي : هو نفس العدد المركب عكس الاشارة .

اذا كان $c=a+bi$ فان النظير الجمعي له هو $-c=-a-bi$

النظير الجمعي له هو 5-2i , 9 النظير الجمعي له هو -9 , -3i النظير الجمعي له 3i -5+2i

4) العنصر المحايد الجمعي يساوي صفر ويرمز له بالرمز (e) أي ان $e=0=0+0i$

ثانيا : عملية الطرح :

ندخل الاشارة على القوس الثاني ونلغي الاقواس

س/ جد ناتج :

1) $(7-13i)-(9+4i)=7-13i-9-4i=-2-17i$

2) $(-3+i)-(-5+7i)=-3+i+5-7i=2-6i$

س/ حل المعادلة $(2-4i)+x=-5+i$ حيث $x\in C$

sol: $(2-4i)+x=-5+i \Rightarrow x=-5+i-(2-4i)$

$x=-5+i-2+4i \Rightarrow x=-7+5i$

ثالثا : عملية الضرب :

عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس ويجب الانتباه الى تحويل (i^2) الى (-1)

س/ ضع كلا مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

1) $(2-3i)(3-5i) = 6-10i-9i+15i^2 = 6-19i-15 = -9-19i$

2) $(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2 = 9+24i-16 = -7+24i$

( )^2 قانون مربع حدانية $= (\text{مربع الحد الاول}) \pm 2(\text{الاول} \times \text{الثاني}) + (\text{مربع الحد الثاني})$

3) $i(1+i) = i+i^2 = i-1 = -1+i$

4) $-\frac{5}{2}(4+3i) = \boxed{-10-\frac{15}{2}i}$

5) $(1+i)^2+(1-i)^2 = (1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$

$= (1+2i-1)+(1-2i-1) = 2i-2i = 0$

6) $(2+3i)^2 + (12+2i) = (4+12i+9i^2)+(12+2i)$

$(4+12i-9)+(12+2i) = (-5+12i)+(12+2i) = 7+14i$

7) $(10+3i)(0+6i) = 0+60i+0+18i^2 = 60i-18 = -18+60i$

ملاحظة

اذا كان العدد المركب مرفوع الى اس اكبر من (2) نتبع ما يلي :-

اولا : اذا كان الاس زوجي نستخدم قانون الرفع $(a+bi)^n = [(a+bi)^2]^{\frac{n}{2}}$

$(a+bi)^4 = [(a+bi)^2]^2$, $(a+bi)^{12} = [(a+bi)^2]^6$

8) $(1+i)^4 - (1-i)^4 = [(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2 = [1+2i+i^2]^2 - [1-2i+i^2]^2$

$= [1+2i-1]^2 - [1-2i-1]^2 = (2i)^2 - (-2i)^2 = 4i^2 - 4i^2 = -4+4 = 0$

ثانيا : اذا كان الاس فردي فطريقة الحل هي سحب قوس واحد ونتعامل مع الباقي كما في الاسس الزوجية

ثم نستخدم طريقة التوزيع $(a+bi)^n = [(a+bi)^2]^{\frac{n-1}{2}}(a+bi)^1$ ونجد الناتج

$(a+bi)^3 = (a+bi)^2(a+bi)$, $(a+bi)^{13} = [(a+bi)^2]^6(a+bi)$

9) $(1+i)^3 + (1-i)^3 = (1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$

$= (1+2i+i^2)(1+i) + (1-2i+i^2)(1-i)$

$= (1+2i-1)(1+i) + (1-2i-1)(1-i)$

$= 2i(1+i) + (-2i)(1-i) = (2i+2i^2) + (-2i) + 2i^2) = -2+2i-2-2i = -4$

10) $(1+i)^5-(1-i)^5$ (2د 2012)

sol: $(1+i)^5=(1+i)^4(1+i)=[(1+i)^2]^2(1+i)=(1+2i+i^2)^2(1+i)$

$=(1+2i-1)^2(1+i)=(2i)^2(1+i)=4i^2(1+i)=-4(1+i)=-4-4i$

$(1-i)^5=(1-i)^4(1-i)=[(1-i)^2]^2(1-i)=(1-2i+i^2)^2(1-i)$

$=(1-2i-1)^2(1-i)=(-2i)^2(1-i)=4i^2(1-i)=-4(1-i)=-4+4i$

$(1+i)^5-(1-i)^5=(-4-4i)-(-4-4i)=(-4+4i)+(4-4i)=0-8i$

11): $\frac{(1+i)^{15}}{128}=\frac{[(1+i)^2]^7\,(1+i)}{128}=\frac{(1+2i+i^2)^7(1+i)}{128}$ (1د 2018)

$=\frac{(2i)^7(1+i)}{128}=\frac{-128i(1+i)}{128}=-i(1+i)=-i-i^2=-i+1=1-i$

س) اذا كانت $y=3-i$, $x=2+3i$ جد قيمة x^2+2y^2 (1د 2000)

sol: $x^2+2y^2=(2+3i)^2+2(3-i)^2=(4+12i+9i^2)+2(9-6i+i^2)$

$=(4+12i-9)+2(9-6i-1)=(-5+12i)+2(8-6i)$

$=(-5+12i)+(16-12i)=11$

خواص عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة :

1) الخاصية الابدالية $c_1\,.\,c_2=c_2\,.\,c_1$

2) الخاصية التجميعية $c_1\,.\,(c_2\,.\,c_3)=(c_1\,.\,c_2).\,c_3$

3) النظير الضربي للعدد المركب هو مقلوب العدد المركب عدا الصفر :

حيث ان النظير الضربي للعدد المركب C هو $\frac{1}{C}$, النظير الضربي للعدد $5+2i$ هو $\frac{1}{5+2i}$

4) العنصر المحايد الضربي يساوي واحد $1=1+0i$

مساواة مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب :- هو نفس العدد المركب مع عكس اشارة الجزء التخيلي فقط .

اذا كان $c = a + bi$ فأن مرافقه هو $\bar{c} = a - bi$ حيث $a , b \in R$

مرافق العدد المركب	العدد المركب		نظيره الضربي	نظيره الجمعي	مرافقه	العدد
3-i	3+i		$\frac{1}{a+bi}$	$-a-bi$	$a-bi$	$a+bi$
5+4i	5-4i		$\frac{1}{2+3i}$	$-2-3i$	$2-3i$	$2+3i$

ملاحظة

1. مرافق مرافق العدد المركب يساوي العدد المركب نفسه أي ان $\bar{\bar{c}} = c$
2. حاصل ضرب العدد المركب بمرافقه ينتج (مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي)

اذا كان $c = a + bi , \quad \bar{c} = a - bi$

فأن $c . \bar{c} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2)$

3. مرافق العدد الحقيقي يساوي العدد الحقيقي نفسه أي اذا كان $c \in R$ فأن $\bar{C} = C$
4. كل عددين مركبين مترافقين يكون حاصل ضربهما وحاصل جمعهما يساوي عدد حقيقي .
5. مجموع أي عددين مركبين مترافقين يساوي ضعف الجزء الحقيقي والفرق بين أي عددين مركبين مترافقين يساوي ضعف الجزء التخيلي .

رابعا : عملية القسمة :

لإيجاد حاصل قسمة أي عددين مركبين يجب ان نجعل البسط والمقام بالصيغة العادية للعدد المركب ومن ثم نضرب البسط والمقام بمرافق المقام للتخلص من (i) الموجودة في المقام للحصول على عدد مركب بصيغته العادية .

$$\boxed{\frac{c_1}{c_2}=\frac{c_1}{c_2}\times\frac{\overline{c}_2}{\overline{c}_2}}$$

س : ضع كلا مما يأتي بالصورة a+bi

1) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{1+1}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i=0+i$

2) $\frac{2-i}{3+4i}=\frac{2-i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}=\frac{6-11i-4}{25}=\frac{2-11i}{25}$
$=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$

3) $\frac{1+\sqrt{-4}}{-2+\sqrt{-1}}=\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{1+2i}{-2+i}\times\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{-2-i-4i+2}{4+1}=\frac{-5i}{5}=-i=\boxed{0-i}$

4) $\frac{12+i}{\sqrt{-1}}=\frac{12+i}{i}=\frac{12+i}{i}.\frac{-i}{-i}=\frac{-12i-i^2}{-i^2}=\frac{-12i+1}{1}=1-12i$

5) $\frac{3+4i}{3-4i}=\frac{3+4i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{9+12i+12i-16}{9+16}=\frac{-7+24i}{25}=\frac{-7}{25}+\frac{24}{25}i$

6) $\frac{i}{2+3i}=\frac{i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{2i-3i^2}{4+9}=\frac{2i+3}{13}=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$

ملاحظة

اذا كان لدينا $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^{n}$ نتبع ما يلي :

1) نتخلص من البسط والمقام بضرب داخل القوس بالمرافق

2) بعد وضع داخل القوس بالصيغة العادية للعدد المركب نتخلص من الاقواس

7) $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{3-3i+i-i^2}{1+1}\right)^3 = \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}-\frac{2i}{2}\right)^3$

$= (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i) = (4-4i+i^2)(2-i) = (3-4i)(2-i)$

$= 6-3i-8i+4i^2 = 2-11i$

8) $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{3-3i-i+i^2}{1+1}\right)^2 = \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2$

$= \frac{2}{2}-\frac{4}{2}i$ (1د 1999)

$= (1-2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$

ملاحظة

اذا كان السؤال بصيغة (كسر × كسر) في هذه الحالة نضرب البسط في البسط والمقام في المقام ومن ثم نضرب الناتج بالعامل المرافق اذا كان المقام يحوي (i)

9) $\frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2} = \frac{-10+11i}{5-3i}\cdot\frac{5+3i}{5+3i}$

$= \frac{-50-30i+55i+33i^2}{25+9} = \frac{-83+25i}{34} = \frac{-83}{34}+\frac{25}{34}i$

10) $(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$

11) $\frac{(1-i)^{15}}{(1+i)^{14}} = \frac{(1-i)^{14}(1-i)}{(1+i)^{14}} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{14}(1-i) = \left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^{14}(1-i)$

$= \left(\frac{1-2i+i^2}{1+1}\right)^{14}(1-i) = \left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^{14}(1-i) = \left(\frac{-2i}{2}\right)^{14}(1-i)$

$= (-i)^{14}(1-i) = i^{14}(1-i) = i^2(1-i) = (-1)(1-i) = -1+i$

س) اذا كان $a+bi=\frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3+b^3)=7$ (2010 تمهيدي)

sol: $a+bi=\frac{2+i}{1-i}=\frac{2+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{2+2i+i-1}{2}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

$a+bi=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \xrightarrow{\text{تساوي عددين مركبين}} a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{3}{2}$

$2(a^3+b^3)=2\left[(\frac{1}{2})^3+(\frac{3}{2})^3\right]=2\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)=2\left(\frac{28}{8}\right)=\frac{28}{4}=7$

ملاحظة

يستخدم المرافق في ايجاد النظير الضربي للعدد المركب وذلك بضرب البسط والمقام بمرافق المقام للتخلص من (i) الموجودة في المقام .

س: جد النظير الضربي للعدد المركب $c=2-2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب .

الحل : النظير الضربي للعدد c هو $\frac{1}{c}$

$\frac{1}{c}=\frac{1}{2-2i}=\frac{1}{2-2i}\times\frac{2+2i}{2+2i}=\frac{2+2i}{4+4}=\frac{2+2i}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}i=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

س) ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي $(3+2i)(-2+i)$ (1د 2002)

sol : $c=(3+2i)(-2+i)=-6+3i-4i+2i^2=-6-i-2=-8-i$

$\frac{1}{c}=\frac{1}{-8-i}=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}=\frac{-8+i}{64+1}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$

ملاحظة

المرافق يتوزع على الجمع والطرح والضرب والقسمة .

$\overline{c_1\pm c_2}=\overline{c_1}\pm\overline{c_2}$

$\overline{c_1*c_2}=\overline{c_1}*\overline{c_2}$

$\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}\ ,\ c_2\neq 0$

س: اذا كان $c_1 = 1+i \ , c_2 = 3-2i$ فتحقق من :-

$\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$ 2) $\overline{c_1 * c_2} = \bar{c}_1 * \overline{c_2}$

sol :

1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{(1+i)+(3-2i)} = \overline{(4-i)} = 4+i$

$\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)} = (1-i)+(3+2i) = 4+i$

$\therefore \quad \overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

$\overline{c_1 - c_2} = \overline{c_1} - \overline{c_2}$ واجب

2) $\overline{c_1 * c_2} = \overline{(1+i)(3-2i)} = \overline{3-2i+3i-2i^2} = \overline{3+i+2} = \overline{5+i} = 5-i$

$\overline{c_1} * \overline{c_2} = \overline{(1+i)} \ \overline{(3-2i)} = (1-i)(3+2i) = 3+2i-3i-2i^2$

$= 3-i+2 = 5-i$

$\therefore \ \overline{c_1 * c_2} = \overline{c_1} * \overline{c_2}$

س: اذا كان $c_1 = 3-2i \ , c_2 = 1+i$ فتحقق من $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}$

sol : $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)} = \overline{\frac{3-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}} = \overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{1+1}\right)} = \left(\frac{3-5i-2}{2}\right)$

$= \overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)} = \overline{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

$\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2} = \frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{3+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1} = \frac{3+5i-2}{2}$

$= \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \quad , \therefore \quad \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}$

س: اثبت ان

1- $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

sol : $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{1}{4-4i+i^2} - \frac{1}{4+4i+i^2} = \frac{1}{4-4i-1} - \frac{1}{4+4i-1}$

$= \frac{1}{3-4i} - \frac{1}{3+4i} = \left(\frac{1}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}\right) - \left(\frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i}\right)$

$= \frac{3+4i}{9+16} - \frac{3-4i}{9+16} \Rightarrow \frac{3+4i}{25} - \frac{3-4i}{25} = \frac{3+4i-3+4i}{25} = \frac{8}{25}i$

2- $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$ (3د 2012)

sol: $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\frac{1-2i+i^2}{1+i}+\frac{1+2i+i^2}{1-i}=\frac{1-2i-1}{1+i}+\frac{1+2i-1}{1-i}$

$\frac{-2i}{1+i}+\frac{2i}{1-i}=\left(\frac{-2i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}\right)+\left(\frac{2i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}\right)=\left(\frac{-2i+2i^2}{2}\right)+\left(\frac{2i+2i^2}{2}\right)$

$=\left(\frac{-2-2i}{2}\right)+\left(\frac{-2+2i}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2}-\frac{2i}{2}\right)+\left(\frac{-2}{2}+\frac{2i}{2}\right)=(-1-i)+(-1+i)=-2$

3- $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$ (1د 2013)

sol : $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=(1-i)[1-(-1)][1-(-i)]$

$=(1-i)(1+1)(1+i)$

$=2(1-i)(1+i)=2(1+1)=2(2)=4$

ملاحظة

اذا كان لدينا عددان مركبان مترافقان وكان المطلوب ايجاد قيم x , y الحقيقية نطبق الخاصية $c=\bar{c}$ (أي نجد المرافق مثلا للعدد الاول ونساويه مباشرة بالعدد الثاني) .

س : اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x,y\in R$ (3د 2017 احيائي).

sol : $\frac{3-2i}{i}=\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}\Rightarrow\frac{3-2i}{i}=\frac{x+yi}{1-5i}$

$xi+yi^2=3-15i-2i+10i^2\Rightarrow xi-y=3-17i-10$

$xi-y=-7-17i\Rightarrow\therefore x=-17\ ,-y=-7\Rightarrow y=7$

س: جد قيمة X , Y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{3+i}{2-i}$, $\frac{6}{x+yi}$ مترافقان . (3د 2015)

sol: $\frac{\overline{3+i}}{2-i}=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow\left(\frac{3-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}\right)=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}=\frac{6}{x+yi}$

$\frac{6-5i-1}{5}=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow\frac{5-5i}{5}=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow\frac{5}{5}-\frac{5}{5}i=\frac{6}{x+yi}$

$1-i=\frac{6}{x+yi}\Rightarrow x+yi=\frac{6}{1-i}\Rightarrow x+yi=\frac{6}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$

$x+yi=\frac{6+6i}{2}\Longrightarrow x+yi=\frac{6}{2}+\frac{6}{2}i\Longrightarrow x+yi=3+3i\Rightarrow\boxed{x=3}\ ,\boxed{y=3}$

التحليل الجبري في مجموعة الاعداد المركبة

1. في حالة مجموع مربعين (x^2+y^2) نضع بدل الجمع طرح ونضرب الحد الثاني ب $(-i^2)$ ثم يصبح فرق مربعين ونحلل

$$x^2+y^2=x^2-y^2i^2=(x-yi)(x+yi)$$
$$x^2+9=x^2-9i^2=(x-3i)(x+3i)$$

2. في حالة مجموع مكعبين او الفرق بينهما مع وجود i في احد الحدود نضرب أي حد من الحدود بالعدد (1) ويعبر عنه ب $(-i^2)$ ثم نحلل , او نضع i^4 في الحد الخالي من i ونستخرج i عامل مشترك :

$$x^3-i=x^3+i^3=(x+i)(x^2-xi+i^2)=(x+i)(x^2-xi-1)$$
$$x^3i-1=x^3i-i^4=i(x^3-i^3)=i(x-i)(x^2+xi+i^2)=i(x-i)(x^2+xi-1)$$

3. في بعض الحدوديات الثلاثية مع وجود (i) في الحد الوسط , في هذه الحالة نضرب الحد الاخير بالعدد (1) ويعبر عنه ب $(-i^2)$ ثم نحلل .

$$x^2+2xi+8=x^2+2xi-8i^2=(x+4i)(x-2i)$$

4. طريقة المربع الكامل : نجعل معامل x^2 يساوي واحد ثم نضيف ونطرح مربع نصف معامل x ثم نكمل الحل

$$x^2-6x+13=0\Rightarrow x^2-6x+9-9+13=0\Rightarrow(x-3)^2=-4$$
$$x-3=\pm 2i\Rightarrow x=3\pm 2i$$

5. طريقة الدستور : سوف ندرسها لاحقا

6. تحليل الاعداد في مجموعة الاعداد المركبة : في هذه الحالة نحول العدد الى مجموع او طرح مربعين ونضرب العدد الثاني بالعدد (1) ويعبر عنه ب $(-i^2)$.

س: حلل كل من الاعداد الاتية الى حاصل ضرب عاملين من صورة a+bi حيث a , b عددين نسبيين .

$$10 = 9 + 1 = 9 - i^2 = (3 - i)(3 + i)$$
$$53 = 49 + 4 = 49 - 4i^2 = (7 - 2i)(7 + 2i)$$
$$85 = 36 + 49 = 36 - 49i^2 = (6 - 7i)(6 + 7i)$$
$$41 = 25 + 16 = 25 - 16i^2 = (5 - 4i)(5 + 4i)$$
$$125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11 - 2i)(11 + 2i)$$
$$29 = 25 + 4 = 25 - 4i^2 = (5 - 2i)(5 + 2i)$$

س) ضع بالصيغة العادية للعدد المركب بدون الضرب بالعامل المرافق

$$1)\ \frac{25}{3+4i} = \frac{9+16}{3+4i} = \frac{9-16i^2}{3+4i} = \frac{(3-4i)(3+4i)}{3+4i} = 3-4i$$

$$2)\ \frac{40}{1+3i} = \frac{4(10)}{1+3i} = \frac{4(1+9)}{1+3i} = \frac{4(1-9i^2)}{1+3i} = \frac{4(1-3i)(1+3i)}{1+3i} = 4-12i$$

أيجاد قيم (x,y)

1. نبسط المعادلة اولا أي نكتب الطرف الايمن والطرف الايسر بالصيغة العادية للعدد المركب (اما نضرب بالعامل المرافق او نفكك قوس او نضرب قوس في قوس).
2. انتبه لوجود التحليل (فرق مربعين , تجربة , فرق او مجموع مكعبين , عدد ....) فهنا يجب ان نحلل ونختصر ولا ننسى ان نضيف $(-i^2)$ في حالة وجود (مجموع مربعين .... الخ)

$$\frac{9y^2+49}{3y+7i} = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i} = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{(3y+7i)} = 3y-7i$$

3. لا نقوم بالضرب بالمرافق في حالة وجود x , y في كسر واحد (بسط او مقام) وحاول ان تجد مخرج اخر للحل حسب الصيغة
4. نكون معادلتين حيث الجزء الحقيقي للطرف الايمن يساوي الجزء الحقيقي للطرف الايسر والجزء التخيلي للطرف الايمن يساوي الجزء التخيلي للطرف الايسر .
5. نحلل المعادلتين انيا .

س : جد قيمة كل من X , Y الحقيقتين اللتين تحققان المعادلات الاتية .

1) $y+5i=(2x+i)(x+2i)$ (2008 د2)

sol : $y+5i=2x^2+4xi+xi+2i^2$

$y+5i=2x^2+5xi-2$, $y=2x^2-2$ ..... (1

$5x=5 \rightarrow x=1$ نعوض قيمة x في معادلة (1) لنحصل على y

$y=2(1)^2-2 \Rightarrow y=2-2 \rightarrow y=0$

2) $8i=(x+2i)(y+2i)+1$

sol : $8i=(x+2i)(y+2i)+1 \Rightarrow -1+8i=xy+2xi+2yi+4i^2$

$-1+8i=xy+2xi+2yi-4 \Rightarrow -1+8i=(xy-4)+(2x+2y)i$

$xy-4=-1 \Rightarrow xy=3 \Rightarrow y=\frac{3}{x}$ ..... (1)

$[2x+2y=8] \div 2 \Rightarrow x+y=4 \Rightarrow x=4-y$ ..... (2)

$y=\frac{3}{4-y} \Rightarrow 4y-y^2=3 \Rightarrow y^2-4y+3=0 \Rightarrow (y-3)(y-1)=0$

$y=3 \Rightarrow x=1$, $y=1 \Rightarrow x=3$

3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$ (2012 خارج , 2015 تمهيدي)

sol : $\left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)+(x+yi)=(1+4i+4i^2) \Rightarrow \frac{1-i-i+i^2}{1+1}+(x+yi)$

$=1+4i-4$

$\frac{1-2i-1}{1+1}+(x+yi)=-3+4i \Rightarrow \frac{-2i}{2}+x+yi=-3+4i \Rightarrow -i+x+yi$

$=-3+4i$

$x+yi=-3+4i+i \Rightarrow x+yi=-3+5i \Rightarrow x=-3$, $y=5$

4) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$ (1د 2005 , 1د 2004)

sol: $\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)y=\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}\right)$

$\left(\frac{2-2i-i+i^2}{1+1}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)y=\frac{-i}{-i^2}$ $(-i^2=1)$

$\left(\frac{2-3i-1}{2}\right)x+\left(\frac{6-5i-1}{5}\right)y=-i \rightarrow \left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y=-i$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=-i \rightarrow \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi=-i$

$$\left(\frac{1}{2}x+y\right)+\left(-\frac{3}{2}x-y\right)i=0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x+y=0\right]*2 \rightarrow x+2y=0 \rightarrow x=-2y \ \ldots\ldots(1$$

$$\left[-\frac{3}{2}x-y=-1\right]*2 \rightarrow -3x-2y=-2 \ \ldots\ldots\ldots(2$$

$$-3(-2y)-2y=-2 \rightarrow 6y-2y=-2$$

$$4y=-2 \rightarrow y=\frac{-1}{2}\ ,\quad x=-2y=(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)\rightarrow x=1$$

ملاحظة

اذا كانت معاملات البسط مربعات لمعاملات المقام وبالعكس في هذه الحالة نحلل الحدود المربعة ونختصر

س: جد قيمة $x,y\in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$ (تمارين عامة) (3د 2003)

sol : $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i}=\frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$

$$\frac{y}{1+i}=x-2i \Rightarrow y=x-2i+xi-2i^2 \Rightarrow y=x-2i+xi+2$$

$$y+0i=(x+2)+(-2+x)i$$

$$y=x+2 \quad \ldots..(1) \quad ,0=-2+x \Rightarrow x=2 \qquad ,y=x+2=2+2\Rightarrow y=4$$

س) جد قيمتي $x,y\in R$ اذا علمت ان $\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$ (2018 د1 احيائي خارج)

sol : $\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)} \Rightarrow \frac{x-yi}{x^2-y^2i^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$

$$\frac{x-yi}{(x-yi)(x+yi)}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)} \Rightarrow \frac{1}{(x+yi)}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$$

$$x+yi=(1+xi)(3+i)\Rightarrow x+yi=3+i+3xi+xi^2$$

$$x+yi=(3-x)+(1+3x)i$$

$$x=3-x\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2} \qquad ,\ y=1+3x\Rightarrow y=1+\frac{9}{2}\Rightarrow y=\frac{11}{2}$$

ملاحظة

اذا وجد المتغيرين x , y في المقام وفي كسرا واحدا فيفضل ان يترك هذا الكسر وحده في احد الاطراف ثم نجعل الحدود المتبقية في الطرف الاخر ثم نقوم بتبسيطها ثم نستفاد من القاعدة الرياضية (حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين) .

س: جد قيمتي كل من x , y الحقيقيتين اللتان تحققان المعادلة $\frac{6}{x+yi}+(2-i)^2=4-3i$ (2019 د1 احيائي)

sol : $\frac{6}{x+yi}+(2-i)^2=4-3i \Rightarrow \frac{6}{x+yi}+(4-4i+i^2)=4-3i$

$\frac{6}{x+yi}+(4-4i-1)=4-3i \Rightarrow \frac{6}{x+yi}+(3-4i)=4-3i$

$\frac{6}{x+yi}=4-3i-(3-4i) \Rightarrow \frac{6}{x+yi}=4-3i-3+4i$

$\frac{6}{x+yi}=1+i \Rightarrow x+yi=\frac{6}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \Rightarrow x+yi=\frac{6(1-i)}{1+1}$

$x+yi=\frac{6(1-i)}{2} \Rightarrow x+yi=3(1-i) \Rightarrow x+yi=3-3i$

$\therefore \quad x=3 \quad , \quad y=-3$

الجذور التربيعية للعدد المركب

اولا :- لايجاد الجذران التربيعيان لعدد حقيقي سالب (-a) أي خالي من (i) في هذه الحالة نفرض ان

$c^2=-a \rightarrow c=\pm\sqrt{-a} \Rightarrow c=\pm\sqrt{a}\,i$

س/ جد الجذور التربيعية للاعداد $-25 , -17$

sol : $c^2=-25$ نفرض ان $\Rightarrow c=\pm\sqrt{-25} \Rightarrow c=\pm\sqrt{25}i=\pm5i$

$c^2=-17$ نفرض ان $\Rightarrow c=\pm\sqrt{-17} \Rightarrow c=\pm\sqrt{17}i$

نفرض العدد المعطى c^2
ثم نجذر الطرفين

ثانيا :- لإيجاد الجذران التربيعيان لعدد مركب كامل او عدد مركب بجزئه التخيلي فقط (يحتوي على i) نتبع ما يلي:

1. لإيجاد الجذر التربيعي يجب ان يكون العدد المركب بالصيغة العادية $(a+bi)$ (فاذا كان العدد قوس مرفوع لاس معين فيجب ان نفتح الاقواس واذا كان العدد المركب كسر $(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}})$ فنضرب بالعامل المرافق)
2. نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد المركب $a+bi=(x+yi)^2$
3. نحلل الطرف الايمن $a+bi=(x+yi)^2$
4. نبسط $a+bi=x^2+2xyi+y^2i^2$
5. تكوين معادلتين $a+bi=(x^2-y^2)+(2xy)i$
6. نحلل المعادلتين انيا (نعوض معادلة (2) في معادلة (1)) ونستخرج قيم x , y ومن ثم نكتب الجذران التربيعيان

$\boxed{x^2-y^2=a}\ldots..(1) \quad , \quad \boxed{2xy=b}\ldots\ldots(2)$

س/ جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8 + 6i$.

نفرض ان $(x + yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $8 + 6i$ $\Leftarrow$ $\therefore$ sol : $8 + 6i = (x + yi)^2$

$$8 + 6i = x^2 + 2xyi + y^2i^2$$

$$8 + 6i = x^2 + 2xyi - y^2 \Rightarrow 8 + 6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 8 \dots\dots(1) \quad , 2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2x} \Rightarrow y = \frac{3}{x} \dots\dots(2)$$

نعوض معادلة رقم (2) في معادلة رقم (1)

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Longrightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] * x^2$$

$$x^4 - 9 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

$$(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$$

$$\text{either } x = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{OR } x = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{x} = \frac{3}{-3} = -1$$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\{(3 + i) \ , \ (-3 - i)\}$

س/ جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الاتية :

1) $8i$

نفرض ان $(x + yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $8i$ $\Leftarrow$ $\therefore$ sol: $8i = (x + yi)^2$

$$8i = x^2 + 2xyi + y^2i^2 \Rightarrow 8i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$0 + 8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1) \quad , 2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{2x} \Rightarrow y = \frac{4}{x} \dots\dots(2)$$

نعوض معادلة رقم (2) في معادلة رقم (1)

$$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0$$

$$\left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] * x^2 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x^2 + 4) = 0 \text{ يهمل} \quad , \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\text{either } x = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{OR } x = -2 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{-2} = -2$$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\{(2 + 2i) \ , \ (-2 - 2i)\}$

2) -i

sol : $\therefore -i = (x+yi)^2 \Leftarrow -i$ نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد

$-i = x^2 + 2xyi + y^2i^2 \rightarrow 0 - i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (1 \quad , \quad 2xy = -1 \rightarrow y = \frac{-1}{2x} \ldots\ldots\ldots (2$

$x^2 - \left(\frac{-1}{2x}\right)^2 = 0 \rightarrow \left[x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0\right] . 4x^2$ ← (1) نعوض معادلة (2) في معادلة

$4x^4 - 1 = 0 \rightarrow (2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$

$2x^2 + 1 = 0$ يهمل

$2x^2 - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-1}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \rightarrow y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $(2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2})$

$x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2(\frac{-1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\left\{(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i), (-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\}$

3) – 6i

sol : $\therefore -6i = (x+yi)^2 \Leftarrow -6i$ نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد

$-6i = x^2 + 2xyi + y^2i^2 \rightarrow 0 - 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (1 \quad , \quad 2xy = -6 \rightarrow y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x} \ldots\ldots\ldots (2$

$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 0 \rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 0\right] . x^2$ ← (1) نعوض معادلة (2) في معادلة

$x^4 - 9 = 0 \rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$x^2 + 3 = 0$ يهمل (لانه مجموع مربعين)

$x^2 - 3 = 0 \rightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

either $x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-3}{x} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-(\sqrt{3}\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

OR $x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-3}{x} = \frac{-3}{-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\{(\sqrt{3} - \sqrt{3}i), (-\sqrt{3} + \sqrt{3}i)\}$

5) $7+24i$

sol : $\therefore 7+24i=(x+yi)^2 \Leftarrow 7+24i$ نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد

$7+24i=x^2+2xyi+y^2i^2$

$7+24i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=7 \ldots\ldots\ldots(1 \quad , \quad 2xy=24 \rightarrow y=\frac{24}{2x}\Rightarrow y=\frac{12}{x} \ldots\ldots(2$

$x^2-\left(\frac{12}{x}\right)^2=7 \rightarrow \left[x^2-\frac{144}{x^2}=7\right].x^2$ ← (1) نعوض معادلة (2) في معادلة

$x^4-144=7x^2 \rightarrow x^4-7x^2-144=0 \rightarrow (x^2-16)(x^2+9)=0$

$x^2+9=0$ يهمل (لانه مجموع مربعين)

$x^2-16=0 \rightarrow (x-4)(x+4)=0$

either $x=4 \Rightarrow y=\frac{12}{4}=3$, OR $x=-4 \Rightarrow y=\frac{12}{-4}=-3$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\{(4+3i),(-4-3i)\}$

6) $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$ (لا يمكن ايجاد الجذر التربيعي للعدد المركب الا بعد كتابته بالصيغة العادية)

sol : $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}.\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{1+3}=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}=1+\sqrt{3}i$

$\therefore 1+\sqrt{3}i=(x+yi)^2 \Leftarrow 1+\sqrt{3}i$ نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد

$1+\sqrt{3}i=x^2+2xyi+y^2i^2 \rightarrow 1+\sqrt{3}i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=1 \ldots\ldots(1) \quad , \quad 2xy=\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x} \ldots\ldots(2)$

$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=1$ نعوض معادلة رقم (2) في معادلة رقم (1)

$\left[x^2-\frac{3}{4x^2}=1\right]*4x^2 \Rightarrow 4x^4-3=4x^2 \Rightarrow 4x^4-4x^2-3=0$

$(2x^2-3)(2x^2+1)=0 \quad , \quad (2x^2+1)=0$ يهمل

$2x^2-3=0 \Rightarrow 2x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}$

س) اذا كان $c,d \in R$ وكان $c+di=\frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c-di}$ (1997 د1)

sol: $c+di=\frac{7-4i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i}=\frac{14-7i-8i+4i^2}{4+1}=\frac{14-15i-4}{4+1}=\frac{10-15i}{5}$
$=2-3i$

$c+di=2-3i \rightarrow c=2\ ,d=-3$

$\sqrt{2c-di}=\sqrt{4-(-3)i}=\sqrt{4+3i}$

نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $4+3i \Leftarrow 4+3i=(x+yi)^2$

$4+3i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=4 \ldots\ldots(1 \quad , \quad 2xy=3 \rightarrow y=\frac{3}{2x} \ldots\ldots(2$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) $\leftarrow$ $x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4 \rightarrow \left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right].4\,x^2$

$4x^4-9=16x^2 \rightarrow 4x^4-16x^2-9=0 \rightarrow (2x^2-9)(2x^2+1)=0$

either $2x^2+1=0$ يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

OR $2x^2-9=0 \rightarrow 2x^2=9 \rightarrow x^2=\frac{9}{2} \rightarrow \boxed{x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}} \rightarrow y=\frac{3}{\pm2(\frac{3}{\sqrt{2}})} \rightarrow \boxed{y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right),\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}$

حل المعادلة التربيعية في C

اذا كانت المعادلة التربيعية بالصورة $x^2 + a = 0$ نحول الى $x^2 = -a$ ثم تحل بنفس طريقة الجذر التربيعي السابقة في حال كون a حقيقي سالب او تخيلي موجب او سالب .

اذا كانت المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx + c = 0$ فيتم حلها بالتجربة ان امكن او بالقانون الخاص بالدستور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

س/ حل المعادلات التربيعية الاتية وبين أي منها يكون جذراها مترافقان :

1. $x^2 + 4x + 5 = 0 \quad (a = 1, b = 4, c = 5)$

Sol : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-(4)(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}i}{2} == \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{-4}{2} \pm \frac{2i}{2} = -2 \pm i$

اذا مجموعة حل المعادلة هي : $\{(-2-i), (-2+i)\}$ الجذران مترافقان

2. $z^2 = -12$

$z = \pm\sqrt{-12} \Rightarrow z = \pm\sqrt{12}i \rightarrow z = \pm 2\sqrt{3}i$ الجذران مترافقان

ملاحظة

عندما نستخدم الدستور وينتج داخل الجذر عدد مركب كامل او بجزئه التخيلي في هذه الحالة نأخذ داخل الجذر ونحل بنفس طريقة الفرضية لايجاد الجذور التربيعية .

3. $z^2 - 3z + 3 + i = 0 \quad (a = 1, b = -3, c = 3 + i)$

Sol : $a = 1, b = -3, c = 3 + i$

$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-(4)(1)(3+i)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12-4i}}{2}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$

نفرض ان $(x + yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $-3 - 4i \Leftarrow -3 - 4i = (x + yi)^2$

$-3 - 4i = x^2 + 2xyi - y^2 \rightarrow -3 - 4i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = -3 \ldots\ldots(1) \quad , \quad 2xy = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2x} \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \ldots\ldots(2)$

نعوض معادلة رقم (2) في معادلة رقم (1) $x^2-\left(\frac{-2}{x}\right)^2=-3$

$\left[x^2-\frac{4}{x^2}=-3\right] * x^2 \Rightarrow x^4-4=-3x^2 \Rightarrow x^4+3x^2-4=0$

$(x^2-1)(x^2+4)=0 \quad , \quad (x^2+4)=0$ يهمل

$x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$

$\text{either } x=1 \Rightarrow y=\frac{-2}{1}=-2 \quad , \text{OR } x=-1 \Rightarrow y=\frac{-2}{-1}=2$

$\sqrt{-3-4i}=\{\pm(1-2i)\}$ الجذران هما

نعوض احد الجذرين وليكن $1-2i$ عن قيمة $\sqrt{-3-4i}$

$\therefore z=\frac{3+(1-2i)}{2}=\frac{4-2i}{2}=2-i \quad OR \quad z=\frac{3-(1-2i)}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$

اذن مجموعة حل المعادلة $\{2-i \ , \ 1+i\}$ الجذران غير مترافقان

4) $2z^2-5z+13=0 \qquad (a=2\,,b=-5\,,c=13)$

Sol : $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-(4)(2)(13)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-104}}{4}$

$=\frac{5\pm\sqrt{-79}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{79}i}{4}=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{79}}{4}i$

اذا مجموعة حل المعادلة هي : $\left\{\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{79}}{4}i \ , \frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}}{4}i\right\}$ الجذران مترافقان

5) $z^2+2z+i(2-i)=0$

sol: $z^2+2z+(2i-i^2)=0 \ \rightarrow \ z^2+2z+(1+2i)=0$

$a=1 \ , \ b=2 \ , \ c=1+2i$

$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4\ (1)(1+2i)}}{2\ (1)}$

$=\frac{-2\pm\sqrt{4-4-8i}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8i}}{2}$

$-8i=(x+yi)^2 \quad \Leftarrow -8i$ هو الجذر التربيعي للعدد $(x+yi)$ نفرض ان

$-8i=x^2+2xyi-y^2 \ \rightarrow \ 0-8i=(x^2-y^2)+(2xy)i$

$x^2-y^2=0 \ldots\ldots\ldots(1 \ , \ 2xy=-8 \ \rightarrow y=\frac{-8}{2x}=\frac{-4}{x} \ldots\ldots(2$

$x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0 \ \rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2 \quad \leftarrow$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1)

$x^4-16=0 \ \rightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0$

either $x^2+4=0$ يهمل (لانه مجموع مربعين)

OR $x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \boxed{x=\pm 2}$, $y=-\left(\frac{4}{\pm 2}\right) \rightarrow \boxed{y=\mp 2}$

$\sqrt{-8i}=\{\pm(2-2i)\}$ الجذران هما

نعوض احد الجذرين وليكن $2-2i$ عن قيمة $\sqrt{-8i}$

either $z=\frac{-2+(2-2i)}{2}=\frac{-2i}{2}=\boxed{-i}$

OR $Z=\frac{-2-(2-2i)}{2}=\frac{-2-2+2i}{2}=\frac{-4+2i}{2}=\frac{-4}{2}+\frac{2}{2}i=\boxed{-2+i}$

اذن مجموعة حل المعادلة $\{-i\ ,-2+i\}$ الجذران غير مترافقان

6. $4z^2+25=0$

sol: $4z^2=-25 \rightarrow z^2=\frac{-25}{4} \Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{-25}{4}} \rightarrow \boxed{z=\pm\frac{5}{2}i}$ الجذران مترافقان

7. $z^2-2zi+3=0$

sol: $z^2-2zi+3=0 \rightarrow z^2-2zi-3i^2=0$

$(z-3i)(z+i)=0 \rightarrow$ either $\boxed{z=3i}$ OR $\boxed{z=-i}$

مجموعة حل المعادلة :- $\{3i\ ,-i\}$ الجذران غير مترافقان

مساواة ايجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها

ملاحظة

اذا كانت صيغة السؤال جد المعادلة التربيعية التي جذراها كذا (الجذران معلومان) نتبع ما يلي

1. اول شيء نفكر به هو يجب ان يكون الجذران بالصيغة العادية للعدد المركب $(a+bi)$ (فاذا كان الجذران قوس مرفوع لاس معين فيجب ان نفتح الاقواس واذا كان العدد المركب كسر $(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}})$ فنضرب بالعام
2. ل المرافق)
3. نجد حاصل جمع الجذرين .
4. نجد حاصل ضرب الجذرين
5. نكتب المعادلة القياسية : $x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

س/ جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$ ؟

sol :

مجموع الجذرين : $(2+2i)+(-2-2i)=0$

حاصل ضرب الجذرين : $(2+2i)(-2-2i) = -4-4i-4i-4i^2$

$= -4-8i+4 = -8i$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2 - 0x + (-8i) = 0 \Rightarrow x^2 - 8i = 0$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها L , m حيث

a- $m = 1+2i \;, L = 1-i$

sol : مجموع الجذرين : $M + L = (1+2i)+(1-i) = \boxed{2+i}$

حاصل ضرب الجذرين : $M \cdot L = (1+2i)(1-i) = 1-i+2i-2i^2$

$= 1+i+2 = \boxed{3+i}$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$

b- $m = \frac{3-i}{1+i} \;, L = (3-2i)^2$ (يجب ان نحول بالصيغة العادية للعدد المركب ومن ثم نكمل الحل)

Sol : $m = \frac{3-i}{1+i} = \frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i+i^2}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = \frac{2}{2} - \frac{4}{2}i = 1-2i$

$L = (3-2i)^2 = 9-12i+4i^2 = 9-12i-4 = 5-12i$

مجموع الجذرين $M + L = (1-2i)+(5-12i) = 6-14i$

حاصل ضرب الجذرين $M.L = (1-2i)(5-12i) = 5-12i-10i+24i^2$

$= 5-22i-24 = -19-22i$

∴ المعادلة التربيعية هي $x^2-(6-14i)x+(-19-22i)=0$

ملاحظة

اذا كانت المعادلة التربيعية ذات معاملات حقيقية فأن الجذران مترافقان والعكس صحيح .

س/ كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية واحد جذريها $3-4i$.

الحل : بما ان معاملات المعادلة حقيقية احد جذريها $3-4i$ ، اذن الجذر الاخر هو المرافق له $3+4i$

مجموع الجذرين هو : $(3-i)+(3+i)=6$

حاصل ضرب الجذرين هو : $(3-i)(3+i)=(3)^2+(1)^2=9+1=10$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-6x+10=0$

س/ ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها i .

الحل : بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها i فان الجذر الاخر هو المرافق له وهو $-i$

مجموع الجذرين هو : $i+(-i)=i-i=0$

حاصل ضرب الجذرين هو : $i.(-i)=-i^2=1$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-(0)x+1=0 \Rightarrow x^2+1=0$

س/ ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $5-i$.

الحل : بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها $5-i$

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $5+i$

مجموع الجذرين هو : $(5-i)+5+i)=10$

حاصل ضرب الجذرين هو : $(5-i)(5+i)=25+1=26$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2-10x+26=0$

س/ ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$.

Sol : $\frac{\sqrt{2}+3i}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i$

بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i$ ∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i$

مجموع الجذرين هو : $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}i\right) = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

حاصل ضرب الجذرين هو : $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}i\right) = \frac{2}{16} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$

∴ المعادلة التربيعية هي : $x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{11}{16} = 0$

س) كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية اذا كان احد جذريها $(\sqrt{3} - i)^2$ (3د 2018)

sol : $(\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i + i^2 = 3 - 2\sqrt{3}i - 1 = 2 - 2\sqrt{3}i$

بما ان معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها $2 - 2\sqrt{3}i$ ∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $2\sqrt{3}i$

المعادلة التربيعية $\Rightarrow x^2 - 4x + 12 = 0$ اكمل الحل ..... .

ملاحظة

اذا كانت المعادلة التربيعية معلومة في السؤال والمطلوب ايجاد الثوابت او الجذر الاخر فهنا يجب ان نجعل المعادلة المعطاة في السؤال مشابهة للمعادلة القياسية ومن ثم نقارن المعادلة التربيعية المعطاة بالمعادلة القياسية وكما يلي :

1) نجعل معامل x^2 يساوي واحد (بقسمة المعادلة على معامل x^2).

2) اذا وجد اكثر من حد ل $(x$ او $x^2)$ نستخرج $(x$ او $x^2)$ عامل مشترك

3) من المقارنة نحدد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين

4) يجب الانتباه الى الاشارات عند المقارنة

ملاحظة

في هذا النوع من الاسئلة توجد اربع مصطلحات وهي (1- جذري المعادلة 2- مجموع الجذرين 3- حاصل ضرب الجذرين 4- الثوابت) في حالة الجمع معلوم نجد الجذر الثاني ومن ثم نجد الضرب , وفي حالة الضرب معلوم نجد الجذر الثاني ومن ثم نجد الجمع , وفي حالة الجذران معلومان نجد الجمع والضرب , ومن كل الحالات نجد قيم الثوابت

س/ اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2-ax+(5+5i)=0$ فما قيمة $a \in C$ ؟وما هو الجذر الاخر ؟ (2011 د1)

Sol : $x^2-ax+(5+5i)=0$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

نستنتج ان حاصل ضرب الجذرين $=5+5i$ ، ومجموع الجذرين $=a$

احد الجذرين $=3+i$ ، نفرض الجذر الاخر هو L

$\therefore$ حاصل ضرب الجذرين $L(3+i)=5+5i$

$$L=\frac{5+5i}{3+i}=\frac{5+5i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{15-5i+15i-5i^2}{9+1}=\frac{20+10i}{10}=\frac{20}{10}+\frac{10}{10}i$$
$$=2+i \text{ (الجذر الاخر)}$$

$$a=(3+i)+(2+i) \Rightarrow a=5+2i$$

ملاحظة

أي جذر من جذور المعادلة يحقق تلك المعادلة في السؤال اعلاه أي نعوض الجذر بالمعادلة بدلا عن x لاستخراج قيمة a ومن ثم نجد الجذر الاخر .

ملاحظة

اذا كانت معاملات المعادلة التربيعية اعداد حقيقية فهذا يعني بأن مجموع الجذرين = عدد حقيقي وحاصل ضرب الجذرين = عدد حقيقي ايضا , وهذا لا يحدث الا اذا كان الجذران مترافقان كما في السؤال ادناه.

س) اذا كان $2-4i$ هو احد جذري المعادلة $2x^2-x-bx+c-6=0$ معاملاتها حقيقية , جد قيمتي $b,c \in R$. (2015 د2)

الحل : بما ان المعاملات حقيقية واحد الجذرين $2-4i$ ، اذن الجذر الاخر هو المرافق له $(2+4i)$

نجعل المعادلة المعطاة مشابهة للمعادلة القياسية

$x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$$2x^2-x-bx+c-6=0 \Rightarrow 2x^2-(1+b)x+(c-6)=0\ ] \div 2$$

$$x^2-\left(\frac{1+b}{2}\right)x+\left(\frac{c-6}{2}\right)=0$$ تصبح المعادلة كالاتي

بالمقارنة مع المعادلة القياسية نجد ان مجموع الجذرين $=\frac{1+b}{2}$ ، حاصل ضرب الجذرين $=\frac{c-6}{2}$

$$(2-4i)+(2+4i)=\frac{1+b}{2} \Rightarrow 4=\frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b=8 \Rightarrow b=7$$

$$(2-4i)(2+4i)=\frac{c-6}{2} \Rightarrow 4+16=\frac{c-6}{2} \Rightarrow 20=\frac{c-6}{2} \Rightarrow c-6=40 \Rightarrow c=46$$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

للتطبيقي

نرمز لأحد الجذرين بالرمز ω والجذر الاخر ω^2 لذا يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح بالصورة :

$$\{1, \omega, \omega^2\}$$

$$\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}$$

مثال /جد الجذور التكعيبيه للواحد الصحيح ؟

Sol

$x = \sqrt[3]{1}$ بتكعيب الطرفين

$x^3 = 1$ فرق بين مكعبين

$(x - 1)(x2 + x + 1) = 0$

اما $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ الجذر الاول

او $x2 + x + 1 = 0$ بالدستور

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , a = 1 , b = 1 , c = 1$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}\, i}{2}$$

اما $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \Longrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} i$ الجذر الثاني

او $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$ الجذر الثالث

الجذور التكعيبيه هي

$$\sqrt[3]{1} = \{1 , w , w^2\}$$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

1) الجذر الاول حقيقي والجذران الاخران تخيليان

2) الجذران التخيليان متراقان اي ان مرافق ω هو ω^2 ومرافق ω^2 هو ω

3) حاصل ضرب الجذور الثلاثه يساوي واحد

$$(1)(\omega)(\omega^2) = \omega^3 = 1$$

4) حاصل جمع الجذور الثلاثه يساوي صفر

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

الخاصية الاولى : $(1 + \omega + \omega^2 = 0)$

1) $\omega + \omega^2 = -1$
2) $1 + \omega = -\omega^2$
3) $1 + \omega^2 = -\omega$
4) $-\omega - \omega^2 = 1$
5) $-1 - \omega = \omega^2$
6) $-1 - \omega^2 = \omega$

أي أن : حاصل جمع جذران بنفس الاشارة يكون ثالثهما بعكس الاشارة

الخاصية الثانية : $(\omega^3 = 1)$

حاصل ضرب الجذور الثلاثه يساوي واحد $(1)(\omega)(\omega^2) = \omega^3 = 1$

1) $\frac{\text{كمية}}{\omega} = \text{كمية } \omega^2 \Rightarrow \frac{a}{\omega} = a\omega^2$	5) $\sqrt{\omega^2} = \omega$
2) $\frac{\text{كمية}}{\omega^2} = \text{كمية } \omega \Rightarrow \frac{a}{\omega^2} = a\omega$	6) $\omega^3 = 1$
3) $\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}i$	7) $a\omega + a\omega^2 = -a$
4) $\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega \cdot \omega^3} = \sqrt{\omega^4} = \omega^2$	8) $-a\omega - a\omega^2 = a$

ملاحظة
اعلى أس نصل اليه في ω هو 2 . فأذا زاد عن 2 يجب تقليله وذلك بقسمته على 3 ثم باقي القسمه يصبح الاس. $\omega^{3n+r} = \omega^r$

ملاحظة
اذا كان ناتج القسمة على 3 بدون باقي فيكون الناتج (1) .

مثال / جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

1) $\omega^7 = \omega$
2) $\omega^{14} = \omega^2$
3) $\omega^6 = 1$

ملاحظة
اذا كان الاس سالب ننزله الى المقام والناتج الاخير يضرب ب (w3) للاستفاده من خاصية عند القسمه تضرب الاسس

ملاحظة
عند وجود (ω) او(ω^2) وحدها في المقام بدون شيء اخر نضرب الكسر ب ω^3 وهي تساوي -1

4) $\omega^{-5} = \frac{1}{\omega^5} = \frac{1}{\omega^3 \cdot \omega^2} = \frac{1}{\omega^2} = \omega$
5) $\omega^{-2} = \frac{1}{\omega^2} = \omega$
6) $w^{-13} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} . \omega^3 = \omega^2$
7) $\frac{5}{1+\omega^2} = \frac{5}{-\omega} = -5\omega^2$
8) $\frac{2}{\omega} = \frac{2}{\omega} . \omega^3 = 2\omega^2$
9) $\frac{5}{\omega^2} = \frac{5}{\omega^2} . \omega^3 = 5\omega$
10) $\frac{-7}{\omega} = \frac{-7}{\omega} . \omega^3 = -7\omega^2$
11) $\frac{\sqrt{2}}{3\omega^2} = \frac{\sqrt{2}}{3\omega^2} . \omega^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega$

ملاحظة العامل المشترك يؤدي الى علاقه فرعيه

12) $3\omega + 3\omega^2 = 3(\omega + \omega^2) = (-1) = -3$
13) $5 + 5\omega^2 = 5(1 + \omega^2) = 5(-\omega) = -5\omega$
14) $-3\omega - 3 = -3(\omega + 1) = -3(\omega^2) = +3\omega^2$
15) $\omega^2 + 5 + \omega = \omega^2 + \omega + 5 = -1 + 5 = 4$
16) $5 + 3\omega + 3\omega^2 = 5 + 3(\omega + \omega^2) = 5 + 3(-1) = 5 - 3 = 2$

س 1 : أكتب المقادير الآتية في ابسط صورة: (تمرين 3-1)

a) $\omega^{64} = (\omega^3)^{21} \cdot \omega = \omega$

b) $\omega^{-325} = \frac{1}{\omega^{325}} = \frac{1}{(\omega^3)^{108} \cdot \omega} = \frac{1}{\omega} = \omega^2$

c) $\frac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^{32}})^{12}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^2})^{12}} = \frac{1}{(1+\omega)^{12}} = \frac{1}{(-\omega^2)^{12}} \frac{1}{\omega^{24}} = \frac{1}{1} = 1$

d) $(1+\omega^2)^{-4} = (-\omega)^{-4} = \frac{1}{(-\omega)^4} = \frac{1}{\omega} = \omega^2$

e) $\omega^{9n+5} = \omega^{9n} \cdot \omega^5 = 1.\omega^2 = \omega^2$

مثال / أثبت أن : $\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$

$((\omega^3))^2 \cdot \omega + \omega^3 \cdot \omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$

مثال / أثبت أن: $(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = -4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = 4$

الطرف الاول $(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = (5 + 3(\omega + \omega^2)^2 = (5 - 3)^2 = 4$

الطرف الثاني $-4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = -4(2 + 2\omega^2 + \omega)^3 = -4(2(1 + \omega^2) + \omega)^3$

$= -4(-2\omega + \omega)^3 = -4(-\omega)^3 = -4(-1) = 4$

مثال / أثبت أن: $\left(\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{1}{1+\omega}\right)^2 = -3$

$(\frac{1 + \omega - 1 - \omega^2}{1 + \omega + \omega^2 + 1})^2 = (\frac{\omega - \omega^2}{1})^2 = (\pm\sqrt{3}i)^2 = -3$

مثال / أثبت أن: $\left(\frac{1}{2-\omega} - \frac{1}{2-\omega^2}\right)^2 = \frac{-3}{49}$

$$\left(\frac{2-\omega^2-2+\omega}{4-2\omega^2-2\omega+1}\right)^2=\left(\frac{\omega-\omega^2}{5-2(\omega^2+\omega)}\right)^2=\left(\frac{\pm\sqrt{3}i}{5+2}\right)^2=\frac{-3}{49}$$

مثال / أثبت أن: $\frac{\omega}{(2+5\omega+2\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(2+2\omega+5\omega^2)^2}=\frac{-1}{9}$

$$\frac{\omega}{(2+2\omega^2+5\omega)^2}+\frac{\omega^2}{(2(1+\omega)+5\omega^2)^2}=$$

$$\frac{\omega}{(2(1+\omega^2)+5\omega)^2}+\frac{\omega^2}{(-2\omega^2+5\omega^2)^2}=\frac{\omega}{(-2\omega+5\omega)^2}+\frac{\omega^2}{(3\omega^2)^2}$$

$$\frac{\omega}{(3\omega)^2}+\frac{\omega^2}{9\omega^4}=\frac{\omega}{9\omega^2}+\frac{\omega^2}{9\omega}=\frac{9\omega^2+9\omega}{81}=\frac{9(\omega^2+\omega)}{81}=\frac{-9}{81}=\frac{-1}{9}$$

س4/ اثبت ان: (تمرين 3-1)

a) $\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=-\frac{1}{3}$

$$\left(\frac{2+\omega^2-2-\omega}{4+2\omega^2+2\omega+1}\right)^2=\left(\frac{\omega^2-\omega}{5-2}\right)^2=\left(\frac{\pm\sqrt{3}i}{3}\right)^2=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

b) $\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\frac{2}{3}$

$$\frac{(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega-1}{(\omega^3)^3\cdot\omega+\omega^3\cdot\omega^2-2}=\frac{\omega^2+\omega-1}{\omega+\omega^2-2}=\frac{-1-1}{-1-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

c) $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=18$

$$(1-2\omega+\omega^2)(-\omega^2-5\omega^2)=(1+\omega^2-2\omega)(-6\omega^2)=(-\omega-2\omega)(-6\omega^2)$$

$$=(-3\omega)(-6\omega^2)=18\omega^3=18$$

d) $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3=-2$

$$(-\omega)^3+(-\omega^2)^3=(-\omega^3)+(-\omega^6)=-1-1=-2$$

ملاحظة: اذا كانت المعاملات مختلفة نستخدم أحد الخواص $\omega^2=-1-\omega$ او $\omega=-1-\omega^2$

مثال / أثبت أن : $(2+\omega+3\omega^2)^2=-3$ ؟

$$(2+\omega+3(-1-\omega))^2=(2+\omega-3-3\omega)^2=(-1-2\omega)^2$$
$$1+4\omega+4\omega^2=1+4(\omega+\omega^2)=1-4=-3$$

ملاحظة

اذا كانت معاملات البسط والمقام متشابهة نضرب الحد الخالي من ω أما البسط أو المقام ب ω^3

مثال/ اثبت ان: $(\frac{3\omega-4}{3-4\omega^2})^3=1$ ؟

$$\left(\frac{3\omega-4\omega^3}{3-4\omega^2}\right)^3=\left(\frac{\omega(3-4\omega^2)}{3-4\omega^2}\right)^3=\omega^3=1$$

مثال/ اثبت ان: $(\frac{a-b\omega^2}{a\omega-b}-\frac{c-d\omega}{c\omega^2-d})^4=9$

$$(\frac{a\omega^3-b\omega^2}{a\omega-b}-\frac{c\omega^3-d\omega}{c\omega^2-d})^4=(\frac{\omega^2(d\omega-b)}{a\omega tb}-\frac{\omega(c\omega^2-d)}{a\omega-d})^4$$
$$(\omega^2-\omega)^4=(\pm\sqrt{3}i)^4=9$$

س/ 2014 تمهيدي خارج القطر

اثبت ان: $(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i})^{100}=-\frac{1}{8}(1-\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega})^3$ ؟

$$\left(\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}-\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^{100}=-\frac{1}{8}(1-\omega+\omega^2)^3$$

$$(\frac{1-i}{2}-\frac{1+i}{2})^{100}=-\frac{1}{8}(1+\omega^2-\omega)^3$$
$$(\frac{1-i-1-i}{2})^{100}=-\frac{1}{8}(-\omega-\omega)^3=(-i)^{100}=-\frac{1}{8}(-2\omega)^3$$
$$i^{100}=-\frac{1}{8}(-8)\Rightarrow 1=1$$

س2014 / الدور الثاني: أثبت أن: $\left(\frac{5\omega^2i-1}{5+i\omega}\right)^6=-1$

$$(\frac{5\omega^2i-(-i^2\omega^3)}{5+i\omega})^6=(\frac{5\omega^2i+\omega^3i^2}{5+i\omega})^6=(\frac{\omega^2i(5+i\omega)}{5+i\omega})^6=(\omega^2i)^6$$
$$=\omega^{12}i^6=(i^2)^3=-1$$

س2016 / الدور الاول: أثبت أن: $\left(5-\frac{5}{\omega^2+1}+\frac{3}{\omega^2}\right)^6=64$

$$\left(5-\frac{5}{-\omega}+3\omega\right)^6=(5+5\omega^2+3\omega)^6=(5+5(1+\omega^2)+3\omega)^6$$

$$(-5\omega+3\omega)^6=(-2\omega)^6=64\omega^6=64$$

س3/ اذا كان $z^2+z+1=0$ فجد قيمة $\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$ ؟ (تمارين 3-1)

$$Z^2+Z+1=0$$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2})$$

$$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\{\omega \quad \text{or} \quad \omega^2\}$$

$$\therefore\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}=\frac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^7-3\omega^8}=\frac{1+3(\omega^3)^3\cdot\omega+3(\omega^3)^3\omega^2}{1-3(\omega^3)^2\cdot\omega-3(\omega^3)^2\cdot\omega^2}$$

$$\frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

س2/ جد ناتج: $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{w^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6$ ؟ (تمارين عامة)

$$[3(\omega^3)^{3n})+\frac{5}{\omega^2}+\frac{4}{\omega}]^6=[3+5\omega+4\omega^2]^6=(3+5\omega+4(-1-\omega))^6$$

$$(3+5\omega-4-4\omega)^6=(-1+\omega)^6=[(-1+\omega)^2]^3=(1-2\omega+\omega^2)^3$$

$$(1+\omega^2-2\omega)^3=(-\omega-2\omega)^3=(-3\omega)^3=-27\omega^3=-27$$

ملاحظة

لتكوين المعادله التربيعيه نطبق القانون :

$x^2 - 2$ (مجموع الجذران) $x +$ (ضرب الجذران) $= 0$

مثال / كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1 - i\omega$, $1 - i\omega^2$ ؟

مجموع الجذرين: $1 - i\omega + 1 - i\omega^2 = 2 - i(\omega + \omega^2) \Leftarrow 2 + i$

ضرب الجذرين: $(1 - i\omega)(1 - i\omega^2)$

$1 - i\omega - i\omega^2 - 1 = -i(\omega + \omega^2) = i$

$\therefore x^2 - (2 + i)x + i = 0$

مثال / كون المعادلة التربيعية التي جذراها: $\frac{2}{1-\omega}, \frac{2}{1-\omega^2}$ ؟

مجموع الجذرين: $\frac{2}{1-\omega} + \frac{2}{1-\omega^2}$

$$\frac{2 - 2\omega^2 + 2 - 2\omega}{1 - \omega^2 - \omega + 1} = \frac{4 - 2(\omega^2 + \omega)}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

ضرب الجذرين: $\frac{2}{1-\omega} \cdot \frac{2}{1-\omega^2}$

$$\frac{4}{1 - \omega^2 - \omega + 1} = \frac{4}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x^2 - 2x + \frac{4}{3} = 0$$

مثال / كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $(\frac{2}{\omega} + 3\omega i), (\frac{2}{\omega^2} + 3\omega^2 i)$ ؟

الجذر الاول $\frac{2}{\omega} + 3\omega i = 2\omega^2 + 3\omega i$

الجذر الثاني $\frac{2}{\omega^2} + 3\omega^2 i = 2\omega + 3\omega^2 i$

مجموع الجذرين $2\omega^2 + 3\omega i + 2\omega + 3\omega^2 i =$

$2(\omega^2 + \omega) + 3i(\omega + \omega^2) = -2 - 3i$

ضرب الجذرين $(2\omega^2 + 3\omega i)(2\omega + 3\omega^2 i) =$

$4 + 6wi + 6w^2 i - 9 = -5 - 6i$

$x^2 - (-2 - 3i)x + (-5 - 6i) = 0$

س2/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها: (تمارين 3-1)

a) $1+\omega^2, 1+\omega$

مجموع الجذرين = $1+\omega^2+1+\omega=1$

ضرب الجذرين = $(1+\omega^2)(1+\omega)$

$1+\omega+\omega^2+1=1$

$x^2-x+1=0$

b) $\frac{\omega}{2-\omega^2}, \frac{\omega^2}{2-\omega}$

مجموع الجذرين = $\frac{\omega}{2-\omega^2}+\frac{\omega^2}{2-\omega}$

$\frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega}{4-2\omega-2\omega^2+1}=\frac{\omega+\omega^2}{5+2}=\frac{-1}{7}$

ضرب الجذرين = $\frac{\omega}{2-\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{2-\omega}$

$\frac{\omega^3}{4-2\omega-2\omega^2+1}=\frac{1}{5+2}=\frac{1}{7}$

$x^2+\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}=0$

c) $\frac{3i}{\omega^2}, \frac{-3\omega^2}{i}$

الجذر الأول $=\frac{3i}{w^2}=3$

الجذر الثاني $=\frac{-3\omega^2}{w}\cdot\frac{-i}{-i}=3i^2$

مجموع الجذرين $=3i\omega+3i\omega^2=-3i$

ضرب الجذرين $=(3i\omega)(3i\omega^2)=-9$

$\therefore x^2+3ix-9=0$

الدكتور محمد الربيعي

مثال / كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $(3+5\omega+4\omega^2)^6, (4+5\omega+5\omega^2)^2$ ؟

الجذر الأول

$$(4+5\omega+5\omega^2)^2 = (4-5)^2 = 1$$
$$(3+5\omega+4\omega^2)^6 = (3+5\omega+4(-1-\omega))^6 = (3+5\omega-4-4\omega)^6$$

الجذر الثاني

$$(-1+\omega)^6 = [(-1+\omega)^2]^3 = (1-2\omega+\omega^2)^3$$
$$(1+\omega^2-2\omega)^3 = (-\omega-2\omega)^3 = (-3\omega)^3 = -27$$

مجموع الجذرين: $1-27 = -26$

ضرب الجذرين: $(1)(-27) = -27$

$$\therefore x^2+26x-27=0$$

س2016 / الدور الثالث:

حل المعادلة التربيعية التي جذراها: $\frac{1}{\omega}, \frac{1+3\omega}{\omega^2+3}$

$$m = \frac{1}{\omega} = \omega^2$$

$$L = \frac{1+3\omega}{\omega^2+3} = \frac{\omega^3+3\omega}{\omega^2+3} = \frac{\omega(\omega^2+3)}{\omega^2+3} = \omega$$

$$m+L = \omega^2+\omega = -1$$
$$m\cdot L = \omega^2\cdot\omega = \omega^3 = 1$$

$$x^2-(m+L)x+m.L=0 \Rightarrow x^2+x+1=0$$

س2016 / الدور الثالث خارج القطر

كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $\frac{\omega}{1+3\omega}, \frac{\omega^2}{1+3\omega^2}$

مجموع الجذرين

$$= \frac{\omega}{1+3\omega}+\frac{^2}{1+\omega^2} = \frac{\omega(1+3\omega^2)+\omega^2(1+3\omega)}{1+3\omega^2+3\omega+9}$$

$$= \frac{\omega+3+\omega^2+3}{10+3(\omega^2+\omega)} = \frac{6+\omega+\omega^2}{10-3} = \frac{6-1}{7} = \frac{5}{7}$$

ضرب الحذرين

$$= \frac{\omega}{1+3\omega}\cdot\frac{\omega^2}{1+3\omega^2} = \frac{\omega^3}{1+3\omega^2+3\omega+9} = \frac{1}{10-3} = \frac{1}{7}$$

$$x^2-\frac{5}{7}x+\frac{1}{7}=0$$

مثال (تمهيدي 2016)جد المقياس والقيمه الاساسيه لسعه العدد المركب $z=\frac{4+2i\omega+2i\omega^2}{3-i\omega^2-i\omega}$ ؟

Sol

$$z=\frac{4+2i\omega+2i\omega^2}{3-iw^2-iw}$$

$$z=\frac{4+2i(\omega+\omega^2)}{3-i(\omega+\omega^2)}=\frac{4+2i(-1)}{3-i(-1)}$$

$$z=\frac{4-2i}{3+i}=\frac{4-2i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{12-4i-6i+2i^2}{9+1}=\frac{12-10i-2}{10}$$

$$=\frac{10-10i}{10}=\frac{10}{10}-\frac{10}{10}i=1-i$$

$Z=1-i\longrightarrow(1,-1)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

لزاويه تقع في الربع الرابع

$$\theta=2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}=(5-\frac{5}{\omega^{2+1}}+\frac{3}{\omega^2})^6=64$$

$$=(5-\frac{5}{\omega^{2+1}}+\frac{3}{\omega^2})^6=(5-\frac{5}{-\omega}+\frac{3}{\omega^2}.w^3)^6$$

$$=(5+\frac{5}{w}.\omega^3+3\omega)^6$$

$$=(5+5\omega^2+3\omega)^6$$

$$=[5(1+\omega^2)+3\omega]^6$$

$$=[5(-\omega)+3\omega]^6$$

$$=[-5\omega+3\omega]^6$$

$$=(-2\omega)^6=(-2)^6(\omega)^6$$

$$=(-2)^6(\omega)^\circ=64(1)$$

$=64$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

مثال/باستخدام مبرهنة ديموافير جد الجذور التربيعيه للعدد $z=\frac{1+\omega i+\omega^2 i}{1-\omega i-\omega^2 i}$ ؟

Sol

$$z=\frac{1+i(\omega+\omega^2)}{1-i(\omega+\omega^2)}=\frac{1+i(-1)}{1-i(-1)}=\frac{1-i}{1+i}$$

$$z=\frac{1-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i-i+i^2}{(1)^2}$$

$$=\frac{1-2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=-i$$

$$z=0-i\rightarrow(0,-1)$$

$$==\sqrt{0^2+(-1)^2}=\sqrt{1}=1r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{1}=-1$$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{3\pi}{2}$

$$z=r(cos\theta+isin\theta)$$

$$z^{\frac{1}{2}}=(1)^{\frac{1}{2}}(cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$(cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}+isin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2})$$

$$(cos\frac{3\pi+4k\pi}{4}+isin\frac{3\pi+4k\pi}{4})$$

K = 0 , 1

$$k=0\rightarrow z=(cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4})$$

$$=(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$$

$$k=(cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4})=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$$

الدكتور محمد الربيعي

التمثيل الهندسي للاعداد المركبة

اذا كان $z = x + yi$ عددا مركبا بصيغته العادية فأن $P(Z) = (x, y)$ تمثل الصيغة الديكارتية لهذا العدد أي ان الجزء الحقيقي للعدد المركب x , اما الجزء التخيلي للعدد المركب يمثل y ويمكن تمثيل أي عدد مركب على المحورين الاحداثيين ثم نصل بين نقطة الاصل والنقطة p(Z) ويسمى الشكل الناتج بشكل ارجاند نسبة الى العالم ارجاند.

س) اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية ثم مثل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند

$z_1 = 2 + 3i \rightarrow p(z_1) = (2, 3)$ العدد

$(-z_1) = -2 - 3i \rightarrow p(-z_1) = (-2, -3)$ نظيره الجمعي

$z_2 = -1 + 3i \rightarrow p(z_2) = (-1, 3)$ العدد

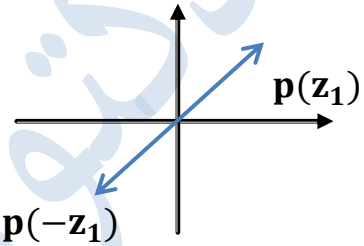
$(-z_2) = 1 - 3i \rightarrow p(-z_2) = (1, -3)$ نظيره الجمعي

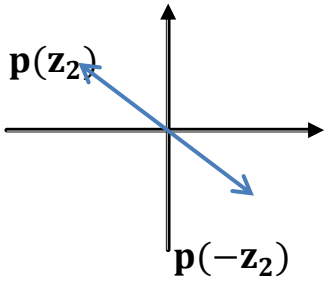
$z_3 = 1 - i \rightarrow p(z_3) = (1, -1)$ العدد

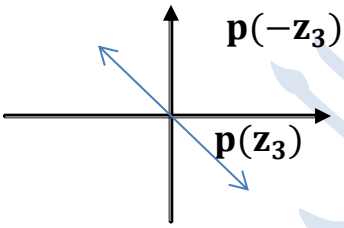
$(-z_3) = -1 + i \rightarrow p(-z_3) = (-1, 1)$ نظيره الجمعي

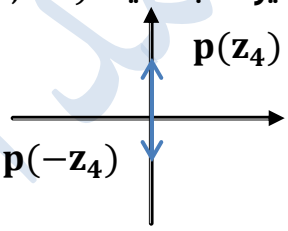
$z_4 = i \rightarrow p(z_4) = (0, 1)$ العدد

$(-z_4) = -i \rightarrow p(-z_4) = (0, -1)$ نظيره الجمعي









س) اكتب العدد المرافق لكل من الاعداد المركبة التالية ثم مثل العدد و مرافقه على شكل ارجاند

$z_1 = 5 + 3i \rightarrow p(z_1) = (5, 3)$ العدد

$(\overline{z}_1) = 5 - 3i \rightarrow p(\overline{z}_1) = (5, -3)$ مرافق العدد

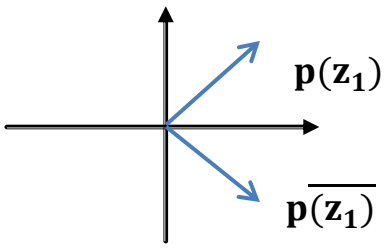
$z_2 = -3 + 2i \rightarrow p(z_2) = (-3, 2)$ العدد

$(\overline{z}_2) = -3 - 2i \rightarrow p(\overline{z}_2) = (-3, -2)$ مرافق العدد

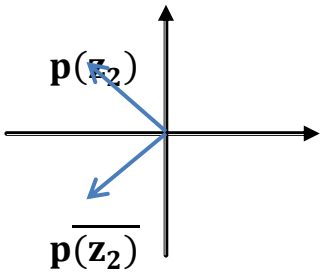
$z_3 = 1 - i \rightarrow p(z_3) = (1, -1)$ العدد

$(\overline{z}_3) = 1 + i \rightarrow p(\overline{z}_3) = (1, 1)$ مرافق العدد

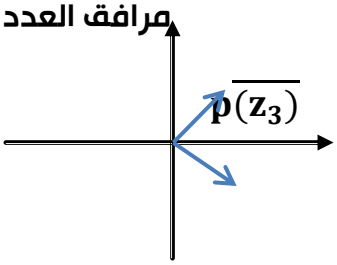
$z_4 = -2i \rightarrow p(z_4) = (0, -2)$ العدد

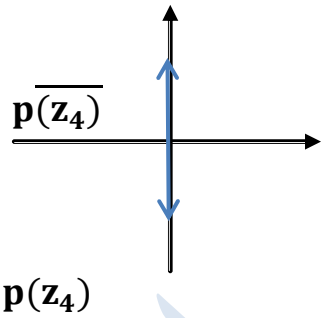


$(\overline{z}_4) = 2i \rightarrow p(\overline{z}_4) = (0,2)$



مرافق العدد



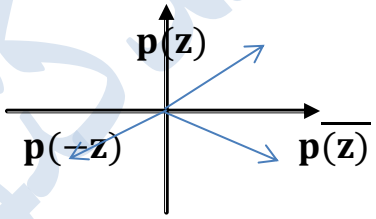


س) اذا كان $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كل من $z\ ,\ \overline{z}\ ,\ -z$

$z = 4 + 2i \rightarrow p(z) = (4\ ,2)$

$\overline{z} = 4 - 2i \rightarrow p(\overline{z}) = (4\ ,-2)$

$-z = -4 - 2i \rightarrow p(-z) = (-4\ ,-2)$

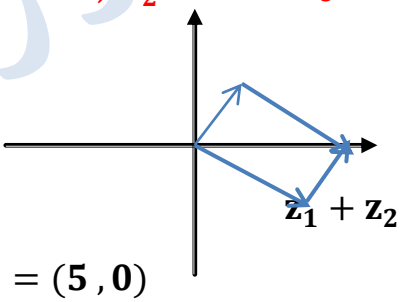


س) اذا كان $z_1 = 4 - 2i\ ,\ z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلا من

$-3z_2\ ,2z_1\ ,z_1 - z_2\ ,z_1 + z_2$

$z_1 = 4 - 2i \rightarrow p_1(z_1) = (4\ ,-2)$

$z_2 = 1 + 2i \rightarrow p_2(z_2) = (1\ ,2)$



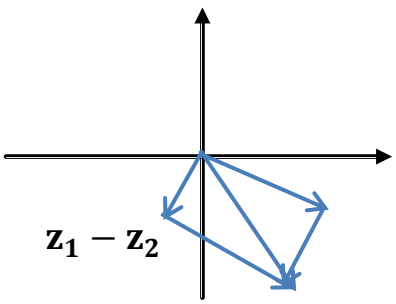
$z_1 + z_2 = z_3 = (4 - 2i) + (1 + 2i) = 5 + 0i \rightarrow p_3(z_3) = (5\ ,0)$

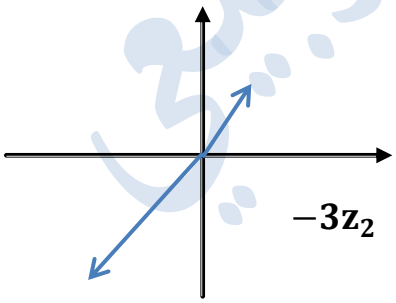
$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = z_4 = (4 - 2i) + (-1 - 2i)$

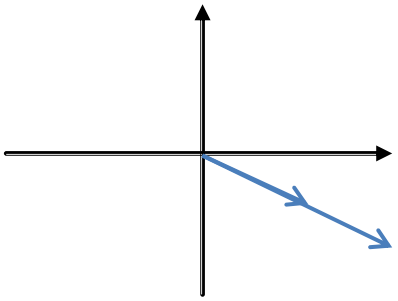
$= (3 - 4i) \rightarrow p_4(z_4) = (3, -4)$

$2z_1 = z_5 = (8 - 4i) \rightarrow p(z_5) = (8\ ,-4)$

$-3z_2 = z_6 = (-3 - 6i) \rightarrow p(z_6) = (-3\ ,-6)$







س) مثل العمليات الاتية هندسيا على شكل ارجاند : (3د 2013) (واجب)

a) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$

b) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$

المقياس والقيمة الاساسية للسعة

اذا كان $z = x + yi$ عددا مركبا فأن مقياسه $\boxed{\text{mod } z = \|z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

والقيمة الاساسية للسعة هي الزاوية θ التي تحقق : $\boxed{\cos\theta = \frac{x}{\|z\|}}$, $\boxed{\sin\theta = \frac{y}{\|z\|}}$

حيث تسمى سعة العدد المركب $\arg(z) = \theta$ وان $\theta \in [0, 2\pi)$, وهي الزاوية التي يصنعها العدد المركب مع الاتجاه الموجب لمحور السينات , اما القيم الاخرى فهي $\{\theta + 2n\pi\}$.

ملاحظة المقياس $\text{mod } z = \|r\| = r$ قيمته موجبة دائما .

ملاحظة لا يمكن ايجاد المقياس والسعة الاساسية للعدد المركب الا بعد كتابته بالصيغة العادية (فاذا كان العدد قوس مرفوع لاس معين فيجب ان نفتح الاقواس واذا كان العدد المركب كسر $(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}})$ فنضرب بالعامل المرافق

س) اذا كان $z = 1 + \sqrt{3}i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z . (2006 د2)

Sol : $\text{mod } Z = \|Z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ المقياس

$\cos\theta = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نستنتج ان θ تقع في الربع الاول

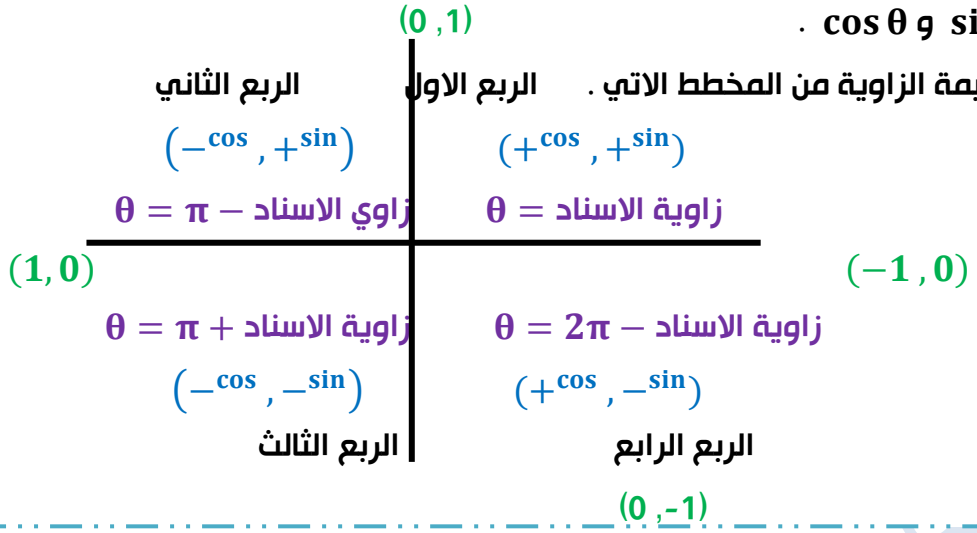
$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{3}$ القيمة الاساسية للسعة

ملاحظة

لتعيين السعة نتبع الخطوات الاتية :

1) نعين موقع الزاوية في أي ربع من الارباع الاربعة وذلك من الزوج المرتب (الشكل الديكارتي) للعدد المركب او من اشارة ال $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

2) بعد تعيين الموقع نجد قيمة الزاوية من المخطط الاتي .



ملاحظة

زاوية الاسناد تستنتج من قيمة ال sin و cos بغض النظر عن الاشارة (نستفاد من الاشارة في تحديد الربع)

س) اذا كان $z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

sol : المقياس $\text{mod } z = \|z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{\|z\|}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$ والسعة تقع في الربع الثالث

$\therefore \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ القيمة الاساسية للسعة

س) ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الاساسية (2001 د1)

sol: $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}.\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}=\frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-6i^2}{1+12}=\frac{13-13\sqrt{3}i}{13}=1-\sqrt{3}i$

$\text{Mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$ والسعة تقع في الربع الرابع

$\arg(z)=\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{6\pi-\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$

قيم النسب المثلثية للزوايا :-

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0 or 2π	0	1	0
$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	1	0	
$\pi=180^\circ$	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	-1	0	
$2\pi=360^\circ$	0	1	0

ملاحظة

في بعض الاحيان يعطي في السؤال المقياس والسعة الاساسية ويطلب ايجاد العدد المركب بالصيغة العادية, في هذه الحالة نجد $x=r\cos\theta$ ونجد $y=r\sin\theta$ ومن ثم نكتب العدد المركب

س/ اذا كان Z عددا مركبا مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي و الجبري له . (2003 د2)

Sol : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ الشكل الجبري $=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ الشكل الديكارتي

الصيغة القطبية للعدد المركب

$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta$

$z = x + yi \rightarrow z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ ← الصيغة القطبية للعدد المركب

لايجاد الصيغة القطبية للعدد المركب :

اولا : نجد المقياس (2)نجد كل من $\cos\theta$ و $\sin\theta$ (3)نجد السعة حسب الربع (4)نكتب العدد بالصيغة القطبية

س/ عبر عن كل من الاعداد الاتية بالصيغة القطبية :

1) $-2+2i$ (د1 2013)

Sol : $z = -2 + 2i$

$\text{mod } Z = \|Z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\emptyset = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin\emptyset = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$ والسعة تقع في الربع الثاني

$\therefore \ \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi-\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ الصيغة القطبية هي

2) $2\sqrt{3}-2i$ (د1 2012 , نازحين 2014)

Sol : $z = 2\sqrt{3} + 2i$

$\text{mod } Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\emptyset = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \sin\emptyset = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{-2}{4}$

$= \frac{-1}{2}$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{6}$ والسعة تقع في الربع الرابع

$\therefore \ \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi-\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$z = r(\cos\emptyset + i\sin\emptyset) \Rightarrow z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ الصيغة القطبية هي

س) اكتب العدد $z = (1+\sqrt{3}i)^2$ بالصيغة القطبية . (2016 د1 خارج)

sol : $(1+\sqrt{3}i)^2 = 1+2\sqrt{3}i+3i^2 = 1+2\sqrt{3}i-3 = -2+2\sqrt{3}i$

$$\text{mod } Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\emptyset = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad , \quad \sin\emptyset = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$ والسعة تقع في الربع الثاني

$$\therefore \quad \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi-\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$z = r(\cos\emptyset + i\sin\emptyset) \quad \Rightarrow \quad z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ الصيغة القطبية هي

س/ عبر عن كل من الاعداد الاتية بالصيغة القطبية :

a) 1 $(z = 1+0i)$

sol: $\text{Mod } z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{1} = 1 \ , \qquad \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{0}{1} = 0$$

$\arg(z) = \theta = 0$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow \boxed{z = 1(\cos 0 + i\sin 0)}$ الصيغة القطبية

b) -1 $(z = -1+0i)$

sol: $\text{Mod } z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-1}{1} = -1 \ , \qquad \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{0}{1} = 0$$

$\arg(z) = \theta = \pi$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow \boxed{z = 1(\cos\pi + i\sin\pi)}$ الصيغة القطبية

c) i $(z = 0+i)$

sol: $\text{Mod } z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(0)^2+(1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{0}{1} = 0 \ , \qquad \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{2}$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow \boxed{z = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$ الصيغة القطبية

d) $-i$ $\quad (z = 0 - i)$

sol: $\text{Mod } z = \|z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{0}{1} = 1$, $\quad \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{1} = -1$

$\arg(z) = \theta = \frac{3\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow z = \boxed{1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$ الصيغة القطبية

من السؤال السابق نستنتج الاتي :- (حفظ)

$\boxed{1 = (\cos 0 + i\sin 0)}$, $\boxed{-1 = (\cos\pi + i\sin\pi)}$

$\boxed{i = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}$, $\boxed{-i = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})}$

كيفية ايجاد قيم الدوال المثلثية الخاصة والزوايا المرتبطة بها

اذا وجد اختصار بين البسط والمقام نختصر وبعد الاختصار اذا كان المقام يساوي (1 , 2 , 3 , 4 , 6) نتبع الخطوات ادناه ,اما اذا كان المقام لا يساوي (1 , 2 , 3 , 4 , 6) تترك الزاوية على حالها دون تبسيط

اولا :- اذا كانت الزاوية بالقياس الرئيس أي ضمن الفترة $[0 , 2\pi]$ (او اذا كان حاصل قسمة البسط على المقام اصغر من 2) توجد حالتان .

1) اذا كانت الزاوية في الربع الاول (احدى الزوايا الخاصة) نكتب قيمة الدوال المثلثية مباشرة $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) اذا كانت الزاوية بالربع (الثاني , الثالث ,الرابع) نتبع ما يلي :

أ- نبحث عن موقع الزاوية (نضرب العدد في الزاوية ونحدد الربع) لمعرفة اشارة الدالة فيه وتكتب الاشارة اولا

ب- نكتب الدالة نفسها

ج- نحذف العدد في البسط ونكتب باقي الزاوية

د- نكتب قيمة الدالة حسب الزاوية الناتجة(احدى الزوايا الخاصة)

$\cos\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad (\frac{2\pi}{3} = 2 \times \frac{\pi}{3} = 2 \times 60 = 120$ بالربع الثاني)

لاحظ بعد الاختصار نجد الزاوية بالربع الثاني وال cos فيه سالب لذلك نكتب السالب وال cos وباقي الزاوية $\frac{\pi}{3}$ بعد حذف ال 2 من البسط

$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad (\frac{5\pi}{6} = 5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times 30 = 150$ بالربع الثاني)

الزاوية بالربع الثاني وال sin فيه موجب لذلك نكتب الموجب وال sin وباقي الزاوية $\frac{\pi}{6}$ بعد حذف 5 من البسط

ثانيا :- اذا لم تكن الزاوية بالقياس الرئيس أي لا تنتمي للفترة $[0 , 2\pi)$ (او اذا كان حاصل قسمة البسط والمقام اكبر من 2) نتبع ما يلي :

1) اذا كانت الزاوية π مضروبة بعدد صحيح زوجي (موجب او سالب) الناتج $= 0$

2) اذا كانت الزاوية π مضروبة بعدد صحيح فردي (موجب او سالب) الناتج $= \pi$

$\sin 20\pi = \sin 0 = 0$, $\cos 22\pi = \cos 0 = 1$

$\sin 55\pi = \sin \pi = 0$, $\cos 13\pi = \cos \pi = -1$

3) في حالة الكسر الاعتيادي (الموجب) يضرب المقام مهما كان في 2 ونجد اكبر مضاعف للناتج اصغر من البسط يطرح من بسط الكسر على نفس المقام والناتج يمثل القياس الرئيس ونتبع نفس الخطوات قياس الزاوية الرئيس اعلاه .

$\sin\frac{29\pi}{6} = \sin\frac{(29-24)\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

لاحظ ان المقام 6 يضرب في 2 يساوي 12 ومضاعفات ال 12 هي (24 , 36 , 48)واكبر مضاعف ل 12 بحيث اصغر من البسط هو 24 يطرح من البسط والباقي 5 البسط الجديد

$\cos\frac{49\pi}{4} = \cos\frac{(49-48)\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

** لاحظ ان المقام 4 يضرب في 2 يساوي 8 و مضاعفات ال 8 هي (24,16 , 32 , 40 , 48 , 56)واكبرها بحيث اصغر من البسط 49 هو 48 يطرح من البسط والباقي 1 هو البسط الجديد

4) في حالة الكسر الاعتيادي (السالب) نستخدم الخواص : $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\cos\frac{-19\pi}{6} = \cos\frac{19\pi}{6} = \cos\frac{(19-12)\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

ملاحظة

العدد المركب له ثلاث صيغ ضمن منهجنا

1- الصيغة العادية (الجبرية) للعدد المركب $z = a + bi$

2- الصيغة الديكارتية للعدد المركب $z = (a , b)$

3- الصيغة القطبية للعدد المركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

يمكن الحصول على الصيغة القطبية من الصيغة العادية والديكارتية والعكس صحيح

مبرهنة ديموافر

If $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \quad z_2 = \cos\emptyset + i\sin\emptyset$

$z_1 \times z_2 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\emptyset + i\sin\emptyset)$

$= \cos\theta\cos\emptyset + i\cos\theta\sin\emptyset + i\sin\theta\cos\emptyset + i^2\sin\theta\sin\emptyset$

$[\cos\theta\cos\emptyset - \sin\theta\sin\emptyset] + i\,[\cos\theta\sin\emptyset + \sin\theta\cos\emptyset]$

$= \cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset)$

ولو كان $(\emptyset = \theta)$ فأن العلاقة تصبح :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta}$$

س: برهن ان $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

sol : $LHS = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta$

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta\cos\theta)$

$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta = RHS$

وقد توصل العالم ديموافر الى استنتاج علاقة والتي سميت بمبرهنة ديموافر وهي كالاتي :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad , \quad \forall\, n \in N , \theta \in R}$$

ملاحظة

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = (\cos\theta - i\sin\theta)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل الاتي :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta}$$

س) اثبت ان : $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad , \forall\, n \in N\,, \theta \in R$

sol : LHS $= (\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos\theta + (-i\sin\theta)]^n$ الطرف الايسر

$= [\cos\theta + i\sin(-\theta)]^n = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$

وبجعل $\emptyset = -\theta$ تصبح العلاقة :

$= [\cos\emptyset + i\sin\emptyset]^n$

$= [\cos n\emptyset + i\sin n\emptyset]^n = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$

$= \cos n\theta - i\sin n\theta = RHS$ الطرف الايمن

قوانين مهمة :

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad , \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x \quad , \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad , \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

ملاحظة

اذا كان لدينا عدد مركب بالصيغة القطبية مرفوع الى اس حقيقي n (موجب او سالب) وكان السؤال احسب باستخدام مبرهنة ديموافر يكون الحل بتطبيق مبرهنة ديموافر مباشرة (n توزع اي تضرب في θ وتكون اس ل r)

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \Longleftarrow$ الاس عدد صحيح موجب

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \Longleftarrow$ الاس عدد صحيح سالب

$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$

س) احسب ما يأتي :

1) $(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi)^4$

Sol : $(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})^4 = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 0 + (-1)i = -i$

2) $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$ (2012 تمهيدي)

sol : $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4 = \left(\cos\frac{20\pi}{24} + i\sin\frac{20\pi}{24}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

ملاحظة

اذا كان الاس سالب عند تطبيق الاس على الزاوية يغير اشارة دالة ال $\sin\theta$ فقط .

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

3) $\left[\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$

Sol : $\left[\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}=\left(\cos\frac{21}{12}\pi-i\sin\frac{21}{12}\pi\right)=\left(\cos\frac{7}{4}\pi-i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}-\left(-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

س) بسط ما يأتي :

1) $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}$ (2د 2013)

Sol : $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}=\frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^3]^3}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}$

$=\cos\theta+i\sin\theta$

2) $(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$ (1د خارج 2015)

Sol : $(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4=(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos 4\theta+i\sin 4\theta$

س) اثبت ان $\left[\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^4}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right](\cos\theta-i\sin\theta)^2=1$ (1د تطبيقي 2017)

sol : $\left[\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^4}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right](\cos\theta-i\sin\theta)^2$

$=\left[\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{12}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}\right](\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^2(\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}=(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$

س) باستخدام مبرهنة ديموافر بسط ما يأتي $\left[\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right]+1$ (2د احيائي موصل 2017)

sol : $\left[\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right]+1=\left[\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^2}\right]+1=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}+1=1+1=2$

ملاحظة

اذا كان لدينا عدد مركب بالصيغة العادية مرفوع الى اس حقيقي (موجب او سالب) , $(a+bi)^n$

وكان المطلوب احسب $(a+bi)^{-n}$ باستخدام مبرهنة ديموافر عند الحل نتبع ما يلي :

1. ناخذ العدد المركب بدون اس (ناخذ داخل القوس فقط) اي (داخل القوس $z=$) (هنا يجب الانتباه ان يكون العدد داخل القوس بالصيغة العادية او الديكارتية)
2. نجد المقياس والسعة للعدد المركب
3. نضع العدد المركب بالصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
4. نرفع الصيغة القطبية الى الاس الموجود في السؤال $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n$
5. نطبق مبرهنة ديموافر (n توزع اي تضرب في θ وتكون اس ل r)

س) احسب باستخدام مبرهنة ديموافر ما يأتي :

1) $(1+i)^{11}$ (2د 2011)

Sol : $z=1+i$, $\text{mod}\, z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(z)=\theta=\frac{\pi}{4}$ لانها تقع في الربع الاول

$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$z^{11}=\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right]^{11} \Rightarrow z^{11}=(\sqrt{2})^{11}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$

$=32\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4})=32\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$

$=32\sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i$

$=-32+32i$

$(\sqrt{2})^{11}$
نضربها 11 مرة
$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

ملاحظة

ممكن ان تكون صيغة السؤال اعلاه $(1+i)^{-11}$ or $\frac{1}{(1+i)^{11}}$

2) $(\sqrt{3}+i)^{-9}$ (2د 2014)

Sol : $z=\sqrt{3}+i$, $\text{mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

$=2$

$\cos\emptyset=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\emptyset=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$

$\arg(z)=\emptyset=\frac{\pi}{6}$ لانها تقع في الربع الاول

$z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$z^{-9}=\left[2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\right]^{-9}=(2)^{-9}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{-9}=\frac{1}{(2)^9}(\cos\frac{9\pi}{6}-i\sin\frac{9\pi}{6})$

$=\frac{1}{512}(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{512}(0+i)=\frac{1}{512}i$

ملاحظة

ممكن ان تكون صيغة السؤال اعلاه كلاتي $(\sqrt{3}+i)^9$ او $\frac{1}{(\sqrt{3}+i)^9}$

3) $(1-i)^7$ (1د 2012)

sol: let $z=1-i$

$\text{mod } z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$ زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$ والسعة تقع في الربع الرابع

$z=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

$z^7=\left[\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})\right]^7=(\sqrt{2})^7(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4})$

$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{8+8i}$

ممكن ان تكون صيغة السؤال اعلاه كلاتي $(1-i)^{-7}$ او $\frac{1}{(1-i)^7}$

س) باستخدام مبرهنة ديموافر جد $\frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4}$ (2018 د1 تطبيقي)

ج) $-\frac{1}{32}-\frac{\sqrt{3}}{32}i$

س) باستخدام مبرهنة ديموافر احسب $(-1-\sqrt{-1})^{-3}$ (2018 د1 احيائي خارج)

$sol: z=-1-\sqrt{-1} \Rightarrow z=-1-i$ ... اكمل $\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

الدكتور محمد الربيعي

نتيجة مبرهنة ديموافر

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right] \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots\dots, n-1$$

ملاحظة

نستخدم نتيجة مبرهنة ديموافر في الحالات التالية :

1) اذا كان العدد مرفوع الى اس كسر $(\text{عدد مركب})^{\frac{n}{m}}$ او $\sqrt[m]{(\text{عدد})^n}$

2) اذا كانت صيغة السؤال جد الجذر(التربيعي او التكعيبي او الرابع .... الخ) للعدد المركب

3) حل المعادلات التي تتكون من حدين ومن كافة الدرجات

4) جد $(z^{\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{3}}, \dots.)$ للعدد المركب

ملاحظة

اذا كان الاس كسر بسطه واحد n/1 نتبع الخطوات الاتية :

1- نأخذ العدد داخل القوس (داخل القوس $= z$)ونجد له المقياس والسعة ويجب ان يكون العدد بالصيغة العادية

2- نضع العدد المركب بالصيغة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

3- نرفع الصيغة القطبية الى الاس الموجود في السؤال $z^{\frac{1}{n}} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}$

4- نطبق نتيجة مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{n}} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$

أي نوزع $\frac{1}{n}$ على القوس ($\frac{1}{n}$ هو اس ل r وقانون النتيجة ل الزاوية)

5- قيمة $k = 0, 1, 2 \dots\dots, n-1$

$1 = (\cos 0 + i\sin 0)$, $-1 = (\cos\pi + i\sin\pi)$

$i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $-i = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

س) حل المعادلة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3+1=0$ حيث $x \in C$.

Sol : $x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$

$x^3=\cos\pi+i\sin\pi$ بالجذر التكعيبي للطرفين

$x=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore x=\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$ حيث $k=0,1,2$ لانه جذر تكعيبي

$x_1=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\Leftarrow$ عندما $k=0$

$x_2=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)$ $\Leftarrow$ عندما $k=1$

$=(\cos\pi+i\sin\pi)=-1+i(0)=-1$

$x_3=\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ $\Leftarrow$ عندما $k=2$

$=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

مجموعة الحل هي :- $\left\{-1,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

ملاحظة

في السؤال اعلاه :

1- نجعل المتغير بالطرف الايسر والعدد بالطرف الايمن

2- نحول العدد بالصيغة القطبية

3- نجذر الطرفين ونطبق نتيجة مبرهنة ديموافر .

س) حل المعادلة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3+i=0$ حيث $x \in C$. (2017 د2 تطبيقي خارج)

س) بأستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$.

جد الجذور التكعيبية تعني $()^{\frac{1}{3}}$

جد الجذور الاربعة تعني $()^{\frac{1}{4}}$

sol: $z = 27i \Rightarrow z = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z^{\frac{1}{3}} = \left[27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$, $\therefore r = 27 \ , \theta = \frac{\pi}{2}$

$z^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$ حيث $k = 0, 1, 2$ لانه جذر تكعيبي

عندما $k = 0$ $\Leftarrow$ $z_1 = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$

عندما $k = 1$ $\Leftarrow$ $z_2 = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 3\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$

عندما $k = 2$ $\Leftarrow$ $z_3 = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)$

$= 3\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 3(0 - i) = \boxed{-3i}$

الجذور التكعيبية هي : $\left\{-3i \ , \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \ , -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right\}$

س) اذا كان $z = 27i$ عددا مركبا جد بأستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{3}}$.

س) جد حل المعادلة $x \epsilon C$ وباستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

$x^3 - 27i = 0$ or $\frac{x^3}{3} - 9i = 0$ or $\frac{x^3}{3i} - 9 = 0$

ملاحظة

حاول ان تأخذ الارقام التي لها جذر تكعيبي مثلا $(64i \ , 8i \ , 125i \ , -125 \Rightarrow$ اسئلة وزارية)

وجرب حلها بنفسك وتنطبق عليها جميع الصيغ اعلاه .

س) جد الجذور الاربعة للعدد (-16) بأستخدام مبرهنة ديموافر .

sol: let $z=-16 \Rightarrow z=16(-1) \Rightarrow z=16(\cos\pi+i\sin\pi)$

$z^{\frac{1}{4}}=[16(\cos\pi+i\sin\pi)]^{\frac{1}{4}}$, $\therefore r=16$, $\theta=\pi$

$z^{\frac{1}{4}}=(16)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$

$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$ عندما $k=0 \Leftarrow$

$z_2=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ عندما $k=1 \Leftarrow$

$=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$

$z_3=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ عندما $k=2 \Leftarrow$

$=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

$z_4=2\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ عندما $k=3 \Leftarrow$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

الجذور الاربعة هي : $\{\sqrt{2}+\sqrt{2}i\ ,\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}i\ ,\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}i\ ,\ \sqrt{2}-\sqrt{2}i\}$

س) اذا كان $z=-16$ عددا مركبا جد بأستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{4}}$.

س) جد حل المعادلة $x\epsilon C$ وباستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

$x^4+16=0$ or $\frac{x^4}{2}+8=0$ or $\frac{x^4}{4}+4=0$

س) جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ بأستخدام مبرهنة ديموافر .

sol: let $z=-64i \Rightarrow z=64(-i) \Rightarrow z=64(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

$$z^{\frac{1}{6}}=\left[64(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})\right]^{\frac{1}{6}} \quad , \quad \therefore r=64 \ , \theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$z^{\frac{1}{6}}=(64)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\right) \quad , \quad k=0,1,2,3,4,5$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{6}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12}\right) \quad \Leftarrow k=0 \text{ عندما}$$

$$=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \quad \Leftarrow k=1 \text{ عندما}$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \quad \Leftarrow k=2 \text{ عندما}$$

$$z_4=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right) \quad \Leftarrow k=3 \text{ عندما}$$

$$=2(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\boxed{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$$

$$z_5=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \quad \Leftarrow k=4 \text{ عندما}$$

$$z_6=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right) \quad \Leftarrow k=5 \text{ عندما}$$

س) اذا كان $z=-64i$ عددا مركبا جد بأستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{6}}$.

س) جد حل المعادلة $x\epsilon C$ وباستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

$$x^6+64i=0 \quad \text{or} \quad \frac{x^6}{4}+16i=0 \quad \text{or} \quad \frac{x^6}{2i}+32=0$$

س) جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ بأستخدام مبرهنة ديموافر ثم الطريقة المعروضة في البند [4_1] . (2014 خارج , 2017 د3 احيائي)

sol: $z=-1+\sqrt{3}i$

$$\text{mod } z=\|z\|=r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

θ , زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$ والسعة تقع في الربع الثاني $\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2}$, $\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\rightarrow z^{\frac{1}{2}}=\left[2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)\ ;\ k=0,1$$

عندما $k=0\Leftarrow$ $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i}$$

عندما $k=1\Leftarrow$ $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i}$$

الطريقة الثانية نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $-1+\sqrt{3}i\Leftarrow -1+\sqrt{3}i=(x+yi)^2$

$$-1+\sqrt{3}i=(x^2-y^2)+(2xy)i$$

$$x^2-y^2=-1\ \ldots\ldots\ldots(1\quad,\quad 2xy=\sqrt{3}\rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}\ \ldots\ldots\ldots(2$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) $x^2-(\frac{\sqrt{3}}{2x})^2=-1\rightarrow\left[x^2-\frac{3}{4x^2}=-1\right].4x^2$

$$4x^4-3=-4x^2\rightarrow 4x^4+4x^2-3=0\rightarrow(2x^2+3)(2x^2-1)=0$$

either $2x^2+3=0$ يهمل , OR $2x^2-1=0\rightarrow 2x^2=1\rightarrow x^2=\frac{1}{2}$

$$\boxed{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}\ ,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})}\rightarrow\boxed{y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

$\left\{\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right\}$ الجذران هما

س) اذا كان $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عددا مركبا جد بأستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{2}}$. (تمارين عامة)

sol : $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}.\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{1+3}$

$=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-2}{4}-\frac{2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\text{mod } z=\|z\|=r=\sqrt{(\frac{-1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\frac{-1}{2}}{1}=\frac{-1}{2}$, $\sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ والسعة تقع في الربع الثالث زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

$\theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

$z=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi\pi}{3}\right)\Rightarrow z^{\frac{1}{2}}=\left[(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi\pi}{3})\right]^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}}=(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi\pi}{3})^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}}=\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$, $k=0,1$ حيث

$z_1=\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}}{2}\right)=\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}\right)=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\Leftarrow k=0$ عندما

$\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2=\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right)\Leftarrow k=1$ عندما

$=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

الجذران هما : $\left\{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

ملاحظة

اذا كان الاس كسر بسطه اكبر من واحد (m/n) نتبع الخطوات الاتية :

1- نأخذ العدد داخل القوس (داخل القوس $z =$)ونجد له المقياس والسعة

2- نضع العدد المركب بالصيغة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

3- نرفع الصيغة القطبية الى بسط الاس (m) ونطبق مبرهنة ديموافر

$$z^m = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$

4- نرفع الصيغة الناتجة من الخطوة (3) الى $\frac{1}{n}$ ونطبق نتيجة مبرهنة ديموافر

قانون النتيجة $(z^m)^{\frac{1}{n}} = [r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)]^{\frac{1}{n}} =$

س) اوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له . (2014 د2)

Sol : $z = \sqrt{3} + i$, $\text{mod}\, z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\cos\emptyset = \frac{x}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \sin\emptyset = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{2}$$

$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$ لانها تقع في الربع الاول

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \Rightarrow z^2 = \left[2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\right]^2 = 2^2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^2$$

$$z^2 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = \left[4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right]^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{\frac{1}{5}}$$

$$(z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$$ حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$ لانه جذر خامس

$$z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right) \quad \Leftarrow k$$

$= 0$ عندما

$$z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right) \quad \Leftarrow k$$

$= 1$ عندما

$$z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right) \quad \Leftarrow k = 2$ عندما

$$z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right) \quad \Leftarrow k=3 \text{ عندما}$$

$$z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right) \quad \Leftarrow k=4 \text{ عندما}$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ملاحظة : ممكن ان تكون صيغة السؤال اعلاه : $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$ او $\sqrt[5]{(\sqrt{2}+i)^2}$ (البسط اس والمقام دليل الجذر)

س) احسب باستخدام ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{\frac{-3}{2}}$ (2017 د1 احيائي)

sol : $z = \sqrt{3}+i \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ لانها تقع بالربع الاول

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z^{-3} = \left[2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\right]^{-3} \Rightarrow z^{-3} = 2^{-3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-3}$$

$$z^{-3} = \frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$$

$k = 0, 1$ حيث

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftarrow k=0 \text{ عندما}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$(\sqrt{3}+i)^{\frac{-3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}+i)^3}}$$

السالب ينزل العدد للمقام والبسط اس والمقام دليل الجذر

$$(\frac{1}{8})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{2} - i\sin\frac{\frac{5\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \quad \Leftarrow \quad k = 1 \quad \text{عندما}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

ملاحظة : ممكن ان تكون صيغة السؤال : جد باستخدام ديموافر الجذور التربيعية للعدد المركب $\frac{1}{(\sqrt{3}+i)^3}$

الدكتور محمد الربيعي

بعض وزاريات الفصل الاول

س) ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(1-\sqrt{3}i)^2-(2-\sqrt{3}i)^2$ 1د 2004

sol : $(1-\sqrt{3}i)^2-(2-\sqrt{3}i)^2=(1-2\sqrt{3}i+3i^2)-(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$

$=(1-2\sqrt{3}i-3)-(4-4\sqrt{3}i-3)$

$=(-2-2\sqrt{3}i)-(1-4\sqrt{3}i)=(-2-2\sqrt{3}i)+(-1+4\sqrt{3}i)=-3+2\sqrt{3}i$

س) ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$ د 2005

sol: $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)=(9+24i+16i^2)+(5+5i-3i-3i^2)$

$=(9+24i-16)+(5+5i-3i+3)$

$=(-7+24i)+(8+2i)=1+26i=(1,26)$ الصيغة الديكارتية

س) ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $\frac{(1-i)^{13}}{64}$

sol : $\frac{(1-i)^{13}}{64}=\frac{(1-i)^{12}(1-i)}{64}=\frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64}$

$=\frac{(1-2i+i^2)^6(1-i)}{64}$ (خارج 2013)

$=\frac{(1-2i-1)^6(1-i)}{64}=\frac{(-2i)^6(1-i)}{64}=\frac{64\,i^6(1-i)}{64}=\frac{-64(1-i)}{64}=-(1-i)$

$=-1+i$

س)جد قيمتي x , y الحقيقتين التي تحقق $(2+xi)(-x+i)=\frac{9y^2+49}{3y+7i}$ (2د 1998)

sol: $(2+xi)(-x+i)=\frac{9y^2+49}{3y+7i}\rightarrow -2x+2i-x^2i+xi^2=\frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$

$(-2x-x)+(2-x^2)i=\frac{(3y-7i)(3y+7i)}{(3y+7i)}\rightarrow -3x+(2-x^2)i=3y-7i$

$-3x=3y\rightarrow -x=y\ldots\ldots(1)$

$2-x^2=-7\rightarrow x^2=9\rightarrow \boxed{x=\pm 3}$

$x=3\rightarrow \boxed{y=-3}$, $x=-3\rightarrow \boxed{y=3}$

س) جد قيمتي X , Y الحقيقيتان التي تحقق المعادلة $\frac{125}{11+2i}x+(1-i)^2y=11$ (تمهيدي 2015)

sol: $\left(\frac{125}{11+2i}\cdot\frac{11-2i}{11-2i}\right)x+(1-2i+i^2)y=11\rightarrow \frac{125(11-2i)}{125}x+(-2i)y=11$

$11x-2xi-2yi=11$ ... ... اكمل الحل

س) جد قيمتي $x , y \in R$ اذا علمت ان $(x+2i)(x-i)=\frac{121+9y^2}{11+3yi}$ (2016 د2)

sol : $x^2-xi+2xi-2i^2=\frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$

$(x^2+2)+xi=\frac{(11-3yi)(11+3yi)}{(11+3yi)}$

$(x^2+2)+xi=11-3yi$

$x^2+2=11 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$

$x=-3y$

$x=3 \rightarrow 3=-3y \rightarrow y=-1$

$x=-3 \rightarrow -3=-3y \rightarrow y=1$

س) جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق $(3+2i)^2y=(x+3i)^2$ (2009 تمهيدي)

sol : $y=\frac{9}{4} \rightarrow x=\frac{-9}{2}$, $y=-1 \rightarrow x=2$

س) جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(-1+7i)(1+i)$ (2010 د2)

sol : $(-1+7i)(1+i)=-1-i+7i+7i^2=-1+6i-7=-8+6i$

$-8+6i=(x+yi)^2 \Rightarrow$ ..... اكمل الحل $\Rightarrow$ الجذران هما $\{(1+3i),(-1-3i)\}$

س) اذا كان احد جذري المعادلة التربيعية $x^2+x-bx+c+8=0$ هو $1-3i$ جد قيمتي b , c الحقيقيتان (2018 د2 خارج احيائي)

sol : $b=3$, $c=2$

س) حل المعادلة z^4+13z^2+36 (2009 د2)

Sol : $z^4+13z^2+36 \rightarrow (z^2+9)(z^2+4)=0$

either $z^2=-9 \rightarrow z=\pm 3i$ OR $z^2=-4 \rightarrow z=\pm 2$

س) جد المقياس والقيمة الاساسية للعدد المركب $(1+\sqrt{3}i)^2$ (2008 د1)

س) اثبت ان $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^2}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2=0$ (2016 د2 خارج)

س) اثبت ان $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^3}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)}(\cos\theta-i\sin\theta)=1$ (2018 د3 احيائي داخل)

س) اذا كان $z = \cos\theta + i\sin\theta$ اثبت ان $(1+\bar{z})z = 1+z$ (2018 د2 خارج تطبيقي)

sol : $(1+\bar{z})z = (1+\overline{\cos\theta + i\sin\theta})(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (1+\cos\theta - i\sin\theta)\cos\theta + i\sin\theta$

$= [(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)]$

$= (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta) + 1 = z + 1 = 1 + z$

س) ليكن $z = \cos 2x + i\sin 2x$ اثبت ان $\frac{2}{1+z} = 1 - i\tan x$ (2019 د1 احيائي خارج)

س) جد مجموعة حل المعادلة التالية في c : $z^2 + 2i(3-2i) = 3z$ (2017 د2 احيائي داخل)

س) جد الجذور التكعيبية للعدد المركب (-125) باستخدام مبرهنة ديموافر (2017 د3 تطبيقي داخل)

س) حل المعادلة $z^3 - 64i = 0$ باستخدام مبرهنة ديموافر (2018 د1 تطبيقي داخل)

س) جد حل المعادلة $x \in c$ $x^4 + 16 = 0$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر (2018 د1 احيائي)

س)جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3 - 8i = 0$ (2015د4 رصافة)

س) باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $8i$ (2016 د1)

س) جد مجموعة حل المعادلة التالية باستخدام نتيجة ديموافر $\frac{x^3}{3} - 9i = 0$ (2018 د3 تطبيقي داخل)

س) حل المعادلة التالية في c باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر $\frac{x^3}{i} - 27 = 0$ (2019 د1 تطبيقي داخل)

س) جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر . (2015 د2 خارج)

sol: $z = 1 + i \quad , \quad \mod z = \|z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \theta = \frac{\pi}{4}$ لانها تقع بالربع الاول

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow z^2 = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right]^2$$

$$z^2 = \left[(\sqrt{2})^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2\right] = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})\right]^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) ; k = 0, 1, 2$$

اكمل الحل ....

الدكتور محمد الربيعي

الفصل الثاني : القطوع المخروطية

$$\text{الاختلاف المركزي} = \begin{cases} e = 1 & \text{للقطع المكافئ} \\ 0 < e < 1 & \text{للقطع الناقص} \\ e > 1 & \text{للقطع الزائد} \end{cases}$$

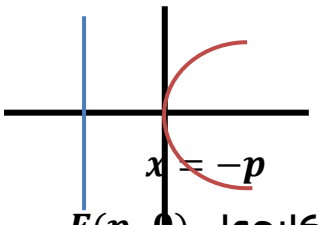
المعادلة العامة للقطع المخروطي هي :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}$$

القطع المكافئ

وهو مجموعة نقط في المستوي التي يكون بعد أي منها عن نقطة معلومة تسمى البؤرة $F(p,0)$, $F(0,p)$ بحيث $p > 0$ دائما يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل ويرمز له D.

1) قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل وبؤرته تقع على محور السينات الموجب



البؤرة $F(p,0)$, المعادلة القياسية : $y^2 = 4px$

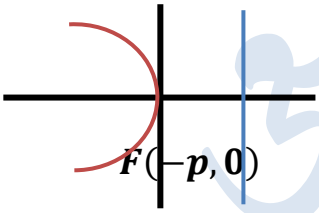
معادلة الدليل $x = -p$, معادلة المحور $y = 0$

ملاحظة : البؤرة ومعادلة القطع المكافئ لهما نفس الاشارة والدليل عكس اشارة كليهما

ملاحظة : قيمة (p) دائما تكون موجبة

---

2) قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل وبؤرته تقع على محور السينات السالب

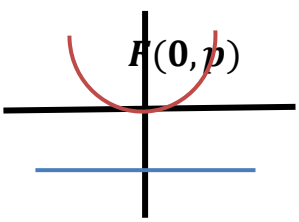


البؤرة $F(-p,0)$ المعادلة القياسية : $y^2 = -4px$

معادلة الدليل $x = p$, معادلة المحور $y = 0$

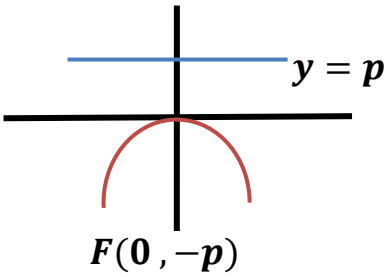
---

3) قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل وبؤرته تقع على محور الصادات الموجب



البؤرة $F(0\ ,p)$, المعادلة القياسية : $x^2 = 4py$

معادلة الدليل $y = -p$, معادلة المحور $x = 0$



4) قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل وبؤرته تقع على محور الصادات السالب

البؤرة $F(0, -p)$ ، المعادلة القياسية : $x^2 = -4py$

معادلة الدليل $y = p$ ، معادلة المحور $x = 0$

س2/ في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ: (تمرين 1-2)

$a) x^2 = 4y$

$x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 4 \div 4 \Rightarrow p = 1$

$F(0, p) = (0, 1)$

$y = -p \Rightarrow y = -1$ البؤرة, $v(0, 0)$ الرأس

$b)\ 2x + 16y^2 = 0$

$16y^2 = -2x \div 16 \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{8}x$

$y^2 = -4px \Rightarrow -4p = -\frac{1}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{32}$

$F(-p, 0) = \left(-\frac{1}{32}, 0\right)$

$x = p \Rightarrow x = \frac{1}{32}$, $v(0, 0)$

ملاحظة

يجب تبسيط المعادلة حتى نتمكن من مقارنتها مع المعادلة القياسية بحيث يكون المتغير من الدرجة الثانية في الطرف الايسر ويجب ان يكون معامله (1) والمتغير من الدرجة الاولى في الطرف الايمن

c) $y^2 = -4(x - 2)$

$(y - k)^2 = -4p(x - h)$

$V(h, k) = (2, 0)$ الرأس

$-4p = -4 \div 4 \Rightarrow p = 1$

$F(-p + h, k) = (1, 0)$ البؤرة

$y = k = 0$ معادلة المحور

$x = p + h = 3$ معادلة الدليل

d) $(x-1)^2 = 8(y-1)$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$V(h,k) = (1,1)$ الرأس

$4p = 8 \div 4 \Rightarrow p = 2$

$F(h, p+k) = (1,3)$ البؤرة

$x = h = 1$ معادلة المحور

$y = -p + k = -1$ معادلة الدليل

e) $y^2 + 4y + 2x = -6$

$y^2 + 4y = -2x - 6 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4$

$(y+2)^2 = -2x - 2$

$(y+2)^2 = -2(x+1)$

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

$V(h,k) = (-1,-2)$ الرأس

$-4p = -2 \div -4 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$F(-p+h, k) = (-\frac{1}{2} - 1, -2) = (-\frac{3}{2}, -2)$ البؤرة

$y = k = -2$ معادلة المحور

$x = p + h = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ معادلة الدليل

f) $x^2 + 6x - y = 0$

$x^2 + 6x = y \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = y + 9$

$(x+3)^2 = y + 9$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$V(h,k) = (-3,-9)$ الرأس

$4p = 1 \div -4 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

$F(h, p+k) = (-3, \frac{1}{4} - 9) = (-3, -\frac{35}{4})$ البؤرة

$x = h = -3$ معادلة المحور

$y = -p + k = -\frac{1}{4} - 9 = -\frac{37}{4}$ الدليل

س) جد البؤرة ومعادلة الدليل القطع المكافئ: $y^2 = 4x$

sol : $y^2 = 4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 4 \rightarrow p = 1$, $F(1,0)$ البؤرة , $x = -1$ معادلة الدليل

لايجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف نتبع ما يلي :

1) نجد البؤرة والدليل ثم نوضحها على الرسم 2) نفرض ان النقطة $m\ (x,y)$ تقع على المنحني

3) نستخدم قانون المسافة (البعد بين النقطة والبؤرة = البعد بين النقطة والدليل)

4) نتخلص من الجذور بتربيع الطرفين ثم نفتح الاقواس

5) الحد الذي يحتوي على تربيع يبقى في الطرف الايسر والباقي ينقل في الطرف الايمن

س6/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ: (تمرين 1-2)

أ) البؤرة (7,0) والرأس نقطة الاصل؟

$MF = MQ$

$\sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-y)^2}$ بتربيع الطرفين

$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49 \Rightarrow y^2 = 28x$

ب) معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ والرأس نقطة الاصل ؟

$MF = MQ$ $F(0,-\sqrt{3})$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$ بتربيع الطرفين

$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$

$x^2 = -4\sqrt{3}y$

ايجاد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ضمن الحالات الرئيسة التالية :

اولا :- اذا علمت بؤرة القطع المكافئ فأن الحل سيكون بشكل مباشر نستخرج قيمة p ثم نكتب المعادلة المناسبة ثم التعويض بها .

س) جد معادلة القطع المكافئ اذا علم :

1- بؤرته (3 , 0) والرأس نقطة الاصل

Sol : $F(3,0) \Rightarrow p = 3$

$\therefore y^2 = 4px$ المعادلة القياسية $\Rightarrow y^2 = (4)(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$

2- بؤرته (0 , 5) ورأسه نقطة الاصل

Sol : $F(0,5) \Rightarrow p = 5$

$\therefore x^2 = 4py$ المعادلة القياسية $\Rightarrow x^2 = (4)(5)y \Rightarrow x^2 = 20y$

ملاحظة لايجاد معادلة القطع المكافئ نحتاج 1) موقع البؤرة 2) قيمة p

ثانيا :- اذا علمت معادلة الدليل ومعادلة الدليل يجب ان تكون اما (عدد $= y$ او عدد $= x$) ومنها نجد قيمة p ولا ننسى ان البؤرة عكس الدليل في الاشارة ثم تكتب المعادلة المناسبة ثم نعوض قيمة p بها .

س) جد معادلة القطع المكافئ اذا علم :

1- معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه نقطة الاصل .

Sol : $y = 7 \Rightarrow p = 7$

$x^2 = -4py$ المعادلة القياسية $\Rightarrow x^2 = (-4)(7)y \Rightarrow x^2 = -28y$

2- معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

Sol : $2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \,] \div 2 \Rightarrow x = 3 \quad , \therefore p = 3$

$y^2 = -4px$ المعادلة القياسية $\Rightarrow y^2 = (-4)(3)x \Rightarrow y^2 = -12x$

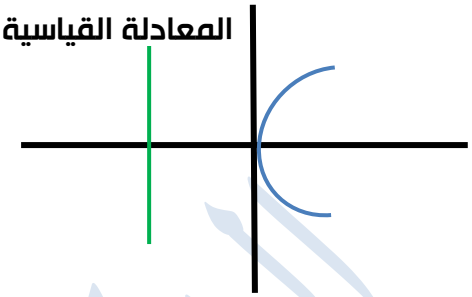
س1/ جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي ثم أرسم المنحني البياني لها: (تمرين 2-1)

1- البؤرة (5,0) والرأس نقطة الاصل .

sol : $F(5,0) \rightarrow p = 5$, المعادلة القياسية للقطع المكافئ $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = (4)(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$

X	0	1	2
y	0	$\pm 2\sqrt{5}$	$\pm 2\sqrt{10}$



** تؤخذ قيم x موجبة لان المعادلة موجبة .

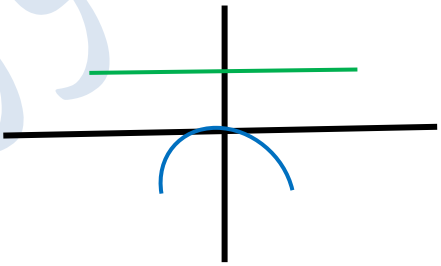
2- البؤرة (0 , - 4) والرأس نقطة الاصل .

sol : $F(0,-4) \rightarrow p = 4$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $x^2 = -4py$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = -(4)(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$

X	0	± 4	$\pm 4\sqrt{2}$
y	0	-1	-2



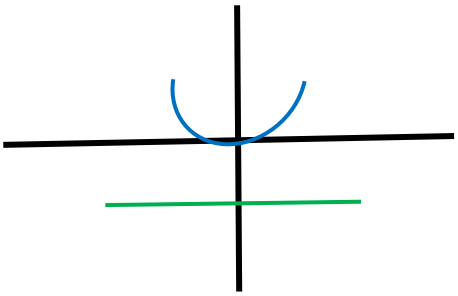
3- البؤرة $(0,\sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل .

sol : $F(0,\sqrt{2}) \rightarrow p = \sqrt{2}$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = 4\sqrt{2}y$

X	0	$\pm 2\sqrt{2}$	± 4
y	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$



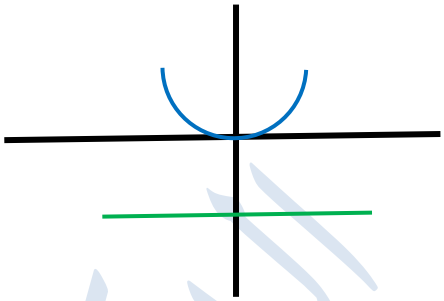
4- معادلة دليل القطع المكافئ $4y+3=0$ والرأس نقطة الاصل

sol : $4y+3=0 \rightarrow 4y=-3 \rightarrow y=\frac{-3}{4}$ معادلة الدليل

$F\left(0,\frac{3}{4}\right)$ البؤرة $\rightarrow p=\frac{3}{4}$

$x^2=4py$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$x^2=(4)(\frac{3}{4})y \rightarrow x^2=3y$ معادلة القطع المكافئ



X	0	$\pm\sqrt{3}$	±3
y	0	1	3

ثالثا :- اذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة نتبع ما يلي :-

1) نكتب المعادلة القياسية المناسبة حسب موقع البؤرة

2) نعوض النقطة في المعادلة القياسية لايجاد قيمة p

3) نعيد كتابة المعادلة القياسية و نعوض قيمة p فيها

س) جد معادلة القطع المكافئ في الحلات التالية :

1- يمر بالنقطة (4 , 2) وبؤرته تقع على محور السينات ورأسه نقطة الاصل ؟

الحل : البؤرة تقع على محور السينات الموجب اي ان المعادلة القياسية هي :- $y^2=4px$

نعوض النقطة $(4,2)$ في المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$(4)^2=4p\,(2) \Rightarrow 16=8p \Rightarrow p=2$

$y^2=4px \Rightarrow y^2=8x$ معادلة القطع المكافئ

2- يمر بالنقطة (-4 , -1) وبؤرته تقع على محور الصادات ورأسه نقطة الاصل ؟

الحل : البؤرة تقع على محور الصادات السالب أي ان المعادلة القياسية هي : $x^2=-4py$

نعوض النقطة $(-4,-1)$ في المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(-1)^2=-4p(-4)$

$1=16p \rightarrow p=\frac{1}{16}$

$x^2=-4py \Rightarrow x^2=(-4).\left(\frac{1}{16}\right)y \rightarrow x^2=-\frac{1}{4}y$ معادلة القطع المكافئ

ملاحظة

اذا لم يذكر موقع البؤرة فنأخذ احتمالين 1) على محور السينات 2) على محور الصادات

3- يمر بالنقطة (6 , 2-) ورأسه نقطة الاصل ؟

الحل :- يوجد احتمالين للمعادلة القياسية لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

الاحتمال الاول :- البؤرة تقع على المحور السيني السالب أي ان المعادلة القياسية هي $y^2 = -4px$

نعوض النقطة (6, 2-) في المعادلة القياسية $y^2 = -4px \Rightarrow (6)^2 = -4p(-2)$

معادلة القطع المكافئ $\therefore y^2 = -4\left(\frac{9}{2}\right)x \Rightarrow y^2 = -18x$, $36 = 8p \Rightarrow p = \frac{9}{2}$

الاحتمال الثاني :- البؤرة تقع على المحور الصادي الموجب أي ان المعادلة القياسية هي $x^2 = 4py$

نعوض النقطة (6, 2-) في المعادلة القياسية $x^2 = 4py \Rightarrow (-2)^2 = -4p(6)$

معادلة القطع المكافئ $\therefore x^2 = -4\left(\frac{1}{6}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$, $4 = 24p \Rightarrow p = \frac{1}{6}$

س5/ قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ يمر بالنقطة (1,2) جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله وارسم القطع؟ (تمرين 1-2)

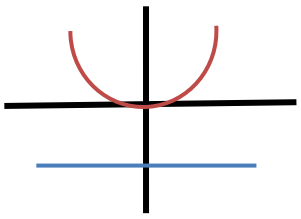
الحل : كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ تحقق معادلته

نعوض النقطة (2 , 1) في معادلة القطع المكافئ $Ax^2 + 8y = 0 \Rightarrow A(1)^2 = -8(2) \Rightarrow A = -16$

نعوض قيمة A $\Leftarrow$ $Ax^2 + 8y = 0 \Rightarrow -16x^2 + 8Y = 0$

$16x^2 = 8Y \Rightarrow x^2 = \frac{8y}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $x^2 = 4py$ $\Rightarrow 4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$



معادلة الدليل $y = -\frac{1}{8}$, البؤرة $\therefore F\left(0, \frac{1}{8}\right)$

x	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$
y	0	2	4

رابعا:- اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة معينة (a, b) نتبع ما يلي :

1. اذا كانت البؤرة تقع على محور السينات فان معادلة الدليل (الاحداثي السيني $x = a$) ولا ننسى البؤرة عكس الدليل في الاشارة ومنها نجد قيمة p ثم نكتب المعادلة القياسية المناسبة ثم التعويض بها
2. اذا كانت البؤرة تنتمي الى محور الصادات فان معادلة الدليل (الاحداثي الصادي $y = b$)ولا ننسى البؤرة عكس الدليل في الاشارة ومنها نجد قيمة p ثم نكتب المعادلة القياسية المناسبة ثم التعويض بها
3. في حالة عدم تحديد موقع البؤرة فيتم اخذ الاحتمالين معا .

س) جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية:

1- بؤرته تقع على محور السينات ورأسه نقطة الاصل ودليله يمر بالنقطة (3 , -2) .

الحل : البؤرة تقع على المحور السيني الموجب أي ان المعادلة القياسية هي $y^2 = 4px$

$x = -2$ معادلة الدليل $\Rightarrow p = 2$

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(2)x \Rightarrow y^2 = 8x$ معادلة القطع المكافئ

ملاحظة

اذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة نعوض النقطة في المعادلة , واذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة معينة فلا يمكن ان نعوض النقطة في المعادلة وانما معادلة الدليل لها ثلاث احتمالات حسب موقع البؤرة

2- بؤرته تقع على محور الصادات ورأسه نقطة الاصل ودليله يمر بالنقطة (4 , 2) .

الحل : البؤرة تقع على محور الصادات السالب أي ان المعادلة القياسية هي $x^2 = -4py$

$y = 4$ معادلة الدليل $\Rightarrow F(0, -4) \Rightarrow p = 4$

$x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$ معادلة القطع المكافئ

3- جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة (-5 , 3) .

الحل : يوجد احتمالين للمعادلة القياسية لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

الاحتمال الاول :- البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب

$\Rightarrow y^2 = -12x$ المعادلة القياسية $, y^2 = -4px$ $, \therefore p = 3$ معادلة الدليل $x = 3$

الاحتمال الثاني :- البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب

$\Rightarrow x^2 = 20y$ المعادلة القياسية $, x^2 = 4py$ $, \therefore p = 5$ معادلة الدليل $y = -5$

س4/ إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (-3,4) والرأس في نقطة الاصل جد معادلته علما ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين؟ (تمرين 1-2)

الحل : يوجد احتمالين للمعادلة القياسية لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

الاحتمال الاول : البؤرة تقع على المحور السيني الموجب

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $y^2 = 4px$, البؤرة $F(3,0) \rightarrow p = 3 \rightarrow x = -3$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 12x$

الاحتمال الثاني : البؤرة تقع على المحور الصادي السالب

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $x^2 = -4py$, البؤرة $F(0,-4) \rightarrow p = 4 \rightarrow y = 4$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = -16y$

خامسا :- اذا مر القطع المكافئ بنقطتين تقعان في ربعين متجاورين فأن البؤرة تقع على محور تناظر الربعين فنقوم بكتابة المعادلة المناسبة ثم نقوم بتعويض أي نقطة من النقطتين لاستخراج قيمة p ثم اعادة تعويضها بمعادلة القطع .

ملاحظة هنا يجب ان نلاحظ أي الاحداثيات بين النقطتين متساوي(نفس العدد ونفس الاشارة) فان البؤرة تقع عليه

س3/ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (-2,-5)، (2,-5) والرأس في نقطة الأصل؟ (تمرين 1-2)

الحل : بما أن النقطتين متناظرتين مع محور الصادات $\therefore x^2 = -4py$

نعوض النقطة (2,-5) $\Leftarrow (2)^2 = -4p(-5) \Leftarrow 4 = 20p \div 20$

$$p = \frac{1}{5} \Rightarrow x^2 = -4\left(\frac{1}{5}\right)y \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{5}y$$

س) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (4, 2) , (-4 , 2) والرأس في نقطة الاصل .

الحل : النقطتان متناظرتان حول المحور السيني الموجب , اذن المعادلة القياسية هي $y^2 = 4px$

نعوض احدى النقطتين في المعادلة القياسية ولتكن النقطة (4, 2) $\rightarrow$ $16 = (4)(p)(2)$

$$16 = 8p \rightarrow p = \frac{16}{8} \rightarrow p = 2$$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 8x$, نعوض p $\Rightarrow$ $y^2 = (4)(2)x$

ملاحظة

البعد بين البؤرة والدليل في القطع المكافئ = 2p

س) جد معادلة القطع المكافئ بؤرته على محور السينات والبعد بين بؤرته ودليله يساوي 6 وحدات ورأسه نقطة الاصل

Sol : $2p = 6 \rightarrow p = 3$

يوجد احتمالين للمعادلة لعدم تحديد موقع البؤرة على السينات الموجب او السينات السالب

1) اذا كانت البؤرة تنتمي الى محور السينات الموجب

$y^2 = 4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافئ

2) اذا كانت البؤرة تنتمي الى محور السينات السالب

$y^2 = -4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$y^2 = -12x$ معادلة القطع المكافئ

ملاحظة

في حال لم يذكر المحور فيصبح لدينا اربعة احتمالات (كل حالات القطع المكافئ)

س)جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته نقطة الانقلاب للدالة $f(x) = (x-1)^3$ (2008)

sol: $f(x) = (x-1)^3 \rightarrow\rightarrow f`(x) =\rightarrow 3(x-1)^2 \rightarrow f``(x) = 6(x-1)$

$f``(x) = 0 \rightarrow 6(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 0 \rightarrow (1,0)$ نقطة الانقلاب وهي بؤرة القطع المكافئ

$p = 1 \rightarrow y^2 = 4px$ معادلة القطع القياسية $\rightarrow$ $y^2 = 4x$ معادلة القطع المكافئ

س)جد معادلة القطع المكافئ بطريقة التعريف اذا كانت بؤرته هي نقطة انقلاب الدالة $f(x)=x^3+6x^2-16$, وراسه نقطة الاصل . (2019 د2 احيائي) (واجب)

$sol: \bar{f}(x)=3x^2+12x \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x)=6x+12$, $\bar{\bar{f}}(x)=0$

$6x+12=0 \Rightarrow 6x=-12 \Rightarrow x=-2$

$f(-2)=-8+24-16=0$, $(-2,0)$ انقلاب مرشحة

----------(-2) ++++++++

تحدب تقعر

$\{x: x>-2\}$ الدالة مقعرة عند , $\{x: x<-2\}$ الدالة محدبة عند

$(-2,0)$ نقطة انقلاب وهي بؤرة القطع المكافئ , $x=2$ معادلة الدليل

$let\ Q(x,y) \in$ للقطع المكافئ , $F(-2,0)$, $M(2,y)$

$\overline{QF}=\overline{QM} \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-y)^2}$

$x^2+4x+4+y^2=x^2-4x+4$

$y^2=-4x-4x \Rightarrow y^2=-8x$ *معادلة القطع المكافئ*

الدكتور محمد الربيعي

انسحاب محاور القطع المكافئ:

للتطبيقي

الفتحة	المحور	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة المحور	معادلة القطع
يمين	x	$F(p+h,k)$	$\bar{X}=-p+h$	$=k\bar{y}$	$(y-k)^2=4p(x-h)$
يسار	x	$F(-p+h,k)$	$\bar{X}=p+h$	$=k\bar{y}$	$(y-k)^2=-4p(x-h)$
اعلى	y	$F(h,p+k)$	$\bar{y}=-p+k$	$=h\bar{X}$	$(y-k)^2=-4p(x-h)$
اسفل	y	$F(h,-p+k)$	$\bar{y}=p+k$	$=h\bar{X}$	$(x-h)^2=-4p(y-k)$

مثال / من معادلة القطع المكافئ عين الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل

$$(y+1)^2=4(x-2)$$

$(y+1)^2=4(x-2)$

~~$(y-k)^2=4p(x-h)$~~

$V(h,k)=(2,-1)$ الرأس

$4p=4\div 4\Rightarrow p=1$

$F(p+h,k)=(3,-1)$ البؤرة

$y=k=-1$ المحور ، $x=-p+h=1$ معادل الدليل

مثال/ جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ: $(x-1)^2=8\,(y-1)$ ؟

$h=1,k=1$

$[4P=8]\div 4\Rightarrow P=2$

$\bar{o}\,(h,k)\Rightarrow(1\ 1)$

$\bar{F}\,(h,P+k)$: البؤرة

$\bar{F}(1,2+1)\Rightarrow \bar{F}\,(1,3)$

$y=-P+k$

$y=-2+1\Rightarrow y=-1$

$X=h$: معالدلة المحور

$X=1$

ملاحظة

إذا كانت معادلة القطع المكافئ لا تشبه الصورة القياسية عند الحل يجب أن نحولها الى صورتها القياسية من خلال الخطوات التالية:

1) نجعل المتغير التربيعي مع قرينه في الطرف الأيسر وباقي الحدود في الطرف الأيمن .

2) نضيف للطرفين مربع نصف معامل المتغير القرين للمتغير التربيعي.

3) نجعل الطرف الأيسر بالصورة: $(\sqrt{\text{الحد الاول}} \pm \sqrt{\text{الحد الثاني}})^2$

4) نقارن بالمعادلة القياسية لإيجاد قيمة p والرأس.

مثال / عين الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ: $y = x^2 + 4x$ ؟

$$x^2 + 4x = y \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = y + 4$$

$$(x+2)^2 = y + 4$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

الرأس $V(h,k) = (-2,-4)$

$$4p = 1 \div 4 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

البؤرة $F(h, p+k) = (-2, \frac{1}{4} - 4) = (-2, \frac{-15}{4})$

معادلة المحور $y = -p + k = -\frac{1}{4} - 4 = \frac{-17}{4}$ $\quad x = h = -2$

ملاحظة

حول استخراج قيم h، k عن معادلة القطع المكافئ القياسية :

مثال توضيحي : $(y+1)^2 = 4(x-2)$

الرقم الذي داخل قوس x يمثل قيمة h دائما ولكن نعكس اشارته فهنا الرقم 2- فتكون h = 2	الرقم الذي داخل قوس y يمثل قيمة k دائمة ولكن نعكس اشارته فهنا الرقم 1+ فتكون k = -1

مثال / ناقش القطع المكافئ $y = x^2 + 4x$

$y = x^2 + 4x$

$y + 4 = x^2 + 4x + 4$

$(y + 4) = (x + 2)^2$

$(x + 2)^2 = (y + 4)$

$h = -2, k = -4$

$[4P = 1] \div 4 \Longrightarrow P\frac{1}{4}$

$\bar{o}\ (h, k) \Longrightarrow (-2 - 4)$ الرأس

$\bar{F}(h.P + k) \Longrightarrow \left(2, \frac{1}{4} - 4\right)$ البؤرة

$\bar{F}(-2, -3\frac{3}{4})$

$\bar{y} = -P + k$: معادلة الدليل

$\bar{y} = -\frac{1}{4} - 4 \Longrightarrow \bar{y} = -4\frac{1}{4}$

$\bar{x} = h$ معادلة المحور

$\bar{x} = -2$

مثال / جد الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ: $y^2 + 4y + 2x = -6$ ؟

$y^2 + 4y = -6 - 2x$

نضيف مربع نصف معامل y للطرفين

$y^2 + 4y + 4 = -6 - 2x + 4$

$(y + 2)^2 = -2x - 2$

$(y + 2)^2 = -2(x + 1)$ معادلة القطع القياسية

K=-2 , h=-1

$[4p = 2] \div 4 \Longrightarrow p = \frac{1}{2}$

$\bar{o}(h, k) \Longrightarrow (-1, -2)$: الرأس

$\bar{F}(-p + h, k)$: البؤرة

$\bar{F}(-\frac{1}{2} - 1, -2) \Longrightarrow \bar{F}(-\frac{3}{2}, -2)$

$\bar{x} = P + h$: البؤرة

$\bar{x} = \frac{1}{2} - 1 \Longrightarrow \bar{x} = \frac{-1}{2}$

$\bar{y} = k$: المحور

$\bar{y} = -2$

مثال 5 / جد الراس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ : $x^2 + 6x - y = 0$ ؟

$x^2 + 6x = y$

$x^2 + 6x + 9 = y + 9$

$(x + 3)^3 = (y + 9)$

$h = -3, k = -9$

$[4P - 1] \div 4 \Longrightarrow P = \frac{1}{4}$

$\bar{o}\ (h, k) \Longrightarrow (-3, -9)$

$\bar{F}\ (h, P + k)$

$\bar{F}(-3, \frac{1}{4} - 9) \Longrightarrow \bar{F}\ (-3, \frac{-35}{4})$

$\bar{F}(-3, -8\frac{3}{4})$

معادلة الدليل : $y = -P + k$

$y = -\frac{1}{4} - 9 \Longrightarrow y = -9\frac{1}{4}$

معادلة المحور : $\bar{x} = h$

$\bar{x} = -3$

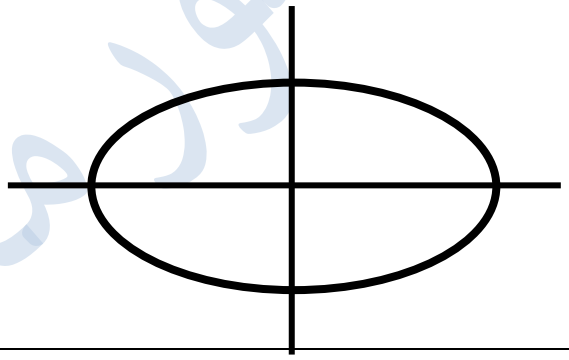
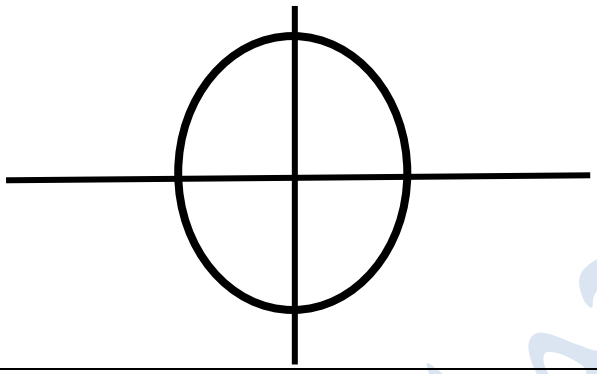
الدكتور محمد الربيعي

القطع الناقص

وهو مجموعة نقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين تسمى البؤرتين يساوي عدد ثابت (2a)

** لو فرضنا ان P(x , y) تقع على القطع الناقص فمن التعريف فأن :

تعريف القطع الناقص $\leftarrow pF_1 + pF_2 = 2a$

اولا :- قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل .	ثانيا :- قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور الصادات ومركزه نقطة الاصل .
	
المعادلة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ البؤرتان : $F_1(c,0)\ ,\ F_2(-c,0)$ الرأسان : $V_1(a,0)\ ,\ V_2(-a,0)$ القطبان : $M_1(0,b)\ ,\ M_2(0,-b)$	المعادلة : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ البؤرتان : $F_1(0,c)\ ,\ F_2(0,-c)$ الرأسان : $V_1(0,a)\ ,\ V_2(0,-a)$ القطبان : $M_1(b,0)\ ,\ M_2(-b,0)$

لغرض رسم القطع الناقص نتبع ما يلي :

لتكن $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتيان لمحور السينات ولرسم هذا القطع .

1) نعين الرأسين $V_1(a,0)\ ,\ V_2(-a,0)$

2) نعين القطبين $M_1(0,b)\ ,\ M_2(0,-b)$

3) نصل بين النقاط الاربعة $V_1M_1V_2M_2$ على الترتيب بمنحني متصل .

4) نعين البؤرتين $F_1(C,0)\ ,\ F_2(-C,0)$

$V_2(0,-a)$

مصطلحات وقوانين مشتركة

1) طول المحور الكبير(البعد بين الرأسين) (العدد الثابت) = 2a وحدة .

2) طول المحور الصغير(البعد بين القطبين) = 2b وحدة .

3) البعد(المسافة) بين البؤرتين(البعد البؤري) = 2c وحدة .

4) العلاقة بين a , b , c هي : $a^2 = b^2 + c^2$ حيث $a > b\ ,\ a > c$ (قيم a ,b ,c موجبة دائما).

5) الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} < 1$ ويكون اصغر من واحد دائما .

6)مساحة القطع الناقص : $A = ab\pi$

7) محيط القطع الناقص $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

ملاحظة اذا كان مقام x^2 اكبر من مقام y^2 فالبؤرتان تقعان على المحور السيني والعكس صحيح .

ملاحظة البؤرتين والرأسين يقعان على نفس المحور اما القطبين فيقعان على المحور الاخر

اذا كان القطع على محور السينات فان :-
$\begin{cases} y = 0 & \text{معادلة المحور الكبير} \\ x = 0 & \text{معادلة المحور الصغير} \end{cases}$

اذا كان القطع على محور الصادات فان :-
$\begin{cases} x = 0 & \text{معادلة المحور الكبير} \\ y = 0 & \text{معادلة المحور الصغير} \end{cases}$

ملاحظة لايجاد معادلة القطع الناقص نحتاج 1) موقع البؤرة 2) قيمة a^2 , b^2

س) في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين واحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي.

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$sol:$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$ وحدة طول المحور الكبير

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ وحدة طول المحور الصغير

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

$F_1(3,0)\ , F_2(-3\ ,0)$ البؤرتان

$V_1(5\ ,0)\ ,\quad V_2(-5\ ,0)$ الرأسان $\quad , e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$ الاختلاف المركزي

ملاحظة المعادلة القياسية يجب ان يكون طرفها الايمن يساوي (1) فاذا كان بعد اليساوي عدد صحيح (ليس كسرا) نقسم عليه المعادلة واذا كان بعد اليساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر

ملاحظة يجب ان تكون معاملات x^2 , y^2 هو الواحد الصحيح الموجب

$2)\ 4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

sol : $\left[4x^2+3y^2=\frac{4}{3}\right]*\frac{3}{4}\Rightarrow 3x^2+\frac{9y^2}{4}=1\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$

$a^2=\frac{4}{9}\Rightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow 2a=\frac{4}{3}$ وحدة طول المحور الكبير

$b^2=\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow 2b=\frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة طول المحور الصغير

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow\frac{4}{9}=\frac{1}{3}+c^2\Rightarrow c^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\Rightarrow c^2=\frac{1}{9}\Rightarrow c=\frac{1}{3}$

$F_1\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $F_2\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ البؤرتان , $V_1\left(0,\frac{2}{3}\right)$, $V_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ الرأسان ,

$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}<1$ الاختلاف المركزي

س1/ عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلاتها في كل مما يأتي: (تمرين 2-2)

a) $x^2+2y^2=1$

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2=1\Rightarrow a=1\Rightarrow 2a=2,\quad b^2=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

$c^2=a^2-b^2\Rightarrow c^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$F1(\frac{1}{\sqrt{2}},0)F2(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

$$V1(1,0), V2(-1,0)$$
$$M(0,\frac{1}{\sqrt{2}}), M2(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

b) $9x^2+13y^2=117] \div 117$

$$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2=13 \Rightarrow a=\sqrt{13} \Rightarrow 2a=2\sqrt{13}$$
$$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=13-9=4 \Rightarrow c=2$$

$$F1(2,0) F2(-2,0)$$
$$V1(\sqrt{13},0), V2(-\sqrt{13},0)$$
$$M1(0,3), M2(0,-3)$$
$$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{13}}<1$$

c) $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$V(h,k)=(4,-1)$$
$$a^2=81 \Rightarrow a=9$$
$$b^2=25 \Rightarrow b=5$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=81-25=56 \Rightarrow c=\sqrt{56}$$
$$F1(c+h,K)=(\sqrt{56}+4,-1)$$
$$F2(-c+h,k)=(-\sqrt{56}+4,-1)$$
$$V1(a+h,k)=(13,-1)$$
$$V2(-a+h,k)=(-5,-1)$$
$$M1(h,b+k)=(4,4)$$
$$M2(h,-b+k)=(4,-6)$$
$$2a=18 \Rightarrow y=k=-1$$
$$2b=10 \Rightarrow x=h=4$$
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{56}}{9}$$

الدكتور محمد الربيعي

d) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

$V(h,k)=(-3,-2)$

$a^2=25\Rightarrow a=5,\quad b^2=9\Rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2\Rightarrow c^2=25-9=16\Rightarrow c=4$

$F1(h,c+k)=(-3,2),F2(h,-c+k)=(-3,-6)$
$V1(h,a+k)=(-3,3),V2(h,-a+k)=(-3,-7)$
$M1(b+h,k)=(0,-2),M2(-b+h,k)=(-6,-2)$

$2a=10\Rightarrow x=h=-3,\quad 2b=6\Rightarrow y=k=-2,e=\frac{4}{5}$

e) $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

$9x^2-72x+16y^2-96y=-144$
$9(x^2-8x)+16(y^2-6y)=-144$

$9(x^2-8x+16)+16(y^2-6y+9)=-144+144+144$

$9(x-4)^2+16(y-3)^2=144\div 144\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$V(h,k)=(4,3)$

$a^2=16\Rightarrow a=4,b^2=9\Rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2\Rightarrow c^2=16-9=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$

$F1(c+h,k)=(\sqrt{7}+4,3),F2(-c+h,k)=(-\sqrt{7}+4,3)$

$V1(a+h,k)=(8,3),V2(-a+h,K)=(0,3)$
$M1(h,b+k)=(4,6),M2(h,-b+k)=(4,0)$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$f) x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$

$x^2 + 4x + 25y^2 - 150y = -204$

$x^2 + 4x + 25(y^2 - 6y) = -204$

$x^2 + 4x + 4 + 25(y^2 - 6y + 9) = -204 + 4 + 225$

$(x+2)^2 + 25(y-3)^2 = 25 \div 25 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$V(h,k) = (-2,3)$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 1 = 24 \Rightarrow c = \sqrt{24}$

$F1(c+h,k) = (\sqrt{24} - 2, 3), F2(-c+h,k) = (-\sqrt{24} - 2, 3)$

$V1(a+h,k) = (3,3), V2(-a+h,k) = (-7,3)$

$M1(h,b+k) = (-2,4), M2(h,-b+k) = (-2,2)$

$2a = 10 \Rightarrow y = k = 3$

$2b = 2 \Rightarrow x = h = -2$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{24}}{5}$

س) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان , $V_1(5,0)$ ومركزه نقطة الاصل $V_2(-5,0)$.

sol: $c = 3 \rightarrow c^2 = 9$, $a = 5 \rightarrow a^2 = 25$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \rightarrow b^2 = 25 - 9 \rightarrow b^2 = 16$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة القياسية $\rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

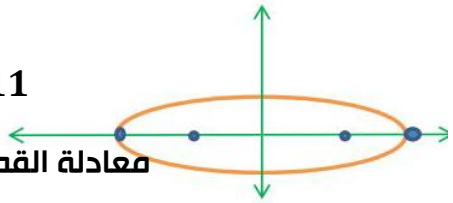
س2/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل في كل مما يأتي ثم ارسمه: (تمرين 2-2)

أ) البؤرتان هما النقطتان (5,0), (-5,0) وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة ؟

sol: $c = 5 \rightarrow c^2 = 25$, $2a = 12 \rightarrow a = 6 \rightarrow a^2 = 36$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 25 \rightarrow b^2 = 36 - 25 \rightarrow b^2 = 11$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة القياسية $\rightarrow$ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ معادلة القطع الناقص



ملاحظة

اذا لم يحدد موقع البؤرة نأخذ احتمالين 1) على محور السينات 2) على محور الصادات

د)لاختلاف المركزي $= \frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طولية .

sol : $2b = 12 \Rightarrow b = 6$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c$ ...(1 , $a^2 = b^2 + c^2$ ....(2

نعوض معادلة (1) في معادلة (2) $4c^2 = 36 + c^2$

$3c^2 = 36 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$, $a = 2c \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$

يوجد احتمالين للمعادلة لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

either $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

OR $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$ معادلة القطع الناقص

هـ)المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات , ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدة

sol: $2c = 8 \rightarrow c = 4 \rightarrow c^2 = 16$, $\frac{1}{2}(2b) = 3 \Rightarrow b = 3 \rightarrow b^2 = 9$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 9 + 16 \rightarrow a^2 = 25$

يوجد احتمالين للمعادلة لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

either $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

OR $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة

اذا كانت احدى بؤرتي القطع الناقص تبعد عن الرأسين ببعدين ,فان مجموعهما يمثل (2a) وفرقهما الموجب يمثل (2c)

س2/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل في كل مما يأتي ثم ارسمه: (تمرين 2-2)

ج) إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5,1 على الترتيب؟

Sol : $2a = 1 + 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$2c = 5 - 1 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 \Rightarrow b^2 = 5$

يوجد احتمالين للمعادلة لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

either $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ معادلة القطع الناقص

OR $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة

القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل يقطع من المحورين قطع مستقيمة تسمى المقطع السيني والمقطع الصادي حيث الاكبر بينهما تمثل طول المحور الكبير (2a) والاصغر بينهما يمثل طول المحور الصغير (2b)

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله 8 وحدات ومن محور الصادات جزءا طوله 12 وحدة , ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه .

Sol : $2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$, $2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

بما ان الجزء المقطوع من محور الصادات هو اكبر من محور السينات , لذا فان المحور الكبير والبؤرتين تقعان على محور الصادات.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = 16 + c^2 \Rightarrow c^2 = 36 - 16 \Rightarrow c^2 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

$2c = 4\sqrt{5}$ وحدة المسافة بين البؤرتين

$A = ab\pi \Rightarrow A = (6)(4)\pi = 24\pi$ وحدة مربعة مساحة منطقة القطع الناقص

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{36 + 16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} = 2\sqrt{26}\,\pi$ وحدة محيط القطع الناقص

س) لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $k \in R$.

sol : $[kx^2+4y^2=36] \div 36 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية , $a^2=\frac{36}{k}$, $b^2=9$, $c=\sqrt{3}$

$\rightarrow c^2=3$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow \frac{36}{k}=9+3 \Longrightarrow \frac{36}{k}=12 \Longrightarrow k=\frac{36}{12} \Rightarrow k=3$

س3/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص: (تمرين 2-2)

أ) بؤرتاه النقطتان $(0,\pm 2)$ ورأساه النقطتان $(0,\pm 3)$ ومركزه نقطة الأصل ؟

نفرض احداثي النقطة $P(x,y)$ ومن تعريف القطع الناقص

$PF1+PF2=2a$, $F1(0,2),F2(0,-2)$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}=6$

$\sqrt{x^2+y^2-4y+4}=6-\sqrt{x^2+y^2+4y+4}$ بتربيع الطرفين

$x^2+y^2-4y+4=36-12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}+(x^2+y^2+4y+4)$

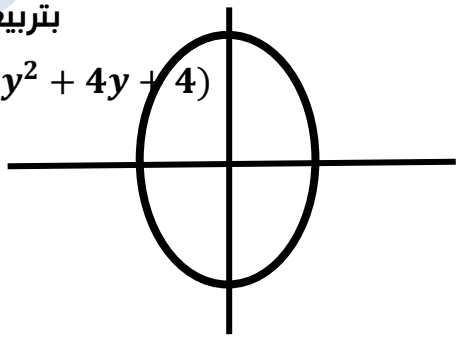
$12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}=36+8y] \div 4$

$3\sqrt{x^2+y^2+4y+4}=9+2y$ بتربيع الطرفين

$9(x^2+y^2+4y+4)=81+36y+4y^2$

$9x^2+9y^2+36y+36=81+36y+4y^2$

$9x^2+5y^2=45] \div 45 \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$



ب) المسافة بين البؤرتين (6) وحدات والعدد الثابت (10) والبؤرتان على محور السينات ومركزه نقطة الأصل؟

$2c=6 \div 2 \Rightarrow c=3$

$F(3,0),\quad F2(-3,0)P(x,y)$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=10$

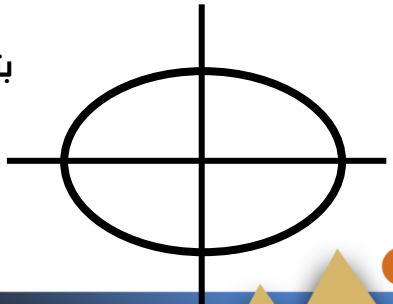
$\sqrt{x^2-6x+9+y^2}=10-\sqrt{x^2+6x+9+y^2}$

بتربيع الطرفين

$x^2-6X+9+y^2=100-20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}+x^2+6x+9+y^2$

$20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=100+12x] \div 4$

$5\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=25+3x$ بتربيع الطرفين

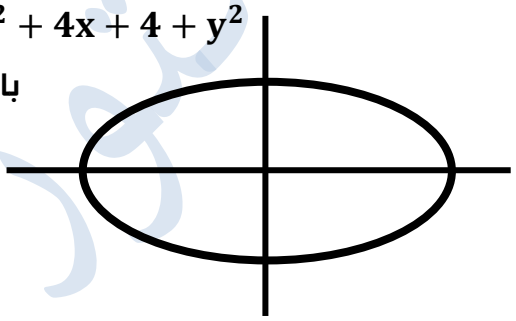


$$25(x^2+6x+9+y^2)=625+150x+9x^2$$
$$25x^2+150x+225+25y^2=625+150x+9x^2$$
$$16x^2+25y^2=400]\div 400 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

س) باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص بؤرتاه النقطتان $F_2(-2,0)\ ,F_1(2,0)$ والعدد الثابت = 6

الحل : لتكن النقطة $p(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص ، $F_1(2,0)$ ، $F_2(-2,0)$

$$PF_1+PF_2=2a \quad , \quad 2a=6 \ , \ c=2$$
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=6$$
$$\sqrt{x^2-4x+4+y^2}=6-\sqrt{x^2+4x+4+y^2}$$ بتربيع الطرفين
$$x^2-4x+4+y^2=36-12\sqrt{x^2+4x+4+y^2}+x^2+4x+4+y^2$$
$$12\sqrt{x^2+4x+4+y^2}=36+8x\ ]$$ بالقسمة على 4
$$3\sqrt{x^2+4x+4+y^2}=9+2x$$ بتربيع الطرفين
$$9(x^2+4x+4+y^2)=81+36x+4x^2$$
$$9x^2+36x+36+9y^2=81+36x+4x^2$$
$$[5x^2+9y^2=45]\div 45 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$ معادلة القطع الناقص



ملاحظة

كل نقطة تنتمي للقطع الناقص تحقق معادلته (نعوضها في معادلة القطع الناقص القياسية المناسبة) .

س4/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته : $y^2+8x=0$ علما بأن القطع يمر بالنقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ ؟ (تمرين 2-2)

Sol:- $y^2+8x=0\Rightarrow y^2=-8x \quad , y^2=-4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\Leftarrow$ في القطع المكافئ

$$4p=8\Rightarrow p=2$$

$F(-2,0)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$$c=2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ $\Leftarrow$ في القطع الناقص المعادلة القياسية للقطع الناقص هي

$$\frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\ ]*a^2b^2$$ $\Longleftarrow$ نعوض النقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ في المعادلة القياسية

$12b^2 + 3a^2 = a^2b^2$ ... ... (1

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4$ ... ... (2

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) $\Leftarrow$

$12b^2 + 3(b^2 + 4) = (b^2 + 4)b^2$

$12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$

$b^4 + 4b^2 - 12b^2 - 3b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^4 + 11b^2 - 12 = 0$

$(b^2 + 1)(b^2 - 12) = 0$, $(b^2 + 1) = 0$ يهمل

$(b^2 - 12) = 0 \Rightarrow b^2 = 12$ نعوضها في معادلة (1)

$a^2 = b^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة

اذا مر القطع الناقص بنقطتين نقوم بتعويض النقطتين في المعادلة القياسية المناسبة وكالاتي :

a) نعوض النقطة الاولى لنكون معادلة (1) ,

b) نعوض النقطة الثانية لنكون معادلة (2)

c) نحل المعادلتين انيا

س5/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (6,2) ,(3,4) ؟ (تمرين 2-2)

الحل : البؤرتان على محور السينات اذن المعادلة القياسية هي : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

نعوض النقطتين (6 , 2), (3 ,4) في المعادلة القياسية للقطع الناقص لانهما تحققان معادلته.

$\left[\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1\right] * a^2b^2 \rightarrow 36b^2 + 4a^2 = a^2b^2$ ... ... (1

نعوض النقطة $(6, 2)$ في المعادلة $\leftarrow$

$\left[\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1\right] * a^2b^2 \rightarrow 9b^2 + 16a^2 = a^2b^2$ ... ... (2

نعوض النقطة $(3, 4)$ في المعادلة $\leftarrow$

$36b^2 + 4a^2 = a^2b^2$

$\mp 9b^2 \mp 16a^2 = \mp a^2b^2$ بالطرح

$27b^2 - 12a^2 = 0 \rightarrow 27b^2 = 12a^2 \rightarrow b^2 = \frac{12}{27}a^2 \rightarrow b^2 = \frac{4}{9}a^2$ ... ... (3

نعوض معادلة (3) في معادلة (1) $\leftarrow$ $36\left(\frac{4}{9}a^2\right) + 4a^2 = a^2\left(\frac{4}{9}a^2\right)$

$16a^2 + 4a^2 = \frac{4}{9}a^4 \rightarrow 20a^2 = \frac{4}{9}a^4 \Rightarrow 20 \times 9 = 4a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{20 \times 9}{4} \rightarrow a^2 = 45$

$b^2 = \frac{4}{9} . (45) \rightarrow b^2 = 20$ ← a^2 نعوض قيمة في معادلة(3)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة

القطع الناقص (يقطع , يمر , يمس) بنقطة احد احداثيها يساوي صفر فان النقطة اما رأس او قطب (فاذا كانت النقطة تطابق البؤرة تمثل الرأس a اما اذا كانت تخالف البؤرة فانها تمثل القطب b)

ملاحظة

اذا مر القطع الناقص بنقاط على المحاور$(x , 0) , (0 , y)$ (أي احد الاحداثيات يساوي صفر) فنستنتج ما يلي :-

1) الاحداثي الكبير يمثل قيمة a (الرأس) (تأخذ القيمة بدون اشارة)

2) الاحداثي الصغير يمثل قيمة b (القطب) (تاخذ القيمة بدون اشارة)

س) جد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(0 , 3) , (-4 , 0)$

$sol : a = 4 \Rightarrow a^2 = 16 \quad , b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

بما ان الرأس يقع على محور السينات , اذن البؤرة تقع على محور السينات

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة

كل يقطع عند $x = \pm$, $y = \pm$ هذا يمثل اما a او b حسب موقع البؤرة وتاخذ موجبة

س2/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل في كل مما يأتي ثم ارسمه: (تمرين 2-2)

ب) البؤرتان هما $(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$ ؟

الحل :- بما ان البؤرتان تقعان على محور الصادات فان نقطتي تقاطعه مع محور السينات تمثل القطبين

$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4 \ , b = 4 \Rightarrow b^2 = 16 \ , a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$

$\therefore \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة

لايجاد نقط تقاطع مستقيم او منحني مع محور السينات نجعل y=0 لنحسب قيمة x ونكتب النقطة (x ,0) , وكذلك لايجاد نقط تقاطع مستقيم او منحني مع محور الصادات نجعل x=0 لنحسب قيمة y ونكتب النقطة (0 ,y)

ملاحظة

اذا مس القطع الناقص دليل القطع المكافئ فيوجد احتمالين :-

1) في حالة تطابق البؤر (المكافئ والناقص) فان الدليل يساوي قيمة a .

2) في حالة اختلاف البؤر (المكافئ والناقص) فان الدليل يساوي قيمة b .

س6) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$ ؟ (تمرين 2-2)

الحل : في المنحني $x^2+y^2-3x=16$ عندما $x=0$ فان

$y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4$, $(0,4),(0,-4)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow$ $c=4$

$y^2=12x$, $y^2=4px$ المعادلة القياسية , $4p=12 \Rightarrow p$

$=3$ في القطع المكافئ

$x=-3$ معادلة الدليل $\Rightarrow$ $(-3,0)$ نقطة التماس $\in$ للقطع الناقص

$b=3$ لان البؤرتين تقعان على محور الصادات والنقطة تقع على محور السينات

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=9+16 \Rightarrow a^2=25$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ معادلة القطع الناقص

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع المحورين الاحداثيين.

Sol : $if\ x=0 \Rightarrow -y=8 \Rightarrow y=-8$ $\Rightarrow$ نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0,-8)$

$if\ y=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$ $\Rightarrow$ نقطة التقاطع مع محور السينات $(4,0)$

$\therefore (0,-8),(4,0) \in$ للقطع الناقص $\Rightarrow$ $a=8$, $b=4$ والبؤرتان تقعان على محور الصادات

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$ معادلة القطع الناقص

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$, وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

sol : $y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$,

في القطع المكافئ $\Leftarrow$ المعادلة القياسية $y^2 = 4px$

بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص $F(3,0)$ $4p = 12 \Rightarrow p = 3$

في القطع الناقص $\Leftarrow$ $c = 3$, $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

ملاحظة

عندما يعطي في السؤال النسبة بين محوري القطع الناقص فهناك حالتان :

1) اذا كان البسط اكبر من المقام (مثلا $\frac{5}{4}$) فالنسبة تكون $(\frac{2a}{2b})$ لانه $a > b$ في القطع الناقص

2) اذا كان البسط اصغر من المقام (مثلا $\frac{3}{5}$) فالنسبة تكون $(\frac{2b}{2a})$.

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $2x^2 = 32y$, والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{3}$.

Sol : $2x^2 = 32y \,] \div 2 \Rightarrow x^2 = 16y$ في القطع المكافئ

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $, 4p = 16 \Rightarrow p = 4$

بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص $F(0.4)$

في القطع الناقص $\Leftarrow$ $, c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$ بؤرتا القطع الناقص هما $(0,4), (0,-4)$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{3}$ ..... (1

$a^2 = b^2 + c^2$ ..... (2

نعوض معادلة (1) في معادلة (2) $\left(\frac{5b}{3}\right)^2 = b^2 + 16$

$\frac{25b^2}{9} = b^2 + 16] * 9 \Rightarrow 25b^2 = 9b^2 + 144 \Rightarrow 16b^2 = 144$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$, $a = \frac{5(3)}{3} = 5 \Rightarrow a^2 = 25$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات , والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة . (2005 د1)

sol : $2c = 6 \rightarrow c = 3$

$2a - 2b = 2 \rightarrow a - b = 1 \rightarrow a = b + 1$ ... ... (1 , $a^2 = b^2 + c^2$ ... ... (2

$(b+1)^2 = b^2 + 9$ نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$b^2 + 2b + 1 = b^2 + 9 \rightarrow 2b = 8 \rightarrow b = 4$ ← (1) تعوض في معادلة

$a = 4 + 1 \rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة

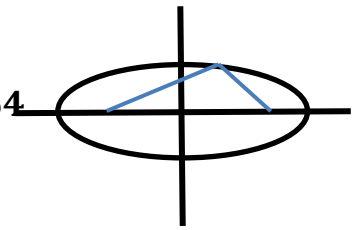
محيط المثلث = (مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة) لذا فأن محيط المثلث QF_1F_2 هو :

$$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 2a + 2c$$

$QF_1 + QF_2 = 2a$, $F_1F_2 = 2c$ لاحظ ان

س10/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F2(-4,0), F1(4,0)$ والنقطة Q وتنتمي اليه بحيث أن محيط المثلث QF1F2 يساوي (24) ؟ (تمرين 2-2)

Sol : $c = 4$



$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$

$2a + 2c = 24 \Rightarrow 2a + 8 = 24 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 64 - 16 \Rightarrow b^2 = 48$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ معادلة القطع الناقص

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان إلى محور السينات ومركزة نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محورة الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (2-) ؟ (تمرين 2-2)

الحل : في القطع المكافئ $y^2+8X=0$ عند $x=-2$ فان

$y^2-16=0 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm4$, $(-2,4),(-2,-4)\in$ للقطع الناقص

$2a=2(2b)\Rightarrow 2a=4b \Rightarrow a=2b$ في القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\Leftarrow a=2b$ وعن $(-2,4)$ نعوض احدى النقطتين في المعادلة القياسية ولتكن

$\frac{4}{(2b)^2}+\frac{16}{b^2}=1\Rightarrow \frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1\Longrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1$

$\frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=17 \Rightarrow b=\sqrt{17} \Rightarrow a=2b \Rightarrow a=2\sqrt{17} \Rightarrow a^2=68$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1$ معادلة القطع الناقص

س9/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة؟ (تمرين 2-2)

sol: $x^2=24y$, $x^2=4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

في القطع المكافئ ←

$4p=24\rightarrow p=6$, $(0,6)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$(0,6),(0,-6)$ بؤرتي القطع الناقص , $c=6$ في القطع الناقص ←

$2a+2b=36]\div 2\rightarrow a+b=18\rightarrow a=18-b$ ... ... (1 , $a^2=b^2+c^2$ ... ... (2

$(18-b)^2=b^2+36$ نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$324-36b+b^2=b^2+36 \rightarrow 36b=324-36$

$36b=288\rightarrow b=8$, $a=18-b\rightarrow a=18-8\rightarrow a=10$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ معادلة القطع الناقص

س8/ قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h, k \in R$؟ (تمرين 2-2)

Sol : $y^2 = 4\sqrt{3}x \;, y^2 = 4px$ المعادلة القياسية , $4p = 4\sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{3}$ في القطع المكافئ

$(\sqrt{3}, 0)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\Rightarrow c = \sqrt{3}$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60 \Rightarrow [4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$

$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \quad \ldots\ldots (1$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots (2$

نعوض معادلة *(1)* في معادلة *(2)*

$15 - b^2 = b^2 + 3 \Rightarrow 2b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 6$

$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$

$[hx^2 + ky^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1 \;, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$= 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = \frac{36}{h} \Rightarrow 9 = \frac{36}{h} \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow h = 4 \;, b^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow 6 = \frac{36}{k} \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow k = 6$

الدكتور محمد الربيعي

تحويل الكلام الى صيغ رياضية

1- مجموع طولي محوريه $2a+2b$

2- مجموع مربعي طولي محورية $(2a)^2+(2b)^2$

3- مجموع طول محوره الالكبير ونصف طول محوره الصغير $2a+\frac{1}{2}(2b)$

4- الفرق بين طولي محوريه $2a-2b$

5- طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير بمقدار 4 . $2a-2b=4$

6- طول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير $2a=2(2b)$

6- طول محوره الكبير ثلاثة امثال طول محوره الصغير $2a=3(2b)$

7- البعد البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله $2c=2p$

8- النسبة بين طولي محوريه $\frac{\text{اكبر}}{\text{اصغر}}=\frac{2a}{2b}$, $\frac{\text{اصغر}}{\text{اكبر}}=\frac{2b}{2a}$

9- النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين بؤرتين $\frac{2a}{2c}$

10- النسبة بين البعد بين البؤرتين الى طور محوره الصغير $\frac{2c}{2b}$

11- جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $p_{\text{مكافئ}}=c_{\text{ناقص}}$

س4/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان إلى محور السينات ومركزة نقطة الأصل ومساحته 7π وحدة مربعة ومحيطة 10π وحدة ؟(تمارين عامة)

$$A=a.b\pi \Rightarrow 7\pi=a.b\pi \Rightarrow a=\frac{7}{b} \dots\dots(1$$

$$p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}]\div 2\pi$$

$$5=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \text{بتربيع الطرفين} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2}=25$$

$$a^2+b^2=50 \dots\dots\dots(2$$

$$\frac{49}{b^2}+b^2=50](*b^2) \Rightarrow \quad 49+b^4=50b^2$$

$$b^4-50b^2+49=0 \quad \Rightarrow (b^2-49)(b^2-1)=0$$

اما $b^2=49\Rightarrow b=7$ تهمل

او $b^2=1\Rightarrow b=1$

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{1}=1$$

ملاحظة

اذا تساوى بسطي كسرين اعتياديين فأن اكبرهما هو الاصغر مقاما

س) قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة k. (1د 2008)

$\text{sol: } 2c = 2\sqrt{3} \rightarrow c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$

$[4x^2 + 2y^2 = k] \div k \rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$,

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = \frac{k}{2}$, $b^2 = \frac{k}{4}$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \left[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3\right] \times 4 \rightarrow 2k = k + 12 \rightarrow k = 12$

س) اذا كانت $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه (0 , d) وطول محوره الكبير يساوي $2\|e + id\|$. (2014 د4 انبار)

$\text{sol : } e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{4+4i+2i+2i^2}{1+1} = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$

$e + id = 1 + 3i$, $e = 1$, $d = 3$ تساوي عددين مركبين

$(0 , d) = (0 , 3)$ احدى بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$2\|e + di\| = 2\|1 + 3i\| = 2\sqrt{(1)^2 + (3)^2} = 2\sqrt{1 + 9} = 2\sqrt{10} = 2a$

$2a = 2\sqrt{10} \rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = 10$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 10 = b^2 + 9 \rightarrow b^2 = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1$ معادلة القطع الناقص

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20π وحدة مساحة. (2010 د1)

$sol: y^2 - 16x = 0 \rightarrow y^2 = 16x \ , \quad y^2 = 4px$ بالمقارنة مع القياسية القطع المكافئ

$4p = 16 \rightarrow p = 4 \rightarrow (4,0)$ بؤرة القطع المكافئ ← في القطع المكافئ

$(4,0) \in$ للقطع الناقص , $\text{either } a = 4 \quad \text{OR} \quad b = 4$ ← في القطع الناقص

$A = ab\pi \Rightarrow ab\pi = 20\pi \rightarrow ab = 20$

$\text{if } a = 4 \rightarrow 4b = 20 \rightarrow b = 5$ تهمل لان(a)دائما اكبر من(b)في القطع الناقص

$\text{if } b = 4 \rightarrow 4a = 20 \rightarrow\rightarrow a = 5$

بما ان القطب يقع على محور السينات فأن البؤرتين والرأسين يقعان على محور الصادات .

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص

س) جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة انقلاب الدالة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$ وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدتا طول . (2017 د3 احيائي داخل)

sol : $f(x) = (x+2)(x-1)^2 = (x+2)(x^2 - 2x + 1)$

$\acute{f}(x) = (x+2)(2x-2) + (x^2 - 2x + 1)(1)$

$\acute{f}(x) = 2x^2 - 2x + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 3$

$\bar{\bar{f}}(x) = 6x \ , \bar{\bar{f}}(x) = 0 \ , 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 2 \quad \Rightarrow (0,2)$ نقطة انقلاب مرشحة ---------- 0 +++++++++

$\bar{f}(x)$اشارة

$\{x: x > 0\}$ الدالة مقعرة عند , $\{x: x < 0\}$ الدالة محدبة عند ⟷ تحدب تقعر

$(0,2)$ نقطة انقلاب وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$c = 2 \ , 2a = 12 \Rightarrow a = 6$ ⇐ في القطع الناقص

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 32$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

انسحاب محاور القطع الناقص:

أولا: معادلة القطع الناقص الذي مركزة النقطة (h,k) وبؤرتاه تنتميان إلى محور السينات:

المعادلة $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

البؤرتان $2)F1(c+h,k),F2(-c+h,k)$

الرأسان $3)V1(a+h,k),V2(-a+h,k)$

القطبان $4)M1(h,b+k),M2(h,-b+k)$

2a= طول المحور الكبير ⟹ معادلته y=k

2b= طول المحور الصغير ⟹ معادلته x=h

ثانيا: معادلة القطع الناقص الذي مركزة النقطة (h,k) وبؤرتاه تنتميان الى محور الصادات

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

$2)F1(h,c+k),F2(h,-c+k)$

$3)V1(h,a+k),V2(h,-a+k)$

$4)M1(b+h,k),M2(-b+h,k)$

5) 2a= ⟹ معادلته x=h

6) 2b= ⟹ معادلته y=k

ملاحظة

اولاً:نجد h,k وتمثل احداثي المركز $o(h,k)\Leftarrow h$ مع القوس x وk مع القوس y نأخذهما بعكس الاشارة

ثانياً:نجد a^2,b^2 من المعادلة القياسية باستخدام القانون العام ادناه: $a^2=b^2+c^2$

ثالثا: نجد مطاليب السؤال

مثال/ جد احداثيات البؤرتين والرأسين والقطبين معادلة كل من المحورين للقطع الناقص

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1 \text{ ؟}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$V(h,k)=(2,1)$$

$$a^2=25\Rightarrow a=5 \quad - \quad b^2=9\Rightarrow b=3$$

$$c^2=a^2-b^2\Rightarrow c^2=25-9=16\Rightarrow c=4$$

البؤرتان

$$\overline{F_1}\,(h,C+k)\Rightarrow \overline{F_1}(2,4+1)\Rightarrow \overline{F_1}(2,5)$$

$$\overline{F_2}(h,-c+k)\Rightarrow \overline{F_2}\,(2,-4+1)\Rightarrow \overline{F_2}(2,-3)$$

الرأسان

$$\overline{V_1}\,(h,a+k)\Rightarrow \overline{V_1}\,(2,5+1)\Rightarrow \overline{V_1}\,(2,6)$$

$$\overline{V_2}(h,-a+k)\Rightarrow \overline{V_2}(2,-5+1)\Rightarrow \overline{V_2}(2,-4)$$

القطبان

$$\overline{M_1}\,(b+h,k)\Rightarrow \overline{M_1}\,\,(3+2,1)\Rightarrow \overline{M_1}\,\,(5,1)$$

$$\overline{M_2}\,(-b+h,k)\Rightarrow \overline{M_2}(-3+2,1)\ \text{Ma}\ (-1,1).$$

طول المحور الكبير $=\ 2a\ =2\,(5)=10$ وحدة طول

طول المحور الصغير $=\ 2b=2\,(3)=\ 6$ وحدة طول

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0.8$

معادلة المحور الكبير $x=h\Rightarrow x=2$

معادلة المحور الصغير $y=k\Rightarrow y=1$

مثال /عين كل من البؤرتين والراسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي

$$\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

$h=4, k=-1 \Rightarrow o(h,k) o(4,-1)$ مركز

$a^2=81 \Rightarrow a=9$

$b^2=25 \Rightarrow b=5$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=\sqrt{4x14}$

$c=2\sqrt{14}$

البؤرتان

$\overline{F_1}(C+h,k) \Rightarrow (2\sqrt{14}+4,-1)$

$\overline{F_2}(-c+h,k) \Rightarrow (-2\sqrt{14}+4,-1)$

الرأسان

$\overline{V_1}(a+h,k) \Rightarrow \overline{V_1}(9+4,-1) \Rightarrow \overline{V_1}(13,-1)$

$\overline{V_2}(-a+h,k) \Rightarrow \overline{V_2}(-9+4,-1) \Rightarrow \overline{V_2}(-5,-1)$

القطبان

$\overline{M_1}(h,b+k) \Rightarrow \overline{M_1}(4,5-1) \Rightarrow \overline{M_1}(4,4)$

$\overline{M_2}(h,-b+k) \Rightarrow \overline{M_2}(4,-5-1) \Rightarrow \overline{M_2}(4,-6).$

طول المحور الكبير $=2a=2(9)=18$ وحدة طول

طول المحور الصغير $2b=2(5)=10$ وحدة طول

معادلة المحور الكبير $y=k \Rightarrow y=-1$

طول المحور الصغير $x=h \Rightarrow x=4$

ملاحظة

اذا اعطى معادلة غير مرتبة بالشكل القياسي (تحتاج ترتيب)

1. نفتح قوسين ونضع بالأول X وجماعتها وفي القوس الثاني y وجماعتها وبين القوسين نضع +العدد = (yوجماعتها) + (Xوجماعتها)
2. نسحب معامل X^2 وعامل y^2 عامل مشترك
3. نضيف ^{2}(نصف بعامل x) للقوس الذي يحوي جماعة x
ونضيف ^{2}(نصف بعامل y) للقوس الذي جماعة y
نضيف ^{2}(نصف معامل) بعد ضربها بالعدد الموجود خارج القوس (العام المشتركة) الى الطرف الثاني الي يحتوي العدد
4. رابعاً : نحلل كل قوس باستخدام طريقة المربح الكامل كالتالي: $(\dots \pm \cdots)^2$

جذر اول — اشارة الوسط — جذر الاخير

5. نقسم على العدد الذي في الطرف الثاني لكي نصبح المعادلة قياسية.

مثال 3 / جد البؤرتين والراسين والقطبين وطول ومعادلة طل من المحورين للقطع الناقص الذي معادلته

$$9x^2 + 16y^2 - 72y - 96y + 144 = 0$$

$$(9x^2 - 72x) + (16y^2 - 96y) = -144$$
$$9(x^2 - 8x) + 16(y^2 - 6y) = -144$$
$$9(x^2 - 8x + 16) + 16(y^2 - 6y + 9) = -144 + 4 + 144$$
$$[9(x-4)^2 + 16(y-3)^3 = +144] \div 144$$
$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$h = 4, k = 3 \Rightarrow o(h,k) o(4,3)$ المركز

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} \Rightarrow \sqrt{7}$$

$$\overline{F_1}(C+h,k) \Rightarrow \overline{F_1}(-\sqrt{7}+4,3)$$
$$\overline{F_2}(-c+h,k) \Rightarrow \overline{F_2}(-\sqrt{7}+4,3)$$

$$\overline{V_1}(a+h,k) \Rightarrow \overline{V_1}(4+4,3) \Rightarrow \overline{V_1}(8,3)$$
$$\overline{V_2}(-a+h,k) \Rightarrow \overline{V_2}(4+4,3) \Rightarrow \overline{V_2}(0,3)$$

$$\overline{M_1}(h,b+k) \Rightarrow \overline{M_1}(4,3+3) \Rightarrow \overline{M_1}(4,6)$$
$$\overline{M_2}(h,-b+k) \Rightarrow \overline{M_2}(4,-3+3) \Rightarrow \overline{M_2}(4,0)$$

وحدة طول $2a = 2\,(4) = 8$ طول المحور الكبير

$= 2\,(3) = 6$ طول المحور الصغير

$y = k \Rightarrow y = 3$ معادلة المحور الكبير

$X = h \Rightarrow X = 4$ معادلة المحور الصغير

مثال 4/ ناقش خصائص القطع التالي $x^2 + 25y + 4x - 150y + 204 = 0$

$$(x^2 + 4x) + (25y^2 - 150y) = -204$$
$$1(x^2 + 4x) + 25\,(y^2 - 6y) = -204$$
$$(x + 4 + 4) + 25\,(y^2 - 6y + 9) = -204 + 4 + 225$$

$$[(x+2)^2 + 25\,(y-3)^2 = 25\,] \div 25 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$
$$h = -2\,, k = 3 \Rightarrow o\,(h\,, k) \Rightarrow o\,(-2, 3)$$
$$a^2 = 25 \quad a = 5 \qquad b^2 = 1 \quad b = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{F_1}\,(C + h, k) \Rightarrow F\,(2\sqrt{6} - 2, 3)$$
$$\overline{F_2}\,(-c + h, k) \Rightarrow \overline{F_2}\,(-2\sqrt{6} - 2, 3)$$

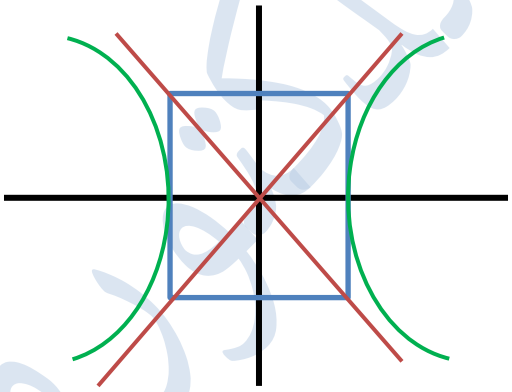
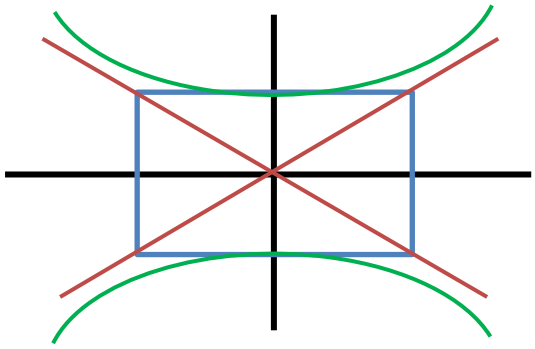
$$\overline{V_1}\,(a + h.k) \Rightarrow \overline{V_1}\,(5 - 2, 3)\,V, (3, 3)$$
$$\overline{V_2}\,(-a + h, k) \Rightarrow \overline{V_2}(5 - 2, 3) \Rightarrow \overline{V_2}\,(-7, 3)$$

$$\overline{M_1}\,(h, b + k) \Rightarrow \overline{M_1}\,(-2, 1 + 3) \Rightarrow]\overline{M_1}\,(-2, 4)$$
$$\overline{M_2}\,(h, -b + k) \Rightarrow \overline{M_2}\,(-2, -1 + 3) \Rightarrow \overline{M_2}\,(-2, 2)$$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ الاختلاف المركزي

القطع الزائد

وهو مجموعة نقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعديها عن نقطتين معلومتين تسمى البؤرتين يساوي عددا ثابتا (2a) .

اولا :- قطع زائد بؤرتاه تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .	ثانيا :- قطع زائد بؤرتاه تقعان على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل .
	
المعادلة : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ البؤرتين : $F_1(c,0)\ ,\ F_2(-c,0)$ الرأسين : $V_1(a,0)\ ,\ V_2(-a,0)$ القطبين : $M_1(0,b)\ ,\ M_2(0,-b)$	المعادلة : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ البؤرتين : $F_1(0,c)\ ,\ F_2(0,-c)$ الرأسين : $V_1(0,a)\ ,\ V_2(0,-a)$ القطبين : $M_1(b,0)\ ,\ M_2(-b,0)$

- طول المحور الحقيقي (العدد الثابت)(البعد بين الرأسين) = 2a
- طول المحور التخيلي (المرافق) = 2b
- البعد(المسافة) بين البؤرتين = 2c
- العلاقة بين a ,b ,c هي $c^2=a^2+b^2$ حيث $c>b\ ,c>a$.
- الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}>1$ ويكون اكبر من واحد دائما .

طريقة رسم القطع الزائد:-

لتكن $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ معادلة قطع زائد بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ولرسم هذا القطع نتبع ما يلي :

1) نعين الرأسين $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$

2) نعين القطبين $M_1(0,b)$, $M_2(0,-b)$

3) نكون مستطيل من هذه النقاط الاربعة اضلاعه موازية للمحورين الاحداثيين .

4) نرسم قطري المستطيل واللذان يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحني القطع الزائد .

5) نعين البؤرتين ثم نرسم ذراعي القطع الزائد .

ملاحظة في القطع الزائد تتغير اماكن x , y وليس a , b

ملاحظة اذا كانت اشارة x^2 موجبة فالبؤرة تقع على محور السينات واذا كانت اشارة y^2 موجبة فالبؤرة تقع على محور الصادات

ملاحظة يجب ان يكون الطرف الايمن يساوي 1 ومعامل x^2 , y^2 يساوي 1

س) عين البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم ارسمه.

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

sol : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

طول المحور الحقيقي $a^2=64 \Rightarrow a=8 \Rightarrow 2a=16$ وحدة

طول المحور المرافق $b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=12$ وحدة

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=64+36 \Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$

بؤرتا القطع الزائد هما $F_1(10,0)$, $F_2(-10,0)$

قطبا القطع الزائد هما $M_1(0,6)$, $M_2(0,-6)$ رأسا القطع الزائد هما $V_1(8,0)$, $V_2(-8,0)$

س 1 /عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة:
(تمرين 3-2)

1) $12x^2 - 4y^2 = 48$

sol: $[12x^2 - 4y^2 = 48] \div 48 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ طول المحور الحقيقي

$b^2 = 12 \rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{3}$ طول المحور المرافق

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$

$V_1(2,0), V_2(-2,0)$ الرأسان هما , $F_1(4,0), F_2(-4,0)$ البؤرتان هما

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$ الاختلاف المركزي

2) $16x^2 - 9y^2 = 144$ (2006 تمهيدي , 2014 نازحين)

sol: $[16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ طول المحور الحقيقي

$b^2 = 16 \rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ طول المحور المرافق

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

$V_1(3,0), V_2(-3,0)$ الرأسان هما , $F_1(5,0), F_2(-5,0)$ البؤرتان هما

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ الاختلاف المركزي

c) $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8 \div 8$

$V(h,k) = (1,-1)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$

$F1(h, c+k) = (1, \sqrt{6} - 1), F2(h, -c+k) = (1, -\sqrt{6} - 1)$

$V1(h, a+k) = (1,1), V2(h, -a+k) = (1,-3)$

$2a = 4, 2b = 2\sqrt{2}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

$16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 2y) = 185$

$16(x^2 + 10x + 25) - 9(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9$

$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 576 \quad \div 576$

$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1 \Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$V(h,k) = (-5,1)$

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow c = 10$

$F1(c+h,k) = (5,1), F2(-c+h,k) = (-15,1)$

$V1(a+h,k) = (1,1), V2(-a+h,k) = (-11,1)$

2a= 12 وحدة , 2b= 16 وحدة

$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

ملاحظة

اذا لم يحدد موقع البؤرة ناخذ احتمالين 1) على محور السينات 2) على محور الصادات

س2/ أكتب معادلة القطع الزائد في الحالات التالية ثم أرسم القطع: (تمرين 3-2)

ب) طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الأصل؟

Sol : $2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36 \quad , \quad 2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

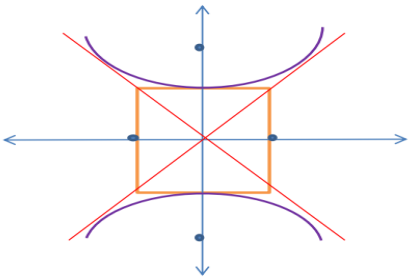
يوجد احتمالان لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

$either \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الزائد

$OR \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$ معادلة القطع الزائد

س2/ أكتب معادلة القطع الزائد في الحالات التالية ثم أرسم القطع: (تمرين 3-2)

ج) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محورة المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) ؟



sol: $2b = 2\sqrt{2} \rightarrow b = \sqrt{2} \rightarrow b^2 = 2$

$e = \frac{c}{a} \rightarrow 3 = \frac{c}{a} \rightarrow c = 3a$ ... ... (1 , $c^2 = a^2 + b^2$ ... ... (2

نعوض معادلة (1) في معادلة (2) $9a^2 = a^2 + 2 \rightarrow 8a^2 =$

$2 \rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$ معادلة القطع الزائد

س) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي = 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات .

sol: $2a = 6 \rightarrow a = 3$, $e = \frac{c}{a} \rightarrow 2 = \frac{c}{3} \rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 36 = 9 + b^2 \rightarrow b^2 = 27$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ معادلة القطع الزائد

س) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه هما النقطتان : $F_2(0, -\sqrt{8})$, $F_1(0, \sqrt{8})$.

sol: $2b = 4 \rightarrow b = 2$, $c = \sqrt{8}$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 8 = a^2 + 4 \rightarrow a^2 = 4$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$ معادلة القطع الزائد

ملاحظة

لاحظ ان a , b في القطع الزائد قد يكون أي واحد منهما هو الاكبر كذلك يمكن ان يكونان متساويان , وفي حالة تساوي كل من a , b (أي ان طول المحور الحقيقي = طول المحور التخيلي) ويسمى هذا القطع بأسم قطع زائد قائم او (متساوي الاضلاع) ويكون فيه المستطيل المركزي مربع كذلك الاختلاف المركزي له = $\sqrt{2}$

ملاحظة

لو فرضنا ان النقطة (x , y) تقع على القطع الزائد فمن تعريف القطع الزائد نجد ان :

$$|pF_1 - pF_2| = 2a \quad \rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

س3/ جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(2\sqrt{2},0),(-2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة لفرق بعدي أي نقطة من نقاطه عن البؤرتين تساوي (4) وحدات؟ (تمرين 3-2)

Sol : $|PF1 - PF2| = 2a$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+8+y^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2-4\sqrt{2}x+8+y^2 = 16 \pm 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2} + x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2$$

$$\pm 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2} = 16+8\sqrt{2}x] \div 8$$

$$\pm\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2} = 2+\sqrt{2}x$$ بتربيع الطرفين

$$x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2 = 4+4\sqrt{2}x+2x^2$$

$$-x^2+y^2 = -4] \div -4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$ معادلة القطع الزائد

س4/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5})$, $(1,-2\sqrt{5})$, جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ؟ (تمرين 3-2) (1997 د1 , 2014 د1 , 2013 د2)

الحل :- القطع المكافئ يمر بنقطتان متناظرتان حول المحور السيني الموجب , لذا فان بؤرته تقع على المحور السيني الموجب و المعادلة القياسية هي $y^2 = 4px$

نعوض احدى النقطتين في المعادلة القياسية ولتكن النقطة $(1,2\sqrt{5})$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4p(1) \Rightarrow 20 = 4p \Rightarrow p = 5 \quad , \quad y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 20x$$ معادلة القطع المكافئ

بؤرة القطع المكافئ وهي احدي بؤرتي القطع الزائد $(5,0)$

$(5,0),(-5,0)$ بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow \quad c=5 \ , 2a=6 \Rightarrow \ a=3 \Rightarrow a^2=9$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الزائد

ملاحظة

اذا كان احد رأسي قطع زائد يبعد عن البؤرتين ببعدين فأن مجموعهما يمثل (2c) وفرقهما الموجب يمثل (2a)

س6/ أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل إذا علمت أن أحد رأسية يبعد عن البؤرتين بالعددين 1,9 على الترتيب إذا علمت أن محوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين. (تمرين 3-2). (2015 تمهيدي)

sol : $2c = 1 + 9 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5$

$2a = 9 - 1 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 16 + b^2 \rightarrow b^2 = 9$

يوجد احتمالان لعدم تحديد موقع البؤرة :

either $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

or $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

س5/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمتي h,k ؟ (تمرين 3-2)

بالنسبة للقطع الناقص

$9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow c = \sqrt{28}$

$F1(\sqrt{28}, 0) F2(-\sqrt{28}, 0)$ ∴ بؤرتي القطع الناقص هما

بالنسبة للقطع الزائد

∴ بما أن بؤرتي القطع الزائد هما بؤرتي القطع الناقص نفسه

$F1(\sqrt{28}, 0) F2(-\sqrt{28}, 0)$

$c = \sqrt{28}$

$2a = 6\sqrt{2}] \div 2 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$

$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18 = \frac{90}{h} \Rightarrow h = 5$ بما ان

$b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = 9$ بما ان

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه = $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل ؟ (تمرين 3-2) . (2000 د2 , 2013 د3 , 2007 تمهيدي , 2014 د4 انبار)

بالنسبة للقطع الزائد $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow c = 4$

$\therefore$ بؤرتي القطع الزائد هما $F1(4,0), F2(-4,0)$

بالنسبة للقطع الناقص بما أن بؤرتي القطع الزائد هما بؤرتي القطع الناقص

$\therefore F1(4,0), F2(-4,0) \Rightarrow c = 4$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5b] \div 3 \Rightarrow a = \frac{5}{3}b \ldots\ldots (1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = \frac{25}{9}b^2 - b^2](*9) \Rightarrow 144 = 25b^2 - 9b^2$

$144 = 16b^2] \div 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

نعوض في معادلة (1) $\Leftarrow$ $a = \frac{5}{3}(3)$ $\Leftarrow$ $a = 5$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

ملاحظة في القطع الزائد (يقطع او يمر او يمس) نقطة احد احداثيها يساوي صفر تمثل راسا (a) دائما

ملاحظة كل يقطع عند رقم $y = \pm$ او رقم $x = \pm$ هذا الرقم هو a

س2/ أكتب معادلة القطع الزائد في الحالات التالية ثم أرسم القطع: (تمرين 3-2)

أ) البؤرتان هما النقطتان $(\pm 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ ومركزه نقطة الأصل ؟

الحل : بما ان القطع الزائد يتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ فان $a = 3$

$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$, $c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 9 + b^2 \rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

ملاحظة اذا مر القطع الزائد ببؤرة القطع الناقص تكون راسا a

س) جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$. (2003 د2 , 2009 د2)

sol : $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1 \ , \ a^2=49 \ , \ b^2=24$ ⇐ في القطع الناقص

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 49=24+c^2 \rightarrow c^2=25 \rightarrow c=5$

$(\pm 5 \ , 0)$ بؤرتي القطع الناقص والتي تنتمي الى القطع الزائد

$a=5$ ← في القطع الزائد

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{4} \rightarrow 4c=5b \rightarrow c=\frac{5b}{4} \ldots\ldots(1 \quad , \quad c^2=a^2+b^2 \ldots\ldots(2$

$\left[\frac{25b^2}{16}=25+b^2\right]\times 16 \rightarrow 25b^2=400+16b^2$ نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$9b^2=400 \rightarrow b^2=\frac{400}{9}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$ معادلة القطع الزائد

ملاحظة

اذا مس القطع الزائد مركزه نقطة الاصل دليلا قطعا مكافئا فان نقطة التماس حتما تمثل الرأس (a)

س9/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ : $x^2+12y=0$ ؟ (تمرين 3-2) . (2001 د1 , 2014 د2 , 2009 تمهيدي)

بالنسبة للقطع الناقص: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \leftarrow \quad c^2=a^2-b^2$

$c^2=25-9=16 \Rightarrow c=4 \Rightarrow F1(0,4), F2(0,-4)$

بالنسبة للقطع الزائد: بما أن بؤرتي القطع الزائد هما بؤرتي القطع الناقص

$\therefore F1(0,4), F2(0,-4) \Rightarrow c=4$

بالنسبة للقطع المكافئ:

$x^2=-12y$

$x^2=-4py \qquad -4p=-12] \div -4 \Rightarrow p=4$

$\therefore$ نقطة التماس هي (0,3) مع المحور تمثل قيمة $a=3$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=9+b^2 \Rightarrow b^2=7$

$\therefore \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

ملاحظة اذا مس مستقيم قطع ناقص فان نقطة التماس تمثل رأس او قطب القطع الناقص , اما اذا مس مستقيم قطع زائد فان نقطة التماس تمثل الرأس فقط

س) جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي يساوي (4) وحدات . (2007 تمهيدي)

الحل : نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات يكون فيها $y = 0$

$if\ y = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$, $(4, 0)$ احدى بؤرتي القطع الزائد , $c = 4$ للقطع الزائد

$2b = 4 \rightarrow b = 2$, $c^2 = a^2 + b^2$

$16 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 16 - 4 \rightarrow a^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ معادلة القطع الزائد

ملاحظة اذا اعطى نقطة (x, y) واحد الاحداثيات مجهول نعوض النقطة بالمعادلة ونجد الاحداثي المجهول

ملاحظة تسمى المسافة بين البؤرة واية نقطة من نقط القطع الزائد بنصف القطر البؤري , ولايجاد نصف القطر البؤري نحتاج نقطة وبؤرة ثم نطبق قانون المسافة .

نصف القطر البؤري في الجهة اليمنى $pF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$

نصف القطر البؤري في الجهة اليسرى $pF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$

س8/ النقطة P (6, L) تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلا من: أ) قيمة L. ب) طول نصف القطر البؤري المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة p؟ (تمرين 2-3) (1999 د1, 2010 تمهيدي).

نعوض النقطة P (6, L) في معادلة القطع الزائد $36 - 3L^2 = 12$

$-3L^2 = 12 - 36 \Rightarrow -3L^2 = -24] \div -3 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm\sqrt{8}$

$\therefore P1(6, \sqrt{8}), P2(6, -\sqrt{8}) \in$ للقطع الزائد

$x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow c = 4$

$\overline{P1F1} = p1(6, \sqrt{8})F1(4, 0)$

$P1F1 = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} = \sqrt{(6 - 4)^2 + (\sqrt{8} - 0)^2}$

$P1F1 = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

س) عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة . (2005 د2)

sol : $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1\ ,\ a^2=3\ ,\quad b^2=1$

$c^2=a^2+b^2=3+1\rightarrow c^2=4\ \rightarrow c=2\ ,\ F_1(2\ ,0)$ البؤرة اليمنى للقطع الزائد

let $p(x\ ,y)\in$ للقطع الزائد , $\quad pF_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ بتربيع الطرفين $\rightarrow \left[x^2-4x+4+y^2=\frac{1}{3}\right]*3$

$3x^2-12x+12+3y^2=1\ \rightarrow 3x^2-12x+11+3y^2=0$ ... ... (1

$\left[\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1\right]*3\ \rightarrow x^2-3y^2=3\ \rightarrow 3y^2=x^2-3$ ... ... (2

$3x^2-12x+11+x^2-3=0$ نعوض معادلة(2) في معادلة (1)

$4x^2-12x+8=0\rightarrow x^2-3x+2=0\ \rightarrow (x-1)(x-2)=0$

either $x=1\ ,\ 3y^2=1-3\ \rightarrow 3y^2=-2$ تهمل

or $\quad x=2\ ,\quad 3y^2=4-3\rightarrow 3y^2=1\rightarrow y^2=\frac{1}{3}\rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ (2\ ,\frac{1}{\sqrt{3}})\ ,(2\ ,-\frac{1}{\sqrt{3}})\in$ للقطع الزائد

س) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x\ ,\ y^2=-20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة . (2001 د2)

sol : $y^2=20x\ ,y^2=4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\Rightarrow\ 4p=20\ \rightarrow p=5$

$y^2=-20x\ ,y^2=-4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\Rightarrow\ 4p=20\ \rightarrow p=5$

$(\pm5\ ,0)$ بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد

$2a-2b=2]\div 2\ \rightarrow a-b=1\ \rightarrow a=b+1$ ... ... (1 ← في القطع الزائد

$c^2=a^2+b^2$ ... ... (2 , $c=5$

$25=(b+1)^2+b^2\ \rightarrow 25=b^2+2b+1+b^2$ نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$2b^2+2b-24=0]\div 2\ \rightarrow b^2+b-12=0\ \rightarrow (b+4)(b-3)=0$

$(b+4)=0$ يهمل

$b=3\ ,a=3+1=4\ ,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \rightarrow\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الزائد

س) جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ ويقطع من محور السينات جزءا طوله 12 وحدة . (2009 د1)

sol : $[9x^2 - 16y^2 = 144] \div 144 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ← في القطع الزائد

$a^2 = 16 \ , b^2 = 9 \ , \quad c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 16 + 9 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

بؤرتي القطع الزائد $(0 \ , 5) \ , (0 \ , -5)$

في القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل $b = 5$ OR $a = 5$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات = 12 فأن

$2a = 12 \rightarrow a = 6$ OR $2b = 12 \rightarrow b = 6$

نقوم بأخذ احتمال واحد من كل احتمالين لينتج $b = 5$, $a = 6$

بما ان القطبين يقعان على محور الصادات فأن البؤرتين والرأسين يقعان على محور السينات

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

ملاحظة

اذا ذكر في السؤال قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الاخر (أي بمعنى كل منهما يمر ببؤرة الاخر) , في هذه الحالة نستنتج ان بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد .

س3/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل. كل منهما يمر ببؤرة الآخر فاذا كانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة القطع الناقص فجد : (تمارين عامة)

أ) مساحة القطع الناقص ب) محيط القطع الناقص. ج) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه. د) الاختلاف المركزي لكل منهما.

بالنسبة للقطع الناقص:

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

∴ بؤرتي القطع النا قص هما $F1(4, 0), F2(-4, 0)$

أ) $A = a \cdot b\pi = 5(3)\pi = 15\pi$

ب) $p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{34}{2}} = 2\pi\sqrt{17}$

بالنسبة للقطع الزائد: بما أن بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد

$\therefore V1(4,0), V2(-4,0) \Rightarrow a = 4$

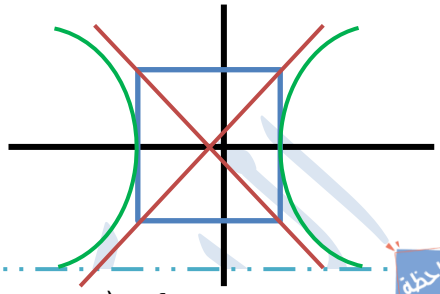
بما أن رأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$ للزائد

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$ للناقص



ملاحظة

اذا طلب في السؤال (جد معادلة قطع مخروطي) فهذا القطع يمكن ان يكون قطع (مكافئ او ناقص او زائد) حسب المعلومات في السؤال .

ملاحظة

الاختلاف المركزي للقطع المكافئ $e = 1$, وللقطع الناقص $e < 1$, وللقطع الزائد $e > 1$

ملاحظة

في القطع الناقص $a > b , c$, في القطع الزائد $c > a , b$

س) جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه $(-5 , 0)$ واحد رأسيه $(3 , 0)$. (2004 د1)

sol : $(-5 , 0) = (-c , 0) \rightarrow c = 5$, $(3 , 0) = (a , 0) \rightarrow a = 3$

$\therefore c > a$ فأن القطع المخروطي هو قطع زائد

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 9 + b^2 \rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

س) جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي 3 ويمر بالنقطة $(2 , 0)$. (2016 تمهيدي)

الحل :- بما ان الاختلاف المركزي اكبر من 1 فان القطع المخروطي هو قطعا زائدا

** اذا مر القطع الزائد بنقطة تقع على احد المحورين وكان مركزه نقطة الاصل فانها تمثل الرأس (a)

$a = 2$, $e = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 32$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$ بما ان الراس يقع على محور الصادات فان معادلة القطع الزائد هي

ملاحظة

المعادلة القياسية للدائرة $x^2+y^2+ax+by+c=0$

مركز الدائرة (h,k) $\quad h=\frac{-a}{2}\ ,\ k=\frac{-b}{2}$

نصف قطر الدائرة $r=\sqrt{h^2+k^2-c}$

س) جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة $x^2+y^2-16y+15=0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة ؟ (2018 د3 احيائي داخل)

$sol: x^2+y^2-16y+15=0$

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ بعد المقارنة بالصورة القياسية

$h=\frac{-a}{2}=\frac{0}{2}=0\ ,k=\frac{-b}{2}=\frac{16}{2}=8$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}=7$

$(h,k)=(0,8)$ مركز الدائرة $\Rightarrow$ $(0,\pm 8)$ بؤرتي القطع الزائد $\Rightarrow c=8$

$\frac{1}{2}(2b)=r\Rightarrow b=7\ ,c^2=a^2+b^2\Rightarrow a^2=15$

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ \Rightarrow\ \frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{49}=1$

س) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1$ ومجموع طولي محوريه الحقيقي والتخيلي يساوي 28 وحدة . (2019 د2 احيائي)

sol : $a^2=164\ ,b^2=64$

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 164=64+c^2\Rightarrow c^2=164-64=100\ \ ,c=10$

بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $F_1(10,0)\ ,F_2(-10\ ,0)$

$2a+2b=28]\ \div 2\Rightarrow a+b=14\Rightarrow a=14-b$ ..... (1 , $c^2=a^2+b^2$ ..... (2

$100=(14-b)^2+b^2\Rightarrow 100=196-28b+b^2+b^2$

$2b^2-28b+96=0]\div 2\Rightarrow b^2-14b+48=0$

$(b-8)(b-6)=0\ \Rightarrow either\ b=8\ ,a=6\ \ OR\ b=6\ ,a=8$

معادلات القطع الزائد $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

انسحاب محاور القطع الزائد:

للتطبيقي

أولاً: معادلة القطع الزائد الذي مركزة النقطة (h,k) وبؤرتاه تنتميان إلى محور السينات:

المعادلة $1)\ \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

البؤرتان $2)F1(c+h,k),F2(-c+h,k)$

الرأسان $3)V1(a+h,k),V2(-a+h,k)$

القطبان $4)M1(h,b+k),M2(h,-b+k)$

$5)2a\Rightarrow$ معادلته y=k

$6)2b\Rightarrow$ معادلته x=h

ثانيا: معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (h,k) وبؤرتاه تنتميان إلى محور الصادات.

$1)\ \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

$2)F1(h,c+k),F2(h,-c+k)$

$3)V1(h,a+k),V2(h,-a+k)$

$4)M1(b+h,k),M2(-b+h,k)$

$5)\ 2a\Rightarrow x=h$

$6)\ 2b\Rightarrow y=k$

مثال 1/ جد احداثيات المركز والراسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

$a^2=9\Rightarrow a=3$

$b^2=4\Rightarrow b=2$

$c^2=a^2+b^2=9+4=13\Rightarrow c=\sqrt{13}$ بالجذر

$h=-2\ ,\quad k=1\quad o\ (h,k)\Rightarrow(-2,1)$

$\overline{F_1}\ (C+hk)\Rightarrow\overline{F_1}(\sqrt{13}-2,1$

$\overline{F_2}\ c+h.k)\Rightarrow\overline{F_2}(-\sqrt{13}-2,1)$

$\overline{V_1}(a+h,k)\Rightarrow\overline{V_1}(3-2,1)\Rightarrow\overline{V_1}\ (1,1)$

$\overline{V_2}(-a+h.k)\Rightarrow\overline{V_2}(-3-2,1)\Rightarrow\overline{V_2}(-5,1)$

طول المحور الحقيقي $2a=6$ وحدة

طول المحور المرافق $2b=4$ وحدة

الاختلاف المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$

مثال 2/ عين المركز وبؤرتا وراسا القطع الزائد الاتي ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي :

$$2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8 \div 8$$

$$[2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 - 8] \div 8$$

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

$$k = -1, h = 1 \quad o(h,k) = (1,-1)$$

$$\overline{F_1}(h.c + k) \Rightarrow (1, \sqrt{6} - 1)$$

$$\overline{F_2}(h - c + k) \Rightarrow (1, -\sqrt{6} - 1)$$

$$\overline{V_1}(h, a + k) \Rightarrow \overline{V_1}(1, 2 - 1) \Rightarrow \overline{V_1}(1,1)$$

$$\overline{V_2}(h - a + k) \Rightarrow \overline{V_2}(1, -2 - 1) \Rightarrow \overline{V_2}(1,-3)$$

طول المحور الحقيقي $2a = 4$ وحدة

طول المحور المرافق $2b = 2\sqrt{2}$ وحدة

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$

مثال 3/ جد البؤرتين والراسين والمركز وطول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته :

$$16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$$

$$(16x^2 + 160x) + (-9y^2 + 18y) = 185$$

$$16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 2y) = 185$$

$$16(x^2 + 10x + 25) - 9(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9$$

$$[16(x^2 + 5)^2 - 9(y^2 - 1)^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \quad b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow c = 10$$

$$h - 5, k = 1 \quad o(h,k) \Rightarrow (-5,1)$$

$$\overline{F_1}(C + h.k) \Rightarrow \overline{F_1}(10 - 5, 1) \Rightarrow \overline{F_1}(5,1)$$

$$\overline{F_2}(-c + h, k) \Rightarrow \overline{F_2}(-10 - 5, 1) \Rightarrow \overline{F_2}(-15,1)$$

$$\overline{V_1}(a + h.k) \Rightarrow \overline{V_1}(6 - 5, 1) \Rightarrow \overline{V_1}(1,1)$$

$$\overline{V_2}(-a + h, k) \Rightarrow \overline{V_2}(-6 - 5, 1) \Rightarrow \overline{V_2}(-11,1)$$

طول المحور الحقيقي $2a = 12$ وحدة

طول المحور المرافق $2b = 16$ وحدة

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} => 1$

بعض وزاريات الفصل الثاني

س) قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6\ ,3)$ جد قيمة h. (2008 تمهيدي)

الحل : البؤرة تقع على محور السينات الموجب والمعادلة القياسية للقطع هي $y^2 = 4hx$

$\frac{1}{4}y^2 = hx \rightarrow$

$\therefore x = -6$ معادلة الدليل $\rightarrow F(6\ ,0)$ بؤرة القطع المكافئ $\rightarrow p = 6$

$y^2 = 4px \rightarrow y^2 = 4(6)x \rightarrow y^2 = 24x$ معادلة القطع المكافئ , $y^2 = 4hx$

$4h = 24 \rightarrow h = 6$ بالمقارنة نحصل على

س) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة (4, 1) ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة . (2004 د2)

الحل : بما ان النقطة تقع في الربع الاول وبؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات الموجب فأن معادلته هي

$y^2 = 4px \rightarrow 16 = 4p \rightarrow p = 4 \rightarrow y^2 = 16x$ معادلة القطع المكافئ

$2yy` = 16 \rightarrow y` = \frac{16}{8} = 2 = m$ ميل المماس للمنحني , $(1\ ,4)$ نقطة التماس

$(y - y_1) = m(x - x_1) \rightarrow (y - 4) = 2(x - 1)$ معادلة المماس

س) النقطة $(\frac{1}{3}\ ,2)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص.(1999 د2)

الحل : النقطة $(\frac{1}{3}\ ,2)$ تنتمي للقطع المكافئ اذن تحقق معادلته

$y^2 = 4px \rightarrow 4 = 4p\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow 12 = 4p \rightarrow p = 3 \rightarrow (3\ ,0)$ بؤرة القطع المكافئ

$y^2 = 12x$: معادلة القطع المكافئ هي

$\therefore (3\ ,0)\ ,(-3\ ,0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 3$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \rightarrow 4a = 5b \rightarrow a = \frac{5b}{4}$ ..... (1 , $a^2 = b^2 + c^2$ ..... (2

$(\frac{5b}{4})^2 = b^2 + 9 \rightarrow \left[\frac{25b^2}{16} = b^2 + 9\right] .16$ نعوض معادلة (1) في معادلة (1)

$25b^2 = 16b^2 + 144 \rightarrow 9b^2 = 144 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

$a = \frac{5b}{4} \rightarrow a = \frac{5(4)}{4} \rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

س) جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير يساوي ثلاثة امثال طول محوره الصغير . (2010 تمهيدي)

sol : $y^2 = -8x \ , y^2 = -4px$ بالمقارنة مع القياسية للقطع المكافئ

في القطع المكافئ ←

$4p = 8 \rightarrow p = 2 \rightarrow (-2 , 0)$ بؤرة القطع المكافئ

$(\pm 2 , 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 2$ ← في القطع الناقص

$2a = 3(2b) \rightarrow a = 3b$ ..... (1 , $a^2 = b^2 + c^2$ ..... (2

نعوض معادلة(1) في معادلة (2) :

$9b^2 = b^2 + 4 \rightarrow 8b^2 = 4 \rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a = 3b \rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2x^2}{9} + \frac{2y^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

س) اذا كانت $Ky^2 + 3x^2 = Z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم

$2x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علما ان مساحة منطقته $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد قيمتي K , Z (2010 د2)

sol : if $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{3} \rightarrow (0 , \sqrt{3}) \in$ القطع الناقص ← في المستقيم

بما ان البؤرة تقع على محور السينات لذا فأن القطب يقع على محور الصادات وان $b = \sqrt{3}$

$ab\pi = 2\sqrt{3}\pi \rightarrow \sqrt{3}a\pi = 2\sqrt{3}\pi \rightarrow a = 2$

$[ky^2 + 3x^2 = z] \div z \rightarrow \frac{y^2}{\frac{Z}{K}} + \frac{x^2}{\frac{Z}{3}} = 1 \rightarrow a^2 = \frac{Z}{3} \ , b^2 = \frac{Z}{K}$

$4 = \frac{Z}{3} \rightarrow Z = 12 \ , \quad 3 = \frac{12}{K} \rightarrow K = 4$

س) قطع ناقص رأساه $(\pm 5\ ,\ 0)$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والمار دليله بالنقطة $(-3\ ,\ 4)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص .(2012 خارج)

الحل : بما ان رأسي القطع الناقص يقعان على محور السينات فأن بؤرتيه تقعان على محور السينات ايضا , أي ان بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات ايضا .

ولان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3\ ,\ 4)$ فأن معادلة الدليل هي $X = -3$

المعادلة القياسية للقطع المكافئ $y^2 = 4px$, بؤرة القطع المكافئ $\rightarrow p = 3$ $F(3\ ,\ 0)$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 12x$

في القطع الناقص $\leftarrow$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 3$ $(\pm 3\ ,\ 0)$

رأسي القطع الناقص $\rightarrow a = 5$ $(\pm 5\ ,\ 0)$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 25 = b^2 + 9 \rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

س) جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$ ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند $x = -2$.(2013 خارج)

الحل : في القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند $= -2$ فأن $y^2 + 8(-2) \rightarrow\ y^2 - 16 = 0$

للقطع الناقص $\in (-2\ ,\ 4), (-2\ ,\ -4)$ $y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

في القطع الناقص $\leftarrow$ $\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a = 2(2b) \rightarrow a = 2b$ ..... (1

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{17}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 17 \rightarrow b = \sqrt{17}$, $a = 2b \rightarrow a = 2\sqrt{17}$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة. (2012 د2)

sol : $A = ab\pi \rightarrow 24\pi = ab\pi \rightarrow ab = 24$

الجزء المقطوع من محور السينات اما يمثل المحور الكبير (2a) او يمثل المحور الصغير (2b) .

$if\ 2a = 8 \rightarrow a = 4\ ,\ ab = 24 \rightarrow 4b = 24 \rightarrow b = 6$ تهمل

$if\ 2b = 8 \rightarrow b = 4\ ,\ ab = 24 \rightarrow 4a = 24 \rightarrow a = 6$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات يمثل المحور الصغير فأن البؤرتين والرأسين يقعان على محور الصادات أي ان معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ملاحظة

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله = 2p

س) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله $+24x = 0$ اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi\ cm^2$. (2016 د1)

sol: $y^2 + 24x = 0 \rightarrow y^2 = -24x$, $y^2 = -4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$4p = 24 \rightarrow p = 6$

$2p = 12$ تمثل المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله

$2c = 2p \rightarrow 2c = 12 \rightarrow c = 6$ في القطع الناقص

$$A = ab\pi \rightarrow 80\pi = ab\pi \rightarrow ab = 80 \rightarrow a = \frac{80}{b}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow (\frac{80}{b})^2 = b^2 + 36 \rightarrow \frac{6400}{b^2} = b^2 + 36\ ] . b^2$$

$$6400 = b^4 + 36b^2 \rightarrow b^4 + 36b^2 - 6400 = 0 \rightarrow (b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0$$

$b^2 + 100 = 0$ يهمل

$$b^2 - 64 = 0 \rightarrow b^2 = 64 \rightarrow b = 8\ ,\quad a = \frac{80}{8} = 10$$

ناخذ احتمالين لعدم تحديد موقع بؤرة القطع الناقص

either $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

OR $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ معادلة القطع الناقص

س) جسر على شكل قطع ناقص , المسافة بين نهايتي قاعدته (24 m) وارتفاعه (9 m) جد ارتفاع الجسر عند النقطة التي تبعد عن بدايته (6 m) . (2014 تمهيدي خارج)

الحل : نفرض ان مركز الجسر هو نقطة الاصل فيكون طول الجسر الافقي هو المحور الكبير للقطع الناقص وارتفاعه هو نصف المحور الصغير $2a = 24 \rightarrow a = 12 \ , \ b = 9$

وعلى اعتبار ان أي نقطة تقع على القطع الناقص تحقق معادلته فأن النقطة التي تبعد عن بداية الجسر (6m) هي النقطة التي تبعد عن نقطة الاصل (6 m) ايضا,اي ان احداثيها السيني يساوي (6)والمطلوب الارتفاع الذي يمثل الاحداثي الصادي للنقطة .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \rightarrow \ \frac{36}{144}+\frac{y^2}{81}=1 \rightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{81}=1 \rightarrow \frac{y^2}{81}=1-\frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{81}=\frac{3}{4} \rightarrow y^2=\frac{243}{4} \rightarrow y=\frac{9\sqrt{3}}{2} \ m$$

س) اذا كانت $\frac{11+2i}{1+2e}=d+ie$ جد معادلة القطع الناقص الذي رأسه نقطة الاصل و احدى بؤرتيه (0 , e) وطول محوره الكبير يساوي $2\|d+ie\|$ (2018 د2 احيائي داخل)

$sol:$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ معادلة القطع الناقص

س) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور الصادات ومساحته 32π وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $1/2$. (2015 د2)

س) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2+9y^2=36$ والنسبة بين محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$ ونطبق محوراه على المحورين الاحداثيين. (2002 د2)

sol: $[x^2+9y^2=36] \div 36 \ \rightarrow \ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1 \ , \ a^2=36 \rightarrow a=6$

في القطع الزائد $\leftarrow$ $c=6$, رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 6 \ , 0)$

$$\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2} \rightarrow c=2a \rightarrow 6=2a \rightarrow a=3$$

$$c^2=a^2+b^2 \rightarrow 36=9+b^2 \rightarrow b^2=27$$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ \rightarrow \ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ معادلة القطع الزائد

س) قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ علما ان محوريهما على المحورين الاحداثيين. (د2004 , د2006 , د2008 , د2014)

الحل : نلاحظ ان بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد .

$sol: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \ , \ a^2=25 \rightarrow a=5 \ , b^2=9 \rightarrow b=3$ ← في القطع الناقص

$c^2=a^2-b^2 \rightarrow c^2=25-9=16 \rightarrow c=4$

$(4,0) \ , \ (-4,0)$ بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد

$(5,0) \ , \ (-5,0)$ رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد

$a=4 \ , c=5$ ← في القطع الزائد

$c^2=a^2+b^2 \rightarrow 25=16+b^2 \rightarrow b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الزائد

س) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$. (2008 تمهيدي)

$sol: \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ معادلة القطع الزائد

س) جد معادلة القطع الناقص والزائد اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما تقعان على المحور السيني وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}m$ وطول المحور الحقيقي يساوي 6 m. (2014 تمهيدي خارج)

الحل : في القطع الناقص $2a=6\sqrt{2} \rightarrow a=3\sqrt{2}$

في القطع الزائد $2a=6 \rightarrow a=3$ وبما انهما كا منهما يمر ببؤرتي الاخر فأن رأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد وبؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد وعليه فأن

$a=3\sqrt{2} \ , c=3 \ , a^2=b^2+c^2 \rightarrow 18=b^2+9 \rightarrow b^2=9$ ← في القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الناقص

$c=3\sqrt{2} \ , a=3 \ , c^2=b^2+a^2 \rightarrow 18=b^2+9 \rightarrow b^2=9$ ← في القطع الزائد

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الزائد

س) ليكن $5y^2-4x^2=k$ قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $4y-\sqrt{5}x=0$ جد قيمة k
(2015 د2 , 2005 د1 , 2008 د1) .

sol ; $4y-\sqrt{5}x^2=0 \rightarrow 4y=\sqrt{5}x^2 \rightarrow x^2=\frac{4}{\sqrt{5}}y$,

$x^2=4py$ ← في القطع المكافئ

$4p=\frac{4}{\sqrt{5}} \rightarrow p=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ بؤرة القطع المكافئ

$\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ بؤرتي القطع الزائد , $c=\frac{1}{\sqrt{5}}$

← في القطع الزائد

$[5y^2-4x^2=k] \div k \rightarrow \frac{y^2}{\frac{k}{5}}-\frac{x^2}{\frac{k}{4}}=1$, $a^2=\frac{k}{5}$, $b^2=\frac{k}{4}$

$c^2=a^2+b^2 \rightarrow \left[\frac{1}{5}=\frac{k}{5}+\frac{k}{4}\right] * 20 \rightarrow 4=4k+5k \rightarrow 9k=4 \rightarrow k=\frac{4}{9}$

س) جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2-16x=0$ ومجموع بعدي اي نقطة من نقاطه عن البؤرتين يساوي 24 وحدة . (2017 د1 تطبيقي داخل)

** ومجموع بعدي اي نقطة من نقاطه عن البؤرتين $2a=24$

sol : $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{128}=1$

س) جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $36x^2+11y^2=396$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرته على محور الصادات ويمر دليله بالنقطة $(4,7)$ (2017 د1 تطبيقي داخل)

** اذا مر القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل بنقطة تقع على احد المحورين فانها تمثل الرأس حتما على عكس القطع الناقص فانها تمثل اما الرأس او القطب حسب موقع البؤرة

sol : $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$

س) جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2-24x=0$ ودليله , كما ان بؤرتيه تمر برأسي القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ (2017 د2 احيائي خارج)

** طول محوره الحقيقي يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله $2a=2p$

sol : $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

س) النقطة $p(h\,,2\sqrt{2})$ تنتمي للقطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=2h$ ومركزه نقطة الاصل ,جد قيمة h الحقيقية الموجبة , ثم جد طول نصف القطر البؤري الاول والثاني المرسومين من نقطة p ؟(2018 د1 خارج)

الحل : اذا مر القطع الزائد بنقطة فانها تحقق معادلته

$$h^2-3(8)=2h$$

نعوض النقطة $(h\,,2\sqrt{2})$ في معادلة القطع الزائد المعطاة في السؤال $\Leftarrow$

$$h^2-2h-24=0 \Rightarrow (h-6)(h+4)=0$$

$either \quad h=-4$ تهمل لانه ذكر ان العدد حقيقي موجب $, or \quad h=6$

$$x^2-3y^2=12\ ] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$a^2=12\ , b^2=4\ ,\ c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$$

البؤرة اليسرى للقطع الزائد $F_1(-4\,,0)$, البؤرة اليمنى للقطع الزائد $F_1(4\,,0)$

pF_1 هو طول نصف القطر البؤري من الجهة اليمنى (الاول)

pF_2 هو طول نصف القطر البؤري من الجهة اليسرى (الثاني)

$$pF_1=\sqrt{(6-4)^2+(\sqrt{8}-0)^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$pF_2=\sqrt{(6+4)^2+(\sqrt{8}-0)^2}=\sqrt{100+8}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$$

س) جدارية على شكل قطع ناقص طول قاعدته 24 m واعلى نقطة ارتفاع لها تساوي 9m , جد ارتفاع العمود الموضوع على بعد 6m من بداية قاعدته . (2017 د3 تطبيقي داخل)

الحل : نفرض ان مركز الجدارية هو نقطة الاصل فيكون طول الجدارية الافقي هو المحور الكبير للقطع الناقص وارتفاعها هو نصف المحور الصغير $, = 9 \quad 2a=24 \Rightarrow a=12$

**اي نقطة تقع على القطع الناقص تحقق معادلته فان النقطة التي تبعد عن بداية قاعدة الجدارية 6m هي النقطة التي تبعد عن نقطة الاصل 6m ايضا اي ان احداثيها السيني يساوي 6 والمطلوب الارتفاع الذي يمثل الاحداثي الصادي للنقطة .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{144}+\frac{y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{81}=1-\frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{81}=\frac{3}{4} \Rightarrow y^2=\frac{243}{4} \Rightarrow y=\frac{9\sqrt{3}}{2}\ m$$

س) يدور القمر حول الارض في مدار على صورة قطع ناقص سيني البؤرتين . تقع الارض في احدى بؤرتيه فاذا كانت اطول مسافة بين الارض والقمر 90 KM واقصر مسافة بينهما $10\ km$ جد الاختلاف المركزي للقطع (2016 د2 خارج)

sol : $2a = 90 + 10 \Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow a = 50$

$2c = 90 - 10 \Rightarrow 2c = 80 \Rightarrow c = 40$

$e = \frac{c}{a} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

الدكتور محمد الربيعي

الفصل الثالث : التفاضل

$$y = f(x) \rightarrow y` = \frac{dy}{dx} = f`(x)$$ ← المشتقة الاولى

$$y`` = \frac{d^2y}{dx^2} = f``(x)$$ ← المشتقة الثانية

$$y``` = \frac{d^3y}{dx^3} = f```(x)$$ ← المشتقة الثالثة

وعلى هذا المنوال يمكن ايجاد مشتقات متتالية , وبدءا من المشتقة الثانية يطلق على هذه المشتقات بالمشتقات العليا (Higher Dervatives) وتكتب المشتقة من الرتبة n كما يأتي :

$$y^n = \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$$

ومن تعريف المشتقات العليا يتضح لنا ان :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

قواعد الاشتقاق للدوال الجبرية

1) if $y = a \Rightarrow y` = 0$ مشتقة الثابت = صفر

2) if $y = x^n \rightarrow y` = nx^{n-1}$ مشتقة حد مرفوع الى اس (نضرب الاس بالمعامل ونطرح من الاس واحد)

ملاحظة ال n هنا اما تكون عدد موجب صحيح او عدد سالب صحيح او كسر

3) if $y = ax^n \rightarrow y` = anx^{n-1}$ ← مشتقة ثابت في دالة

4) if $y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y` = f`(x) \pm g`(x)$ ← مشتقة مجموع او طرح عدة دوال

5) if $y = f(x).g(x) \rightarrow y` = f(x).g`(x) + g(x).f`(x)$ ← مشتقة حاصل ضرب دالتين

مشتقة حاصل ضرب دالتين = (الاولى × مشتقة الثانية) + (الثانية × مشتقة الاولى)

6) if $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y` = \frac{g(x).f`(x) - f(x).g`(x)}{[g(x)]^2}$ ← مشتقة حاصل قسمة دالتين

مشتقة الدالة الكسرية = $\frac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} - \text{مشتقة البسط} \times \text{المقام}}{(\text{المقام})^2}$

7) $y = [f(x)]^n \rightarrow y` = n[f(x)]^{n-1}.f`(x)$ ← مشتقة قوس مرفوع الى اس

س) جد مشتقة كل مما يأتي :

1) $y = 6 \rightarrow y` = 0$

2) $y = x \Rightarrow y` = 1$

3) $y = x^5 \rightarrow y` = 5x^4$

ملاحظة

كل x^n بالمقام ترفع للبسط وبعدها نشتق , وبعد الاشتقاق اذا كان الاس سالب ننزله للمقام

4) $y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y = x^{-3} \Rightarrow y` = -3x^{-4} \Rightarrow y` = \frac{-3}{x^4}$

5) $y = x^{-7} \rightarrow y` = -7x^{-8} = \frac{-7}{x^8}$

6) $y = \sqrt{x} \rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y` = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ملاحظة

مشتقة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\text{نفس الجذر}}} \Longleftarrow y = \sqrt{g(x)} \Rightarrow y` = \frac{g`(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

مشتقة الدالة الجذرية :-

1) نحول الجذر الى اس كسري حسب العلاقة $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

2) نجد المشتقة حسب القواعد الخمسة

3) نتخلص من الاس السالب حسب القاعدة $x^{-\frac{a}{b}} = \frac{1}{x^{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}$

ملاحظة

اذا كان الاس كسر عندما نطرح واحد نتبع ما يلي :-

1) الاس كسر موجب يكون الجواب كالاتي $\frac{\text{البسط} - \text{المقام}}{\text{المقام نفسه}}$

2) الاس كسر سالب يكون الجواب كالاتي $\frac{-(\text{البسط} + \text{المقام})}{\text{المقام نفسه}}$

7) $y = 5x^3 \rightarrow y` = 15x^2$

8) $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 9 \rightarrow y` = 3x^2 - 8x + 3$

9) $y = x^3 - \frac{4}{x^2} + 4 \rightarrow y = x^3 - 4x^{-2} + 4 \rightarrow y` = 3x^2 + 8x^{-3} = 3x^2 + \frac{8}{x^3}$

10) $y = (x^2 - 3)(4x + 5) \rightarrow y` = (x^2 - 3) * 4 + (4x + 5) * 2x$

$y` = 4x^2 - 12 + 8x^2 + 10x \rightarrow y` = 12x^2 + 10x - 12$

11) $y = \frac{2x^2 - 1}{3x + 2} \rightarrow y` = \frac{(3x + 2).4x - (2x^2 - 1).3}{(3x + 2)^2}$

$y` = \frac{12x^2 + 8x - 6x^2 + 3}{(3x + 2)^2} = \frac{6x^2 + 8x + 3}{(3x + 2)^2}$

12) $y = (x^3 - 4)^5 \rightarrow y` = 5(x^3 - 4)^4 . 3x^2 = 15x^2(x^3 - 4)^4$

ملاحظة

مشتقة قوس مرفوع الى اس = الاس ينزل × القوس نفسه منقوص من اس القوس واحد × مشتقة داخل القوس

$$13)\ y=\sqrt{(x^2+4)^3} \rightarrow y=(x^2+4)^{\frac{3}{2}}$$

$$y`=\frac{3}{2}(x^2+4)^{\frac{1}{2}}.2x \rightarrow y`=3x\sqrt{x^2+4}$$

ملاحظة

نستخدم الاشتقاق المباشر كما في الاسئلة اعلاه اذا كانت الدالة صريحة أي صورتها $y=f(x)$ اما اذا كانت تحمل غير هذه الصورة فيتم اشتقاقها ضمنيا كما في السؤال ادناه .

ملاحظة

في الاشتقاق الضمني نشتق جميع الحدود وعند اشتقاق المتغير y نضيف $\bar{y}$ او $\frac{dy}{dx}$ وبعدها نجعل الحدود التي تحتوي على $\bar{y}$ او $\frac{dy}{dx}$ في طرف والتي لا تحتوي في الطرف الاخر وبعدها ناخذ عامل مشترك

س) جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $2xy-4y+5=0$

$$sol: 2x\frac{dy}{dx}+2y-4\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2x\frac{dy}{dx}-4\frac{dy}{dx}=-2y\ ]\div 2$$

$$x\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x-2)=-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x-2}$$

مشتقات الدوال المثلثية

1) $y = \sin u \rightarrow y` = \cos u \, du$

2) $y = \cos u \rightarrow y` = -\sin u \, du$

3) $y = \tan u \rightarrow y` = \sec^2 u \, du$

4) $y = \cot u \rightarrow y` = -\csc^2 u \, du$

5) $y = \sec u \rightarrow y` = \sec u \tan u \, du$

6) $y = \csc u \rightarrow y` = -\csc u \cot u \, du$

ملاحظة عند اشتقاق أي دالة دائرية يجب ان نضرب في مشتقة الزاوية

ملاحظة كل دالة مثلثية مرفوعة الى اس تعامل معاملة قوس مرفوع الى اس $\cos^n x = (\cos x)^n$

س) جد المشتقة لكل مما يأتي :

1) $y = \sin 5x \rightarrow y` = \cos 5x \, .(5) \rightarrow y` = 5\cos 5x$

2) $y = 3\cos 2x \rightarrow y` = 3(-\sin 2x).2 = -6\sin 2x$

3) $y = \tan(2x^2 + 1) \rightarrow y` = \sec^2(2x^2 + 1).(4x) = 4x.\sec^2(2x^2 + 1)$

4) $y = \sin\sqrt{x} \rightarrow y = \sin x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y` = \cos x^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$

5) $y = \sin^2 3x \rightarrow y` = 2\sin 3x \, .\cos 3x \, .3$

6) $y = 2\csc^7 x \rightarrow y` = 14\csc^6 x \, .(-\csc x \cot x).1 = -14\csc^7 x \cot x$

7) $y = 3\sec^5 2x \rightarrow y` = 15\sec^4 2x.(\sec 2x \tan 2x).2 = 30\sec^5 2x \tan 2x$

8) $y = \cot\sqrt{x-2} \rightarrow y = \cot(x-2)^{\frac{1}{2}}$

$y` = -\csc^2(x-2)^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2}(x-2)^{\frac{-1}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-2}} \csc^2\sqrt{x-2}$

9) $y = \csc(-2x) \rightarrow y` = -\csc(-2x)\cot(-2x).-2 = 2\csc(-2x)\cot(-2x)$

س) اذا كانت $y = \cos 2x$, فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$.

sol: $\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos 2x \,.(2) = -4\cos 2x$

$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-\sin 2x)(2) = 8\sin 2x$

$\frac{d^4y}{dx^4} = 8(\cos 2x)(2) = 16\cos 2x$

س) جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

1) $y = \sqrt{2-x}$

sol : $y = \sqrt{2-x} \quad \rightarrow y = (2-x)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}(-1) \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(2-x)^{\frac{-3}{2}}(-1) = \frac{-1}{4}(2-x)^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$

2) $y = \frac{2-x}{2+x}$

sol : $\frac{dy}{dx} = \frac{(2+x)(-1)-(2-x)(1)}{(2+x)^2}$

$= \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2} = -4(2+x)^{-2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 8(2+x)^{-3} = \frac{8}{(2+x)^3}$

3) $2xy - 4y + 5 = 0$

sol : $2xy - 4y = -5 \Rightarrow (2x-4)y = -5$

$y = \frac{-5}{2x-4}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-4)(0)-(-5)(2)}{(2x-4)^2} = \frac{10}{(2x-4)^2} = 10(2x-4)^{-2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -20(2x-4)^{-3}(2) = \frac{-40}{(2x-4)^3}$

س) جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي :

1) $f(x) = 4\sqrt{6-2x}$

sol: $f(x) = 4\sqrt{6-2x} \rightarrow f(x) = 4(6-2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-1}{2}}(-2) = -4(6-2x)^{\frac{-1}{2}}$

$f''(x) = -4\left(\frac{-1}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-3}{2}}(-2) = -4(6-2x)^{\frac{-3}{2}}$

$f'''(x) = -4\left(\frac{-3}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-5}{2}}(-2) = -12(6-2x)^{\frac{-5}{2}} = \frac{-12}{\sqrt{(6-2x)^5}}$

$f'''(1) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2)^5}} = \frac{-12}{\sqrt{(4)^5}} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$

2) $f(x) = \sin \pi x$

sol : $f'(x) = \pi \cos \pi x \rightarrow f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$

$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$

$f'''(1) = -\pi^3 \cos \pi = (-\pi^3)(-1) = \pi^3$

3) $f(x) = \frac{3}{2-x}$

sol : $f(x) = \frac{3}{2-x} \rightarrow f(x) = 3(2-x)^{-1}$

$f'(x) = -3(2-x)^{-2}(-1) = 3(2-x)^{-2}$

$f''(x) = -6(2-x)^{-3}(-1) = 6(2-x)^{-3}$

$f'''(x) = -18(2-x)^{-4}(-1) = 18(2-x)^{-4}$

$= \frac{18}{(2-x)^4} \Rightarrow f'''(1) = \frac{18}{(2-1)^4} = 18$

س) اذا كانت $y = \tan x$, فبرهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$.

sol : $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec x\ (\sec x \cdot \tan x) = 2\tan x \cdot \sec^2 x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2y(1+y^2)$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

س) اذا علمت بأن $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على ان $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{y^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$.

sol : $y^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0\ ] \div 2 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} + x = 0$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 0 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

س) اذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

sol : $\frac{dy}{dx} = x \cdot \cos x + \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x(-\sin x) + \cos x + \cos x = -x \cdot \sin x + 2\cos x$$

$$(y)^3 = -x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-1) - 2\sin x = -x\cos x - 3\sin x$$

$$(y)^4 = -x(-\sin x) + \cos x \cdot (-1) - 3\cos x = x\sin x - 4\cos x$$

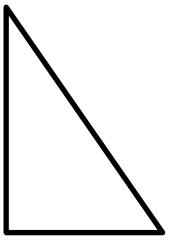
$$y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$$

$$x\sin x - 4\cos x - x\,sn\,x + 4\cos x = 0$$

الدكتور محمد الربيعي

قوانين المساحات والحجوم للاشكال الهندسية ثنائية الابعاد

المثلث القائم الزاوية



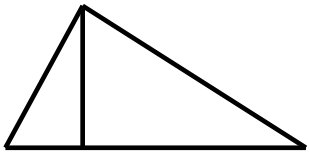
مبرهنة فيثاغورس $z^2 = x^2 + y^2$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y}{x}$, $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{z}$, $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{z}$

المساحة = حاصل ضرب ضلعيه القائمين $A = \frac{1}{2}xy$

المحيط = مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة $P = x + y + z$

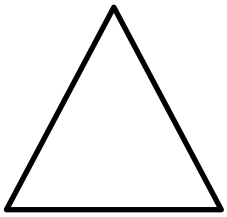
المثلث الاعتيادي



المساحة = نصف القاعدة × الارتفاع $\leftarrow A = \frac{1}{2}xh$

المحيط = مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة $\leftarrow p = x + y + z$

المثلث المتساوي الاضلاع



المساحة = $(\text{طول الضلع})^2 * \frac{\sqrt{3}}{4} \leftarrow A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

المحيط = $\left(\text{مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة}\right) \leftarrow p = 3x$

المربع

المساحة = $(\text{طول الضلع})^2 \leftarrow A = x^2$

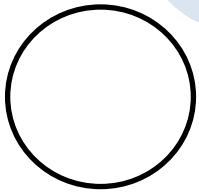
المحيط = طول الضلع × 4 $\leftarrow P = 4x$

المستطيل

المساحة = الطول × العرض $\leftarrow A = x \cdot y$

المحيط = 2 (الطول + العرض) $\leftarrow P = 2(x + y)$

الدائرة

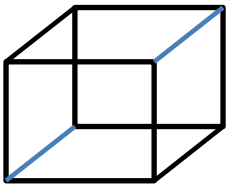


المساحة = $(\text{نصف القطر})^2 \times \pi \leftarrow A = \pi r^2$

المحيط = القطر × $\pi \leftarrow P = 2\pi r$

قوانين المساحات والحجوم للاشكال الهندسية ثلاثية الابعاد

المكعب

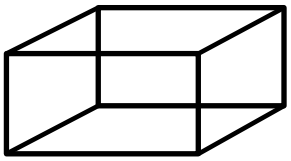


الحجم = (طول الضلع)^3 ← $V = x^3$

المساحة الجانبية = 4 × (طول الضلع)^2 ← $L.A = 4x^2$

المساحة السطحية = 6 × (طول الضلع)^2 ← $T.A = 6X^2$

متوازي المستطيلات قاعدته مستطيلة (متوازي السطوح المستطيلة)

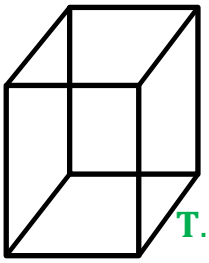


الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع ← $V = x\,y\,z$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع ← $L.A = 2(x+y)z$

المساحة السطحية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة ← $T.A = 2(x+y)\,z + 2xy$

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة

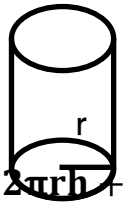


الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع ← $V = x^2\,z$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع ← $L.A = 4x\,z$

المساحة السطحية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة ← $T.A = 4x\,z + 2x^2$

الاسطوانة الدائرية القائمة

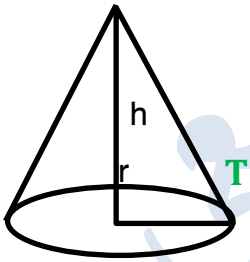


الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع ← $V = \pi\,r^2\,h$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع ← $L.A = 2\pi\,r\,h$

المساحة السطحية (الكلية) = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة $T.A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

المخروط الدائري القائم

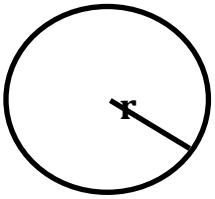


الحجم = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع ← $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

المساحة الجانبية = نصف محيط القاعدة × طول المولد ← $L.A = \pi rL$

المساحة السطحية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة ← $T.A = \pi rL + \pi r^2$

الكرة



المساحة السطحية ← $A = 4\pi\,r^2$

الحجم ← $V = \frac{4\pi}{3}r^3$

المعدلات المرتبطة بالزمن

المعدل الزمني هو اشتقاق المتغير بالنسبة للزمن (t) .

$$x \to \frac{dx}{dt} \quad , \quad y \to \frac{dy}{dt} \quad , \quad v \to \frac{dv}{dt} \quad , \quad s \to \frac{ds}{dt} \quad , \quad h \to \frac{dh}{dt}$$

خطوات الحل :-

1) ارسم مخططا للمسألة(ان احتجت الى ذلك) وحدد المتغيرات والثوابت وضع لها الرموز
2) حدد العلاقة الرئيسية في حل السؤال وهي التي يجب اشتقاقها
3) حاول ايجاد علاقة اخرى (ثانوية) بين المتغيرات لكي تقلل عدد المتغيرات
4) اشتقاق العلاقة الرئيسية بالنسبة للزمن (t)
5) التعويض عن المعلوم لايجاد المجهول بعد الاشتقاق

ملاحظات :-

1. سوف نقسم العلاقات الى نوعين "العلاقة الاساسية" وهي العلاقة التي يتم اشتقاقها و "العلاقة الثانوية" وهي العلاقة التي يتم من خلالها تقليص عدد المتغيرات في السؤال .
2. الثابت الدائم يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم يعوض بعد الاشتقاق واحيانا يعوض قبل الاشتقاق لايجاد قيمة متغير دائم اخر ليتم تعويضهما معا بعد الاشتقاق .
3. معدل او سرعة حركة أي بعد من الابعاد يمثل $(\frac{\text{المتغير}d}{dt})$ ويكون موجبا اذا كان في حالة(تزايد او ابتعاد او يصب او يتمدد او يزيد) ويكون سالبا اذا كان في حالة(تناقص او اقتراب او تسرب او يقل او يذوب او يتقلص) .
4. عند الاشتقاق تكتب على يمين كل متغير يتم اشتقاقه $\frac{\text{المتغير}d}{dt}$.

الوحدات

1) وحدة قياس البعد (المسافة) : $cm \ , m \ , km$
2) وحدة قياس المساحة $cm^2 \ , m^2 \ , km^2$
3) وحدة قياس الحجم $cm^3 \ , \ m^3 \ , km^3$
4) المعدل الزمني للمسافة $\frac{cm}{s} \ , \frac{m}{min} \ , \frac{km}{h}$
5) المعدل الزمني للمساحة $\frac{cm^2}{s} \ , \frac{m^2}{min} \ , \frac{km^2}{h}$
6) المعدل الزمني للحجم $\frac{cm^3}{s} \ , \frac{m^3}{min} \ , \frac{km^3}{h}$
7) تقاس الزاوية ب $\theta = rad \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = rad/s$

اولا) اذا علم او طلب معدل تغير قانون شكل هندسي فأن ذلك القانون يكون علاقة اساسية .

ملاحظة

عندما يعطي (مساحة او حجم) ثابت فهنا نستخدم قانون المساحة او الحجم لايجاد مجهول معين ويتم ذلك قبل الاشتقاق

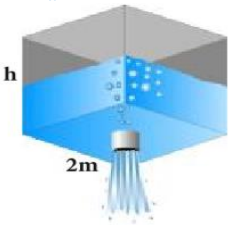
س) خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\ m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t . (2011 د1 , 2013 د2)

الحل : نفرض الارتفاع $h =$, طول ضلع القاعدة $x =$, حجم متوازي المستطيلات $v =$

$$\frac{dv}{dt} = -0.4 \quad , \quad \frac{dh}{dt} = ? \quad , x = 2$$

حجم متوازي المستطيلات (قاعدته مربعة) = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = x^2 h \Rightarrow v = 4h$$



$$\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow -0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$$

$0.1\ m/h$ معدل تغير انخفاض الماء في الخزان

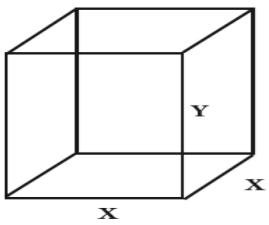
س) متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل , يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل 0.3 cm/s , وارتفاعه يتناقص بمعدل 0.5 cm/s , جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4cm والارتفاع 3 cm

الحل : نفرض طول ضلع القاعدة x , نفرض الارتفاع h , نفرض الحجم V

$$x = 4 \ , \quad y = 3 \quad , \frac{dy}{dt} = -0.5 \ , \quad \frac{dx}{dt} = 0.3 \ , \quad \frac{dv}{dt} = ?$$

حجم متوازي المستطيلات(قاعدته مربعة) = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2 y$$



$$\frac{dv}{dt} = x^2 . \frac{dy}{dt} + y . 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2(-0.5) + (3)(8)(0.3) = 16\left(-\frac{1}{2}\right) + 7.2$$

$$\frac{dv}{dt} = -8 + 7.2 = -0.8\ cm^3/s$$ معدل تغير الحجم

$0.8\ cm^3/s$ معدل نقصان الحجم

ملاحظة

اذا ما عبرنا عن الناتج بمعدل النقصان فيكتب موجبا لان الاشارة السالبة استعضنا عنها بوصف النقصان

س) صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96\ cm^2$. يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة ,جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$. (2011 د2 , 2014 د3)

الحل : نفرض طول المستطيل $= x$, نفرض عرض المستطيل $= y$

معدل تغير العرض $\frac{dy}{dt} = ?$, معدل تغير الطول $\frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = xy \quad , y = 8$$

$$96 = xy \quad \rightarrow 96 = 8x \rightarrow x = 12$$

$$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$0 = 12\frac{dy}{dt} + 8(2) \Rightarrow 0 = 12\frac{dy}{dt} + 16 \rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -16 \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}\ cm/s$$

العرض يتناقص بمعدل $\frac{4}{3}\ cm/s$

ملاحظة

الثابت الدائم يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم يعوض بعد الاشتقاق واحيانا يعوض قبل الاشتقاق لايجاد قيمة متغير دائم اخر ليتم تعويضهما معا بعد الاشتقاق

س) مكعب صلد طول حرفه $8\ cm$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعبا , فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $1cm$. (2011 خارج , 2014 خارج)

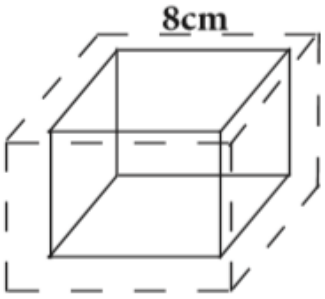
الحل : نفرض ان سمك الجليد في اية لحظة $= x$, المطلوب حساب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 1$

طول ضلع المكعب الصغير(الاصلي) $= 8$, طول ضلع المكعب الكبير(المغطى بالجليد) $= 8 + 2x$

حجم المكعب $= V =$ (طول الضلع)^3

حجم الجليد = حجم المكعب الكبير(المغطى بالجليد) – حجم المكعب الصغير(الاصلي)

$V = (8 + 2x)^3 - (8)^3$



$$\frac{dv}{dt} = 3\ (8 + 2x)^2\ (2)\frac{dx}{dt} \Rightarrow -6 = 6\ (8 + 2)^2\ \frac{dx}{dt}$$

$$-6 = 6(10)^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow -6 = 6(100)\frac{dx}{dt} \Rightarrow -6 = 600\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{6}{600} = \frac{-1}{100} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.01\ cm/s$$ معدل تغير سمك الجليد

$\therefore$ معدل نقصان سمك الجليد $= 0.01\ cm/s$

س) كرة صلدة نصف قطرها $4\ cm$ مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكلها كرويا , فاذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\ cm^3/s$. جد سرعة نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $1\ cm$ ؟ (2019 د1 تطبيقي)

الحل) نفرض ان سمك الجليد يساوي x

نصف قطر الكرة الكبيرة(المغطاة بالجليد) هو $(4+x)$, نصف قطر الكرة الصغيرة(الاصلية) هو (4)

حجم الجليد = حجم الكرة الكبيرة – حجم الكرة الصغيرة

$$v=\frac{4\pi}{3}(x+4)^3-\frac{4\pi}{3}(4)^3$$

$$\frac{dv}{dt}=3\left(\frac{4\pi}{}\right)(x+4)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-10=4\pi(1+4)^2\frac{dx}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dt}=\frac{-10}{100\pi}=\frac{-1}{10\pi}\ cm/s$$ معدل تغير سمك الجليد

معدل نقصان سمك الجليد يساوي $\frac{1}{10\pi}\ cm/s$

س) اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يظل حجمها دائما مساويا $320\pi\ cm^3$. جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها عندما يكون ارتفاعها $5\ cm$, (200د2 , 2003 د2 , 2006 تمهيدي , 2018 د2 تطبيقي)

الحل : نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = x , ارتفاعها = h , حجمها ثابت V

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v=\pi x^2h\ \rightarrow 320\pi=\pi x^2h\ \rightarrow 320=x^2h\quad ,\quad h=5$$

$$320=5x^2\ \rightarrow\ x^2=64\ \rightarrow x=8$$

$$0=x^2\frac{dh}{dt}+h\,.\,2x\frac{dx}{dt}\ \rightarrow 0=64(0.5)+5(16)\frac{dx}{dt}$$

$$0=32+80\frac{dx}{dt}\Rightarrow 80\frac{dx}{dt}=-32$$

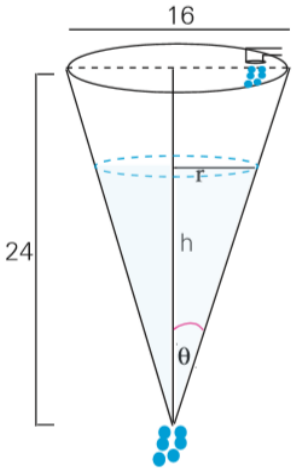
$$\frac{dx}{dt}=\frac{-32}{80}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=-0.4\ cm/s$$

معدل نقصان نصف القطر يساوي $0.4\ cm/s$

ثانيا) اذا وجدت مثلثات متشابهة على الاغلب متداخلة في سؤال فأن تشابه مثلثين يمكن ان يكون علاقة اساسية او علاقة ثانوية كما سيتضح في الامثلة التالية ويمكن الاستعاضة في التشابه في اختيار احدى الدوال المثلثية $(\sin\theta \ , \ \cos\theta \ , \ \tan\theta)$

س) مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للأسفل , ارتفاعه يساوي 24 cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل $1\ cm^3/s$, جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12 cm . (2014 د4 انبار)

الحل : نفرض ارتفاع الماء = h , نصف قطر قاعدة الماء = r , حجم الماء المخروطي الشكل = V



من تشابه المثلثين $abc \ , aef$, $\frac{8}{24}=\frac{r}{h}$ ..... (1

$$8h=24r \Rightarrow r=\frac{1}{3}h \quad \text{..... (2}$$

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h \quad \text{..... (1}$$

نعوض (2) في (1) $V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{9}h^2\right)h$

$V=\frac{\pi}{27}h^3$ نشتق الطرفين $\Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{27}(3h^2\frac{dh}{dt}) \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$

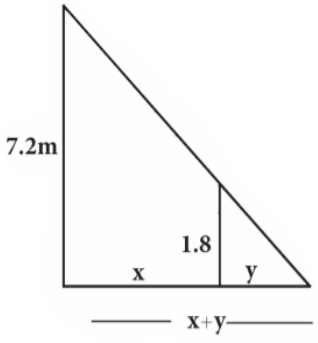
معدل تغير حجم السائل في المخروط = معدل الصب – معدل التسرب

$$\frac{dv}{dt}=5-1=4\ cm^3/s$$

$$4=\frac{\pi}{9}(12)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 4=\frac{\pi}{9}(144)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{36}{144\pi}=\frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

س) عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح , يتحرك رجل طوله 1.8 m مبتعدا عن العمود وبسرعة 30 m/min , جد معدل تغير طول ظل الرجل . (2013 د1 , 2015 تمهيدي)

الحل : نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = x , نفرض ان طول ظل الرجل = y



من تشابه المثلثين $abc \ , aef$, $\frac{1.8}{7.2}=\frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{y}{x+y}$

نشتق الطرفين $x+y=4y \Rightarrow \quad x=3y$

$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt} \Rightarrow 30=3\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{30}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=10\ m/min$$

ثالثا) اذا وجد مثلث قائم الزاوية في سؤال فهناك عدة وجوه اهمها :

1) اذا علم ضلعين فيه بشكل دائم او مؤقت وعلم او طلب معدل تغير ضلع فيه فأن مبرهنة فيثاغورس ستكون عندها علاقة اساسية وثانوية في نفس الوقت كما سيتضح في السؤال ادناه المطلب الاول .

2) اذا علم او طلب معدل تغير زاوية في مثلث قائم الزاوية فأن العلاقة الاساسية هي دالة مثلثية ويفضل ان تربط بين ثابت دائم ومتغير دائم ويفضل ان يكون الثابت الدائم مقاما لها كما سيتضح من خلال السؤال ادناه المطلب الثاني .

3) اذا علمت الزاوية بشكل مؤقت في مثلث قائم الزاوية فأن العلاقة الاساسية يمكن ان تكون فيثاغورس او قانون اخر يشار له في السؤال , اما العلاقة الثانوية فتكون دالة مثلثية ويفضل ان تربط بين متغيرين لجعل احد المتغيرين بدلالة الاخر ليتم تعويضه في العلاقة الاساسية بعد الاشتقاق كما سيتضح لك من خلال السؤال الاول من تمارين (2-3) .

س) سلم طوله 10 m يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه العلوي على حائط رأسي , فإذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/s عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8 m عن الحائط جد :

1) معدل انزلاق الطرف العلوي . 2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض (2012 د1 , 2014 د2)

الحل : 1) نفرض بعد الطرف الاسفل للسلم عن الحائط x , $\frac{dx}{dt} = 2$

نفرض بعد الطرف الاعلى للسلم عن الارض y , $\frac{dy}{dt} = ?$

$x^2 + y^2 = 100$ بتطبيق مبرهنة فيثاغورس , $64 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow (2)(8)(2) + (2)(6)\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 32 + 12\frac{dy}{dt} = 0$$

$$12\frac{dy}{dt} = -32 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-32}{12} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}\,m/sec$$

اي ان معدل انزلاق الطرف العلوي $\frac{8}{3}\,m/sec$

2) نفرض ان قياس الزاوية بين السلم والارض θ

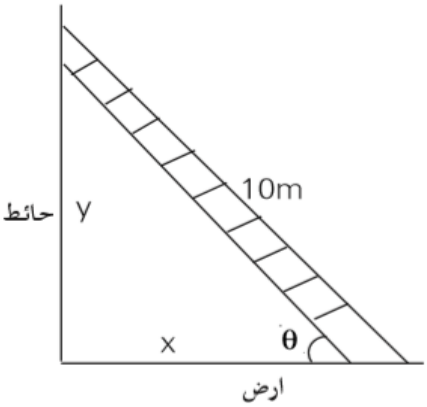
$$\sin\theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{10}\,y$$

$$\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt} \quad , \therefore \cos\theta = \frac{x}{10}$$

$$\frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\left(-\frac{8}{3}\right)$$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}\,rad/sec$ معدل تغير الزاوية بين السلم والارض

$\frac{1}{3}\,rad/sec$ سرعة نقصان الزاوية بين السلم والارض



س) سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/s , فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$. (2013 د1 خارج)

الحل : نفرض بعد الطرف الاسفل للسلم عن الحائط x , $\frac{dx}{dt} = 2$

نفرض بعد الطرف الاعلى للسلم عن الارض y , طول السلم Z

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots(1$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \rightarrow = \sqrt{3}x \quad \ldots\ldots(2$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1)

$$0 = 2x(2) + 2\sqrt{3}x\frac{dy}{dt} \Rightarrow 0 = 4x + 2\sqrt{3}x\frac{dy}{dt}$$

$$2\sqrt{3}x\frac{dy}{dt} = -4x \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-4x}{2\sqrt{3}x} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \quad m/s$$

معدل انزلاق طرفه العلوي يساوي $\frac{2}{\sqrt{3}} m/s$

رابعا) اذا وجدت معادلة منحني في سؤال ما وكان المطلوب او المعلوم نقطة تقع على ذلك المنحني من دون وجود رابط بين هذا المنحني واي نقطة اخرى خارج المنحني فأن معادلة ذلك المنحني تمثل علاقة اساسية هي التي يتم اشتقاقها , اما اذا وجدت معادلة منحني وكان معدل ابتعاد او اقراب أي نقطة تقع على لك المنحني ونقطة اخرى ثابتة تقع خارج المنحني يكون معلوما او مطلوبا فأن العلاقة الاساسية التي يتم اشتقاقها هي قانون المسافة بين النقطتين والعلاقة الثانوية تكون معادلة ذلك المنحني .

س) لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4X$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (0 ,7) يساوي 0.2 unit/s ,جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون x=4 . (2013 د1 خارج)

الحل : لتكن $M(x,y)$ ولتكن $N(7,0)$ ولتكن المسافة $MN = S$

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

بالتعويض عن $y^2 = 4x$ ينتج

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 - 4x} \Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{2(4)-10}{2\sqrt{(4)^2-10(4)+49}} \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}} \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{-2}{2\sqrt{25}} \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{-1}{5} \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = -0.2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1 \ \ unit/s$$

س)لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$,جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة m (2012 د2)

sol: let $m = (x,y)$, $N = \left(0, \frac{3}{2}\right)$, s = MN طول , $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{3}{2})^2} \rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \ ,$$

بالتعويض عن $y = x^2$

$$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \rightarrow s = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}=3y-3$ بتربيع الطرفين

$4\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)=9y^2-18y+9 \quad \rightarrow 4y^2-8y+9=9y^2-18y+9$

$5y^2-10y=0 \quad \rightarrow 5y(y-2)=0$, either $y=0$, $x=0$ يهمل

OR $y-2=0 \rightarrow y=2$, $x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$M=\{(\sqrt{2},2),(-\sqrt{2},2)\}$ مجموعة الحل

ملاحظة

عندما يطلب نقطة او نقاط تنتمي الى منحني بدون معدل اقتراب او ابتعاد فهنا نتبع ما يلي

1) نشتق علاقة السؤال الاصلية

2) نجد علاقة بين $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ من السؤال او نعوض $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ اذا اعطاها في السؤال بشكل ارقام

3) نكون معادلة من العلاقة بعد الاشتقاق ونعوضها في الاصلية المعطاة في السؤال

س) جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t . (2014 نازحين)

الحل :- لتكن $M(x,y)$, $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2+4x-8y=108$ نشتق

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0$

$2x\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}=8\frac{dy}{dt}-2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow (2x+4)\frac{dx}{dt}=(8-2y)\frac{dy}{dt}$

$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{d}$, $(2x+4)\frac{dx}{dt}=(8-2y)\frac{dx}{dt}$

$(2x+4)=(8-2y)\ ] \div 2$

$x+2=4-y \Rightarrow y=2-x$ ... ... (1

$x^2+y^2+4x-8y=108$ ... ... (2

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)-108=0$ نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$2x^2+8x-120=0] \div 2 \Rightarrow x^2+4x-60=0 \Rightarrow (x+10)(x-6)=0$

either $x=-10$, $y=2-x=2+10=12$

OR $x=6$, $y=2-6=-4$

$\therefore$ النقطتان هما $(-10,12)$, $(6,-4)$

مبرهنة رول

اذا كانت f(x) دالة فنقول انها تحقق مبرهنة رول اذا تحققت بها الشروط التالية :

1) اذا كانت الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a\ ,b]$.

2) اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(a\ ,b)$.

3) $f(b)=f(a)$ ، وعندها يوجد على الاقل قيمة واحدة $c\in(a\ ,b)$ وتحقق $f`(c)=0$.

ملاحظة اذا تحققت الشروط الثلاثة نقول ان الدالة تحقق مبرهنة رول حيث يوجد على الاقل قيمة واحد ل c تنتمي للفترة المفتوحة

ملاحظة اذا كانت الدالة لا تحقق مبرهنة رول فلا توجد قيمة ل c .

خطوات ما بعد التحقق لايجاد قيمة c :-

1) نشتق الدالة $f`(x)$ 2

2) نعوض بدل كل x ب c و $f`(c)$ 3

3) نساوي المشتقة للصفر $f`(c)=0$ ونجد c

اولا) الدالة كثيرة الحدود : هي دالة لا تحتوي على متغير في المقام او تحت الجذر او في الاس وهي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق دوما لان مجالها يساوي R دائما . علما ان الدالة الثابتة $f(x)=a\ ,a\in R$ لها نفس خواص كثيرات الحدود .

س) بين هل ان مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ وجد قيمة C الممكنة .

1) $f(x)=(2-x)^2$; $x\in[0\ ,4]$ (تمهيدي 2015)

الحل : 1- الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0\ ,4]$ لانها كثيرة الحدود

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0\ ,4)$ لانها كثيرة حدود

3-

$$f(0)=(2-0)^2=4$$

$$f(4)=(2-4)^2=4 \Rightarrow f(0)=f(4)=4$$

اذن الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$f`(x)=2(2-x)(-1)=-2(2-x)=-4+2x$$

$$f`(c)=-4+2c \quad ,f`(c)=0$$

$$-4+2c=0 \Rightarrow 2c=4 \Rightarrow c=2\in(0\ ,4)$$

ملاحظة

قيمة c تهمل في حالتين (لا تنتمي للفترة في حالتين)

1) اذا كانت لا تنتمي للفترة المعطاة 2) اذا كانت طرف في الفترة المعطاة

2) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$, $x \in [-1\ ,1]$ (2013 خارج)

الحل: 1- الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [1 , 1-] لانها كثيرة الحدود

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (1 , 1-) لانها كثيرة حدود

3- $f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$

$f(1) = 9 + 3 - 1 = 11 \quad \rightarrow f(-1) \neq f(1)$

لا تتحقق مبرهنة رول لان الشرط الثالث لم يتحقق

3) $f(x) = K$, $x \in [a\ ,b]$

الحل : 1- الدالة مستمرة على [a ,b] لانها دالة ثابتة

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)

3- $f(a) = f(b) = k$

الدالة تحقق مبرهنة رول , وان قيمة c يمكن ان تكون أي قيمة ضمن الفترة (a ,b)

س) اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

1) $f(x) = x^3 - 9x$, $x \in [-3\ ,3]$

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة [3 ,3-] لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (3 ,3-) لانها كثيرة حدود

3) $f(3) = 27 - 27 = 0 \quad , f(-3) = -27 + 27 = 0 \quad \rightarrow f(3) = f(-3)$

اذن الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$f`(x) = 3x^2 - 9 \quad \rightarrow f`(c) = 3c^2 - 9 \quad , f`(c) = 0$

$3c^2 - 9 = 0 \ \rightarrow 3c^2 = 9 \rightarrow c^2 = 3 \rightarrow c = \pm\sqrt{3} \in (-3\ ,3)$

$2)\ f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad , \quad x \in [-1\ ,1]$

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1\ ,1]$ لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\ ,1)$ لانها كثيرة حدود

3) $f(1) = [(1)^2 - 3]^2 = (-2)^2 = 4 \quad , f(-1) = [(-1)^2 - 3]^2 = (-2)^2 = 4$

اذن الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول $f(-1) = f(1)$

$f`(x) = 2(x^2 - 3).2x = 4x(x^2 - 3) \Rightarrow f`(c) = 4c(c^2 - 3) \quad , f`(c) = 0$

$4c(c^2 - 3) = 0 \rightarrow c = 0 \in (-1, 1) \qquad OR \qquad c^2 = 3 \rightarrow c = \pm\sqrt{3} \notin (-1\ ,1)$

س) بين ان كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة c.

$1)\ f(x) = (x - 1)^4 \quad , [-1\ ,3]$ (د1 2011)

الحل :1) الدالة مستمرة على الفترة [3, 1-] لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (3, 1-) لانها كثيرة حدود

3) $f(3) = (3 - 1)^4 = 16 \quad , f(-1) = (-1 - 1)^4 = 16 \quad \rightarrow f(3) = f(-1)$

اذن الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$f`(x) = 4(x - 1)^3 \Rightarrow f`(c) = 4(c - 1)^3 \Rightarrow f`(c) = 0 \Rightarrow 4(c - 1)^3 = 0$

$(c - 1)^3 = 0$ بالجذر التكعيبي $\rightarrow c - 1 = 0 \rightarrow c = 1 \in (-1\ ,3)$

$2)\ h(x) = x^3 - x \quad , \quad [-1\ ,1]$

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1\ ,1]$ لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\ ,1)$ لانها كثيرة حدود

3) $h(-1) = h(1) \quad , h(1) = -1 + 1 = 0 \quad , h(-1) = 1 - 1 = 0$

اذن الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$h`(x) = 3x^2 - 1 \quad \rightarrow h`(c) = 3c^2 - 1 \quad , h`(c) = 0$

$3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1\ ,1)$

$3)\ g(x) = x^2 - 3x \quad , \quad x \in [-1\ ,4]$

الحل :1) الدالة مستمرة على الفترة [4, -1] لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (4, -1) لانها كثيرة حدود

3) $g(-1) = 1 + 3 = 4 \quad , g(4) = 16 - 12 = 4 \quad \rightarrow g(-1) = g(4)$

اذن الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$$g`(x) = 2x - 3 \quad \rightarrow g`(c) = 2c - 3 \quad , g`(c) = 0$$

$$2c - 3 = 0 \ \rightarrow c = \frac{3}{2} \in (-1\ ,4)$$

ثانيا) الدالة المثلثية $\sin ax \ , \cos ax$ هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق دوما لان مجالهما R ايضا او يمكن التعبير عنه $[-2n\pi\ , 2n\pi]$ حيث $n \in N$.

س) بين ان الدالة التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاءها ثم جد قيمة c.

$$f(x) = \cos 2x + 2\cos x \qquad x \in [0\ , 2\pi]$$

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة $[0\ , 2\pi]$ لان الفترة تقع ضمن مجالها

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0\ , 2\pi)$ لان الفترة تقع ضمن مجالها

3) $f(0) = \cos 0 + 2\cos 0 = 1 + 2 = 3 \ , f(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi = 1 + 2 = 3$

اذن الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول $\quad f(0) = f(2\pi)$

$$f`(x) = -2\sin 2x - 2\sin x$$

$$f`(c) = -2\sin 2c - 2\sin c \ , f`(c) = 0$$

$$-2\sin 2c - 2\sin c = 0 \Rightarrow -4\sin c\cos c - 2\sin c = 0$$

$(c^-\ , s^+)$ $\quad$ (c^+, s^+)

$(c^-\ , s^-)$ $\quad$ (c^+, s^-)

$c = \pi - \theta$ $\quad$ $c = \theta$

$c = \pi + \theta$ $\quad$ $c = 2\pi - \theta$

$$-2\sin c\,(2\cos c + 1) = 0$$

$$-2\sin c = 0 \Rightarrow c = 0 \notin (0\ , 2\pi) \ , OR \quad c = \pi \in (0\ , 2\pi)$$

$$2\cos c + 1 = 0 \Rightarrow \cos c = -\frac{1}{2} \quad , \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0\ , 2\pi) \quad OR \quad c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0\ , 2\pi)$$

ثالثا) الدالة النسبية (الكسرية) : هي الدالة التي تحتوي على متغير في المقام ويكون مجالها هو كل الاعداد الحقيقية R ما عدا الاعداد التي تجعل المقام يساوي صفرا . فإذا كانت الدالة النسبية مستمرة فهي بالتأكيد قابلة للاشتقاق .

ملاحظة

اذا كانت القيمة التي تجعل المقام صفرا ضمن الفترة المعطاة فأن الدالة غير مستمرة , واذا كانت القيمة التي تجعل المقام صفرا ليست ضمن الفترة المعطاة فأن الدالة مستمرة .

س) اوجد قيمة C التي تعينها مبرهنة رول للدالة الاتية : $F(x)=2x+\frac{2}{x}\ ,\ x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ (2012 خارج)

الحل :1) الدالة مستمرة على الفترة $\left[\frac{1}{2},2\right]$ لان الفترة تقع ضمن مجالها $R/\{0\}$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $\left(\frac{1}{2},2\right)$ لان الفترة تقع ضمن مجالها $R/\{0\}$

3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{\frac{1}{2}}=1+4=5\ ,\ f(2)=2(2)+\frac{2}{2}=4+1=5\ ,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)$

$$f(x)=2x+2x^{-1}\Rightarrow f`(x)=2-2x^{-2}\Rightarrow f`(x)=2-\frac{2}{x^2}$$

$$f`(c)=2-\frac{2}{c^2}=\frac{2c^2-2}{c^2}\quad ,\quad f`(c)=0$$

$$\frac{2c^2-2}{c^2}=0\Rightarrow 2c^2-2=0\Rightarrow 2c^2=2\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=\pm 1$$

$$c=1\in(\frac{1}{2},2)\quad OR\quad c=-1\notin(\frac{1}{2},2)$$

رابعا) الدالة المزدوجة (الشطرية) : هي الدالة التي تحتوي على جزئين او اكثر .

س) بين ان مبرهنة رول تتحقق للدالة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\in[-1,2] \\ -1 & , \quad x\in[-4,-1) \end{cases}$$

الحل : مجال الدالة $[-4,2]$

$f(-1)=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to-1^{(+)}} x^2+1=1+1=2 \quad L_1$, $\lim\limits_{x\to-1^{(-)}} -1=-1 \quad L_2$

$L_1\neq L_2$ الغاية غير موجودة , $[-4,2]$ الدالة ليست مستمرة لان $L_1\neq L_2$ في الفترة

∴ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا كانت f(x) دالة فنقول انها تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة اذا تحققت بها الشروط التالية :

1) اذا كانت الدالة مستمرة على الفترة $[a\ ,b]$

2) اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\ ,b)$.

3) نجد ميل المماس $F`(c)$ 4

4) نجد ميل الوتر حسب القانون الاتي $\text{ميل الوتر} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

5) يوجد على الاقل قيمة واحدة $c \in (a\ ,b)$ وتحقق $F`(\ \ ) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \text{ميل المماس} = \text{ميل الوتر}$

ملاحظة

جميع الملاحظات التي تنطبق على مبرهنة رول تنطبق على مبرهنة القيمة المتوسطة

س) اختبر امكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة ازائها مع ذكر السبب وان تحققت المبرهنة , جد قيمة c الممكنة .

1) $f(x) = x^2 - 6x + 4 \quad , \quad x \in [-1, 7]$ (1د 2015)

الحل :1) الدالة مستمرة على الفترة [7, 1-] لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 7)$ لانها دالة كثيرة حدود

3) ميل المماس $f`(x) = 2x - 6 \quad \rightarrow f`(c) = 2c - 6$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)} = \frac{(49-42+4)-(1+6+4)}{7+1} = \frac{11-11}{8} = 0$

ميل المماس = ميل الوتر

$0 = 2c - 6 \rightarrow c = 3 \ \in (-1\ ,7)$

2) $f(x) = x^3 - x - 1 \quad , \quad x \in [-1\ ,2]$

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-1\ ,2]$ لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 2)$ لانها دالة كثيرة حدود

3) ميل المماس $f`(x) = 3X^2 - 1 \quad \rightarrow f`(c) = 3c^2 - 1$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{(8-2-1)-(-1+1-1)}{3} = \frac{5-(-1)}{3} = \frac{6}{3}$

$= 2$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$3c^2 - 1 = 2 \ \Rightarrow \ 3c^2 = 3 \Rightarrow \ c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$

$c = 1 \ \in (-1\ ,2) \quad \text{OR} \quad c = -1 \ \notin (-1\ ,2)$

$3)\ g(x)=\frac{4}{x+2}\quad ,\quad x\in[-1,2]$

الحل : 1)الدالة مستمرة على الفترة $[-1,2]$ لانها تقع ضمن مجالها $R/\{-2\}$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$ لانها معرفه وتقع ضمن مجالها ايضا

$g`(x)=\frac{(x+2)(0)-4(1)}{(x+2)^2}=\frac{-4}{(x+2)^2}\quad \rightarrow g`(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{(\frac{4}{2+2})-(\frac{4}{-1+2})}{3}=\frac{\frac{4}{4}-\frac{4}{1}}{3}=\frac{1-4}{3}=\frac{-3}{3}$

$=-1$ ميل الوتر

$\frac{-4}{(c+)^2}=-1\ \Rightarrow -(c+2)^2=-4$ ميل المماس = ميل الوتر

$(c+2)^2=4$ بالجذر التربيعي $\Rightarrow\ c+2=\pm2$

either $c+2=2\ \Rightarrow\ c=0\ \in(-1,2)$ OR $c+2=-2\Rightarrow c=-4\notin(-1,2)$

$4)\ h(x)=x^2-4x+5\quad ,\ [-1,5]$ (2014 د4 انبار)

الحل : 1) الدالة مستمرة في الفترة [5, -1] لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة [5, -1] لانها دالة كثيرة حدود

3) $h`(x)=2x-4\quad \rightarrow h`(c)=2c-4$ ميل المماس

$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{h(5)-h(-1)}{5-(-1)}=\frac{(25-20+5)-(1+4+5)}{6}=\frac{10-10}{6}$

$=0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$0=2c-4\Rightarrow 2c=4\Rightarrow c=2\ \in(-1,5)$

س) استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لايجاد قيم C للدالة (تمارين عامة) (2013 د2)

$f(x) = x^4 - 2x^2,\ x \in [-2, 2]$

الحل :A) مبرهنة رول 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-2, 2]$ لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2, 2)$ لانها كثيرة حدود

$f(-2) = 16 - 8 = 8 \quad , f(2) = 16 - 8 = 8 \quad , f(-2) = f(2)$

$f`(x) = 4x^3 - 4x \quad , \quad f`(c) = 4c^3 - 4c \quad , f`(c) = 0$

$4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow 4c(c^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$

$c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1 \in (-2, 2)$

B) مبرهنة القيمة المتوسطة 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-2, 2]$ لانها كثيرة حدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2, 2)$ لانها كثيرة حدود

$f`(x) = 4x^3 - 4x \quad , \quad f`(c) = 4c^3 - 4c$ ميل المماس

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 + 2} = \frac{(16 - 8) - (16 - 8)}{4} = \frac{8 - 8}{4} = 0$ ميل الوتر

ميل الوتر = ميل المماس

$4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow 4c(c^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$

$c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1 \in (-2, 2)$

ملاحظة

احيانا يعطي قيمة c ويطلب ايجاد احد عنصري الفترة [a , b] او كلاهما , في هذه الحالة يجب الانتباه الى تعويض قيمة c في مشتقة الدالة(ميل المماس) ولا يجوز تعويضها في الدالة الاصلية.

س) اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2 \ , f: [0, b] \to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة b . (2014 تمهيدي خارج)

sol : $f`(x) = 3x^2 - 8x \quad , f`(c) = 3c^2 - 8c \Rightarrow f`\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3}$

$= -4$ ميل المماس

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{b^3 - 4b^2 - 0}{b} = \frac{b^3}{b} - \frac{4b^2}{b} = b^2 - 4b$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$b^2 - 4b = -4 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow (b - 2)^2 = 0$ بالجذر التربيعي $\Rightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$

ملاحظة

اذا كانت الدالة تحقق مبرهنة رول على فترة معلومة فهذا يعني ان $f(a) = f(b)$

س) $f(x)=ax^2-4x+5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [-1 , b] فإذا كانت c=2 تنتمي للفترة (-1 , b) فجد قيمة $a,b \in R$. (2014 خارج)

الحل : بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول فان $f(-1)=f(b)$

$f(-1)=a+4+5=a+9$, $f(b)=ab^2-4b+5$

$ab^2-4b+5=a+9$ ..... (1

$f`(x)=2ax-4 \rightarrow f`(c)=2ac-4$, $f`(c)=0$, $c=2$

$2(2)a-4=0 \rightarrow 4a-4=0 \rightarrow a=1$ نعوضها في معادلة (1)

$b^2-4b+5=1+9 \rightarrow b^2-4b+5=10 \Rightarrow b^2-4b-5=0 \rightarrow (b-5)(b+1)=0$

either $b=5$ OR $b=-1$ تهمل

الدكتور محمد الربيعي

خامسا) الدالة الجذرية : تقسم الى قسمين

1) اذا كانت الدالة جذرية دليلها زوجيا فأن مجالها هي القيم التي تجعل داخل الجذر اكبر او يساوي صفرا . بعد التأكد ان كل عناصر الفترة المعطاة في السؤال تقع ضمن عناصر المجال وتماشيا مع ما هو موجود في المنهج نفترض وجود عنصر له يقع ضمن عناصر الفترة المعطاة ثم نثبت شروط الاستمرارية الثلاثة عليه ثم نتحقق من وجود الغاية من اليمين بالنسبة لعنصر الفترة الايسر ثم نتحقق من وجود غاية اليسار بالنسبة لعنصر الفترة الايمن عندها نقول ان الدالة مستمرة على الفترة المغلقة المعطاة , واذا كانت الدالة الجذرية للدليل الزوجي مستمرة فأنها بالتأكيد قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة المعطاة في السؤال , علما انه اذا وجد عنصر واحد داخل الفترة المعطاة يجعل داخل الجذر سالبا عندها نقول ان الدالة غير مستمرة مباشرة ولا يمكن تحقق مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة دون الحاجة الى ذكر شروط الاستمرارية الثلاثة .

س) برهن ان الدالة الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}\ ,x\in[-4\ ,0]$$

sol : $25-x^2\geq 0\ \Rightarrow\ (5-x)(5+x)\geq 0\ \Rightarrow\ x\in[-5\ ,5]$ مجال الدالة هو

-------(-5) ++++++(5) -------

1) الاستمرارية :- نثبت الاستمرارية اولا في الفترة المفتوحة $I=(-4\ ,0)$ وبعدها عند طرفي الفترة

$a\in I=(-4\ ,0)$ لتكن

$$f(a)=\sqrt{25-a^2}\ \in R\quad ,\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-a^2}\in R$$

$\therefore\ f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$ اذن الدالة مستمرة في الفترة المفتوحة $(-4\ ,0)$

$$\lim_{x\to -4^+}f(x)=\lim_{x\to -4^+}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3=f(-4)$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-0}=\sqrt{25}=5=f(0)$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند طرفي الفترة $[-4\ ,0]$

$\therefore$ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-4\ ,0]$ لانها تقع ضمن مجالها

$$f`(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\ \Rightarrow\ (-5\ ,5)$$ مجال المشتقة

2) قابلية الاشتقاق :- الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة $(-4\ ,0)$ لانها تقع ضمن مجالها $(-5\ ,5)$

$f`(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$ , $f`(c)=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(0)-f(-4)}{0+4}=\frac{\sqrt{25-0}-\sqrt{25-16}}{4}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{9}}{4}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}$

$=\frac{1}{2}$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{1}{2}=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} \Rightarrow \sqrt{25-c^2}=-2c$ بتربيع الطرفين

$25-c^2=4c^2 \Rightarrow 25=5c^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\pm\sqrt{5}$

$c=\sqrt{5} \notin (-4,0)$, $c=-\sqrt{5} \in (-4,0)$

2) دالة زوجية دليلها فرديا : اذا كانت الدالة الجذرية دليلها فرديا فأنها مستمرة دوما ولا يمكن معرفة قابلية اشتقاقها الا بعد اشتقاقها , فإذا لم ينزل الجذر للمقام فأنها قابلة للاشتقاق دوما , واذا نزل الجذر للمقام وكانت القيمة التي تجعل المقام يساوي صفر لا تنتمي للفترة المفتوحة فانها ايضا قابلة للاشتقاق , واذا نزل للمقام وكانت القيمة التي تجعل المقام تساوي صفر تنتمي الى الفترة المفتوحة فانها تكون غير قابلة للاشتقاق فقط هنا .

س) اختبر امكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدالة الاتية على الفترة المعطاة ازائها مع ذكر السبب وان تحققت المبرهنة , جد قيمة c الممكنة $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $[-2,7]$.

الحل : 1) الدالة مستمرة على الفترة $[-2,7]$ لان الفترة تقع ضمن مجالها R

2) الدالة غير قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2,7)$ لان مجال المشتقة $R/\{-1\}$ والعدد (-1) يقع ضمن مجال الفترة المعطاة

$B(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow B`(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

∴ لا يمكن تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ضمن الفترة المعطاة

التقريب بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة : اذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على الفترة المغلقة [a , b] وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a , b) ولو فرضنا ان $h = b - a$ حيث $h \in R , h \neq 0$ فانه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على :

$$f`(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow f`(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow f(a+h) = f(a) + hf`(c)$$

وعندما يكون اقتراب b من a قربا كافيا تكون في هذه الحالة h صغيرة ويصبح الوتر صغيرا ولذلك يصبح

$$f(a+h) \cong f(a) + hf`(a)$$

لايجاد القيمة التقريبية نتبع الخطوات الاتية

1) نفرض الدالة على شكل السؤال المعطى بوضع x مكان المقدار المعقد

2) نفرض الرقم المعطى في السؤال = b .

3) نختار رقم قريب جدا من b يسمى a بحيث تخرج قيمة f(a) بصورة مضبوطة .

4) نجد قيمة h من القانون $h = b - a$.

5) نعوض قيمة a في الدالة لنجد $f(a)$.

6) نجد المشتقة f`(a) ونعوض فيها قيمة a .

7) نعوض في القانون لايجاد القيمة التقريبية $f(a+h) \cong f(a) + hf`(a)$.

ملاحظة

اذا كان العدد موجود داخل جذر او مرفوع الى اس او صيغة كسر

س) جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسبا للعدد $\sqrt{26}$

sol : $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f(a) = f(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$f`(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f`(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,.\,f`(a)$$

$$f(26) \cong 5 + (1)(0.1) \cong 5 + 0.1 \cong 5.1$$

$$\sqrt{26} \cong 5.1$$

$$b = 26$$
$$a = 25$$
$$h = b - a = 1$$

س) باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة بصورة تقريبية ومقربا لثلاث مراتب عشرية لكل ما يأتي :

5) $\sqrt[3]{7.8}$ (د1 2011)

$$b = 7.8$$
$$a = 8$$
$$h = b - a = -0.2$$

sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f`(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f`(a) = f`(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,.f`(a)$

$f(7.8) \cong 2 + (-0.2)(0.083) \cong 2 - 0.0166 \cong 1.9834$

$\therefore \sqrt{7.8} \cong 1.9834$

1) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

$$b = 17$$
$$a = 16$$
$$h = b - a = 1$$

sol : $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$

$f(a) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$

$f`(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f`(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32} = 0.156$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,.f`(a)$

$f(17) \cong 6 + (1)(0.156) \cong 6 + 0.156 \cong 6.156$

$\therefore \sqrt{17} + \sqrt[4]{17} \cong 6.156$

2) $\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}$

$b=63$
$a=64$
$h=b-a=-1$

sol: $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$

$f(a)=f(64)=\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}=8+4=12$

$f`(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\rightarrow f`(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f`(a)=f`(64)=\frac{1}{2\sqrt{64}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$

$=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{3+1}{48}=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}=0.083$

$f(a+h)\cong f(a)+h\,.f`(a)$

$f(63)\cong 12+(-1)(0.083)$

$\cong 12-0.083\cong 11.917$

$\therefore\ \sqrt{63}+\sqrt[3]{63}\cong 11.917$

3) $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

$b=0.98$
$a=1$
$h=b-a=-0.02$

sol : $f(x)=\sqrt[5]{x^3}+x^4+3=x^{\frac{3}{5}}+x^4+3$

$f(a)=f(1)=1+1+3=5$

$f`(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}+4x^3=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+4x^3$

$f`(a)==\frac{3}{5}+4=0.6+4=4.6$

$f(a+h)\cong f(a)+h\,.f`(a)$

$f(0.98)\cong 5+(-0.02)(4.6)$

$\cong 5-0.092\cong 4.908$

$\therefore\ \sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3\cong 4.908$

الدكتور محمد الربيعي

$b = 1.04$

$a = 1$

$h = b - a = 0.04$

4) $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

sol : $f(x) = x^3 + 3x^4$

$f(a) = f(1) = 1 + 3 = 4$

$f`(x) = 3x^2 + 12x^3$

$f`(a) = f`(1) = 3 + 12 = 15$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,.f`(a)$

$f(1.04) \cong 4 + (0.04)(15)$

$\cong 4 + 0.6 \cong 4.6$

$\therefore\ (1.04)^3 + 3(1.04)^4 \cong 4.6$

ملاحظة

لا يمكن ايجاد القيمة التقريبية لجذور الكسور العشرية المحصورة بين الصفر و الواحد والبعيدة عن العدد واحد الا اذا كانت عدد المراتب على يمين الفارزة تساوي او من مضاعفات دليل الجذر .

1) اذا كان الكسر عشري اقل من الواحد يجب ان يتساوي عدد المراتب مع دليل الجذر بوضع اصفار على اليمين

$\sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$, $\sqrt[3]{0.08} = \sqrt[3]{0.080}$

2) اذا كان داخل الجذر كسر اعتيادي اصغر من الواحد فيجب تحويله الى كسر عشري وذلك بقسمة البسط على المقام مع مراعاة خواص العدد العشري .

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$$

3) اذا كان داخل الجذر عدد عشري اكبر من الواحد يبقى كما هو $\sqrt[3]{7.8}$

4) يجب التخلص من الاس السالب $\sqrt{15^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{15}}$

6) $\sqrt[3]{0.12}$

$b = 0.120$
$a = 0.125$
$h = b - a = -0.005$

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$f`(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f`(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}} = \frac{1}{3(0.25)} = \frac{1}{0.75} = 1.333$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,.\,f`(a)$

$f(0.12) \cong 0.5 + (-0.005)(1.333)$

$\cong 0.5 + 0.006665 \cong 0.493335$

$\therefore \sqrt[3]{0.12} \cong 0.493335$

7) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (د2 2012)

$b = 0.50$
$a = 0.49$
$h = b - a = 0.01$

sol : $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f(a) = f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$f`(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f`(a) = f`(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{1.4} = 0.71$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,.\,f`(a) \rightarrow f(0.5) \cong f(0.49) + h\,.\,f`(0.49)$

$f(0.5) \cong 0.7 + (0.01)(0.71) \cong 0.7 + 0.0071 = 0.7071$

$\therefore \sqrt{0.5} \cong 0.7071$

الدكتور محمد الربيعي

8) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

sol : $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{-1}{3}}$

$b=9$

$a=8$

$h=b-a=1$

$f(a)=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0.5$

$f`(x)=-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}=\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$f`(a)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{(8)^4}}=\frac{-1}{48}=-0.0208$

$f(a+h)\cong f(a)+h\,.f`(a)$

$f(9)\cong 0.5+(1)(-0.0208)\cong 0.5-0.0208\cong 0.4792$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cong 0.4792$

8) $\frac{1}{101}$

sol : $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$

$b=101$

$a=100$

$h=b-a=1$

$f(a)=f(100)=\frac{1}{100}=0.01$

$f`(x)=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$

$f`(a)=f`(100)=\frac{-1}{(100)^2}=\frac{-1}{10000}=-0.0001$

$f(a+h)\cong f(a)+h\,.f`(a)$

$f(101)\cong 0.01+(1)(-0.0001)\cong 0.01-0.0001\cong 0.0099$

$\therefore \frac{1}{101}\cong 0.0099$

الدكتور محمد الربيعي

س) باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$. (2006 د2)

$$b = -9$$
$$a = -8$$
$$h = b - a = -1$$

sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = \sqrt[3]{-8} = -2$

$$f`(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f`(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{3(4)} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,.\,f`(a) \rightarrow f(-9)$$
$$\approx -2 + (-1)(0.083) \approx -2 - 0.083 \approx -2.083$$

$\sqrt[3]{-9} \cong -2.083$

س) جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt{15^{-1}}$. (2009 تمهيدي)

$$b = 15$$
$$a = 16$$
$$h = b - a = -1$$

sol: $f(x) = \sqrt{x^{-1}} = x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$f`(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \rightarrow f`(a) = \frac{-1}{2\sqrt{(16)^3}} = \frac{-1}{2(64)} = \frac{-1}{128} \approx -0.007$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h\,.\,f`(a) \rightarrow f(15) \approx 0.25 + (-1)(-0.007)$$
$$\approx 0.25 + 0.007 \approx 0.257$$

$\sqrt{15^{-1}} \approx 0.257$

ملاحظة

اذا كانت الدالة المعطاة في السؤال دالة معلومة (طريقة الحل تكون بنفس الطريقة السابقة ولكن بدون فرض الدالة لانها معلومة اصلا).

س) اذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$. (2012 د1 , 2013 د1)

$$b=1.01$$
$$a=1$$
$$h=b-a=0.01$$

sol : $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}=(31x+1)^{\frac{1}{5}}$

$f(a)=\sqrt[5]{31(1)+1}=\sqrt[5]{32}=2$

$f`(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31)=\frac{31}{5\sqrt[5]{(31x+1)^4}}$

$f`(a)=\frac{31}{5\sqrt[5]{(31+1)^4}}=\frac{31}{5\sqrt[5]{(31+1)^4}}$

$=\frac{31}{5\sqrt[5]{(32)^4}}=\frac{31}{5(16)}=\frac{31}{80}\approx 0.39$

$f(a+h)\cong f(a)+h\,.f`(a)$

$f(101)\cong 2+(0.01)(0.39)\cong 2+0.0039\cong 2.0039$

$\therefore \sqrt[5]{31x+1}\cong 2.0039$

س) اذا كان $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$.

$$b=1.001$$
$$a=1$$
$$h=b-a=0.001$$

sol : $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$

$f(a)=f(1)=1+3+4+5=13$

$f`(x)=3x^2+6x+4$

$f`(a)=f`(1)=3+6+4=13$

$f(a+h)\cong f(a)+h\,.f`(a)$

$f(1.001)\cong 13+(0.001)(13)$

$\cong 13+0.013\cong 13.013$

ملاحظة

لايجاد القيمة التقريبية لحجوم او مساحات الاشكال الهندسية نقوم بكتابة القانون اولا فإذا علم من القانون طرفه الايمن فأن القانون يمثل الخطوة الاولى في الحل , اما اذا علم من القانون طرفه الايسر فنقوم بالتبسيط ثم التقريب .

س) مكعب طول حرفه $9.98\ cm$ جد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل : نفرض حجم المكعب V وطول حرفه X

حجم المكعب = (طول الضلع)^3 $\quad V(x) = x^3$

$$V(a) = (10)^3 = 1000$$

$$V`(x) = 3x^2$$

$$V`(a) = 3a^2 = 3(10)^2 = 3(100) = 300$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h\,.\,V`(a)$$

$$V(9.98) \cong 1000 + (-0.02)(300)$$

$$\cong 1000 - 6 \cong 994\ cm^3$$

$$b = 9.98$$

$$a = 10$$

$$h = b - a = -0.02$$

س) كرة حجمها $84\pi\ cm^3$, جد نصف قطرها بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة القيمة المتوسطة .

الحل : نفرض حجم الكرة v ونصف قطر الكرة r

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3 $\quad v = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow 84\pi = \frac{4\pi}{3} r^3$

$$r^3 = 63 \Rightarrow r = \sqrt[3]{63}$$

$$r(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad , \quad r(a) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$r`(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$r`(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{3(16)} = \frac{1}{48} = 0.0208$$

$$r(a+h) \cong r(a) + h\,.\,r`(a)$$

$$r(63) \cong 4 + (-1)(0.0208) \cong 4 - 0.0208 \cong 3.9792\ cm$$

$$b = 63$$

$$a = 64$$

$$h = b - a = -1$$

س) مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي $2.98\ cm$ فجد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها .

الحل : نفرض حجم المخروط v ونصف القطر r وارتفاع المخروط y

حجم المخروط $= \frac{1}{3}$ القاعدة $\times$ الارتفاع $= \frac{\pi}{3}$ (نصف القطر$)^2 \times$ الارتفاع

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 y$$

$$\therefore y = 2r \ \Rightarrow r = \frac{1}{2} y$$

$$v(y) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}y)^2 y \Rightarrow v = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}y^2\right)y \Rightarrow v(y) = \frac{\pi}{12}\ y^3$$

$$V(a) = \frac{\pi}{12}\ (3)^3 = \frac{9}{2}\pi = 2.25\ \pi$$

$$V`(y) = \frac{\pi}{4}y^2 \quad , \quad V`(a) = \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{\pi}{4}(3)^2 = \frac{9}{4}\pi = 2.25\pi$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h\,.\,V`(a)$$

$$V(2.98) \cong 2.25\pi + (-0.02)(2.25\pi) \cong 2.250\pi - 0.045\pi \cong 2.205\pi\ \ cm^3$$

$b = 2.98$

$a = 3$

$h = b - a = -0.02$

س) مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10\ cm$

الحل : نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط r , ارتفاع المخروط y (2013 د2)

$$v = \frac{\pi}{3} r^2\, y \ \rightarrow 210\pi = \frac{\pi}{3} r^2\ (10)$$

$$r^2 = 63 \rightarrow r = \sqrt{63}$$

$$r(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$r(a) = r(64) = \sqrt{64} = 8$$

$$r`(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$r`(a) = r`(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} \approx 0.0625$$

$$r(a+h) \cong r(a) + h\,.\,r`(a)$$

$$r(2.97) \cong 8 + (-1)(0.0625) \cong 8 - 0.0625 \cong 7.9375$$

$b = 63$

$a = 64$

$h = b - a = -1$

س) متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته , جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $2.97\ cm$.

الحل : نفرض ان طول ضلع القاعدة X , الارتفاع h حيث ان $h = 3x$

حجم متوازي المستطيلات (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2h \rightarrow V(x) = x^2 \cdot 3x \rightarrow V(x) = 3x^3$$

$$V(a) = V(3) = 3(3)^3 = 3(27) = 81$$

$$V`(x) = 9x^2 \quad \rightarrow V`(a) = V`(3) = 9(3)^2 = 81$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h \cdot V`(a)$$

$$V(2.97) \cong 81 + (-0.03)(81)$$

$$\cong 81 - 2.43 \cong 78.57$$

$$b = 2.97$$

$$a = 3$$

$$h = b - a = -0.03$$

س) مستطيل بعداه $\sqrt[3]{28}$, $\sqrt{143}$ جد مساحته بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

1) $\sqrt{143}$ (2019 د1 احيائي خارج)

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$b = 143 \ , a = 144 \ , \quad h = b - a = 143 - 144 = -1$$

$$f(a) = \sqrt{144} = 12$$

$$f`(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ , f`(a) = \frac{1}{2\sqrt{144}} = \frac{1}{24} = 0.04$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f`(a)$$

$$f(143) \cong 12 + (-1)(0.04) \cong 12 - 0.04 \approx 11.96$$

2) $\sqrt[3]{28}$

$g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$b = 28 \ , a = 27 \ , h = b - a = 28 - 27 = 1$

$g(a) = \sqrt[3]{27} = 3$

$g`(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$g`(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$

$g(a+h) \cong g(a) + h \, . g`(a)$

$g(28) \cong 3 + (1)(0.037) \cong 3 + 0.037 \approx 3.037$

$A = (11.96)(3.037) = 36.322$ مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه

ملاحظة اذا كان المطلوب في السؤال (حجم الطلاء او سمك الطلاء او كمية الطلاء او معدل التغير التقريبي) فتكون طريقة الحل بايجاد معدل التغير التقريبي للدالة $hf`(a)$

ملاحظة $hf`(a)$ يمثل القيمة التقريبية للزيادة او النقصان او مقدار التغير التقريبي اذا تغير بعد معين من قيمة الى اخرى.

س) لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة .

sol : $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$f`(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f`(a) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3(2)} = \frac{1}{3} = 0.333$

$h \, . f`(a) \cong (0.06)\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0.02$ التغير التقريبي

$b = 8.06$

$a = 8$

$h = b - a = 0.6$

س) يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10 cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15 cm اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

sol : $v = (10.3)^3 \quad , v(x) = x^3$

$V`(x) = 3x^2 \quad , V`(a) = 3a^2 = 3(10)^2 = 3(100) = 300$

$h \, . V`(a) \cong (0.3)(300) \cong 90 \ cm^3$ حجم الطلاء

$b = 10.3$

$a = 10$

$h = b - a = 0.03$

س) كرة نصف قطرها 6 cm طليت بطلاء سمكه 0.1 cm جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل :

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

$V = \frac{4\pi}{3}(6.1)^3$

$V(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

$V`(x) = \frac{4\pi}{3}(3x^2) = 4\pi x^2$

$V`(a) = V`(6) = 4\pi(6)^2 = 4\pi(36) = 144\pi$

$h \, . V`(a) = (0.1)(144\pi) = 14.4\pi \ cm^3$ حجم (كمية) الطلاء

$b = 6.1$

$a = 6$

$h = b - a = 0.1$

النهايات العظمى و الصغرى

خطوات الحل في ايجاد مناطق التزايد والتناقص ونقاط النهاية العظمى والصغرى المحلية :-

1) ايجاد المشتقة الاولى ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة الناتجة لايجاد قيمة المتغير x .

2) تعويض قيمة x بالمعادلة الاصلية لايجاد قيمة y فتكون مجموعة النقاط (x , y) نقاط حرجة .

3) رسم خط الاعداد الافقي وتثبيت عليه قيم x فقط فيتم تقسيمه الى عدة اقسام ثم نأخذ عدد من كل قسم ونعوضه بالمشتقة الاولى ثم نأخذ من الناتج اشارته فقط .

4) قراءة خط الاعداد فتكون الدالة متزايدة (↗) عند الاشارة الموجبة , وتكون الدالة متناقصة (↘) عند الاشارة السالبة

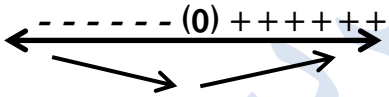
5) بيان نوع النقطة الحرجة فتكون عظمى محلية اذا انتقلت قيمة x فيها من التزايد الى التناقص(↗ ↘) من جهة اليسار وتكون صغرى محلية اذا انتقلت قيمة x من التناقص الى التزايد (↘ ↗) من جهة اليسار ايضا , وتكون مجرد نقطة حرجة اذا انتقلت قيمة x من التزايد الى نفسه او من التناقص الى نفسه.

6)في حالة الدوال النسبية التي تكون مشتقتها الاولى دالة نسبية بسطها ثابتا فلا يمكن مساواتها بالصفر وبالتالي لا توجد نقاط حرجة وعند رسم خط الاعداد الاول نثبت عليه القيمة التي تجعل المقام صفر على شكل فجوة

س) جد مناطق التزايد والتناقص للدوال الاتية .

1) $y = f(x) = x^2$

Sol : $f`(x) = 2x \;, f`(x) = 0 \to 2x = 0 \to x = 0 \;, f(0) = 0 \to (0\,,0)$ نقطة حرجة



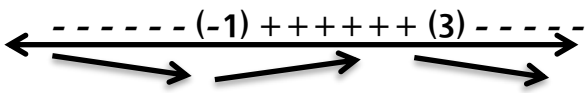
$\{x : x > 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة , $\{x : x < 0\}$ الدالة متناقصة بالفترة

2) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

Sol : $f`(x) = 9 + 6x - 3x^2$ , $f`(x) = 0 \to [9 + 6x - 3x^2] \div (-3)$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \to (x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3 \quad OR \quad x = -1$

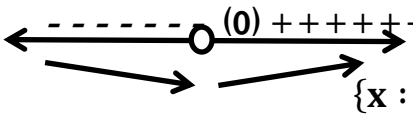


$\{x : x > 3\}, \{x : x < -1\}$ الدالة متناقصة بالفترتين , $(-1\,,3)$ الدالة متزايدة بالفترة

$3)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

sol : $f(x)=\sqrt[3]{x^2} \rightarrow f(x)=x^{\frac{2}{3}}$

$f`(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$



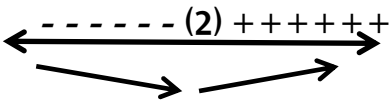
الدالة f متزايدة بالفترة $\{x : x > 0\}$, الدالة f متناقصة بالفترة $\{x : x < 0\}$

س) جد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدوال الاتية ان وجدت .

$1)\ f(x)=1+(x-2)^2$

Sol : $f`(x)=2(x-2)$ , $f`(x)=0 \rightarrow 2(x-2)=0 \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2$

$f(2)=1$, $(2,1)$ نقطة حرجة



الدالة متناقصة بلفترة $\{x : x < 2\}$, الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x > 2\}$

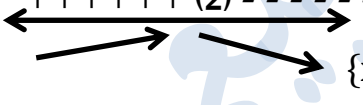
النقطة $(2,1)$ هي نقطة نهاية صغرى محلية

$2)\ f(x)=1-(x-2)^2$

sol: $f`(x)=-2(x-2)$ , $f`(x)=0$

$-2(x-2)=0 \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2$

$f(2)=1-(2-2)^2=1$, $(2,1)$ نقطة حرجة



الدالة f متزايدة بالفترة $\{x : x < 2\}$, الدالة f متناقصة بالفترة $\{x : x > 2\}$

النقطة $(2,1)$ تمثل نقطة نهاية عظمى محلية

$3)\ f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

sol : $f`(x) = 3x^2 - 18x + 24 \quad , f`(x) = 0$

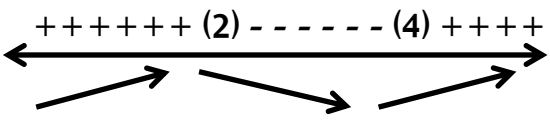
$3x^2 - 18x + 24 = 0\ ] \div 3 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

$x = 4 \rightarrow f(4) = 64 - 144 + 96 = 16$

$x = 2 \rightarrow f(2) = 8 - 36 + 48 = 20$

$(4\ ,16)\ ,(2\ ,20)$ نقاط حرجة



اشارة f`(x)

الدالة f متزايدة بالفترتين $\{x : x > 4\}$, $\{x : x < 2\}$

الدالة f متناقصة بالفترة المفتوحة $(2\ ,4)$

نقطة النهاية العظمى المحلية $(2\ ,20)$, نقطة النهاية الصغرى المحلية $(4\ ,16)$

خطوات الحل في ايجاد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب :-

1) ايجاد المشتقة الاولى .

2) ايجاد المشتقة الثانية ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة الناتجة لايجاد قيمة المتغير x .

3) تعويض قيمة x بالمعادلة الاصلية لايجاد قيمة y فتكون مجموعة النقاط (x , y) نقاط انقلاب مرشحة.

4) رسم خط الاعداد الافقي وتثبيت عليه قيم x فقط ليتم تقسيمه الى عدة اقسام ثم نأخذ عدد من كل قسم ونعوضه بالمشتقة الثانية ثم نأخذ من الناتج اشارته فقط .

5) قراءة خط الاعداد فتكون الدالة مقعرة ( ) عند الاشارة الموجبة , وتكون الدالة محدبة ( ) عند الاشارة السالبة .

6) بيان نوع النقطة المرشحة فتكون نقطة انقلاب اذا انتقلت قيمة x من التقعر الى التحدب او بالعكس وتكون ليست نقطة انقلاب اذا انتقلت قيمة x من التقعر الى نفسه او من التحدب الى نفسه .

7) اذا كانت المشتقة الثانية عددا ثابتا فهناك حالتان ,اذا كان الثابت اكبر من صفر فأن الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب , واذا كان الثابت اصغر من صفر فان الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

8) في حالة الدوال النسبية التي تكون مشتقتها الثانية دالة نسبية بسطها ثابتا فلا يمكن مساواتها بالصفر وبالتالي لا توجد نقاط انقلاب وعند رسم خط الاعداد الثاني نثبت عليه القيم التي تجعل المقام صفر على شكل فجوة .

س) ادرس تقعر وتحدب كل من الدوال التالية :

1) $f(x) = x^2$

Sol : $f`(x) = 2x$

$f``(x) = 2 > 0$ الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

2) $f(x) = x^3$

sol : $f`(x) = 3x^2$

$f``(x) = 6x \ , f``(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

اشارة $f``(x)$ ----- (0) +++++

تحدب تقعر

$\{x : x < 0\}$ الدالة محدبة بالفترة , $\{x : x > 0\}$ الدالة مقعرة بالفترة

س) جد نقطة الانقلاب للمنحني : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

Sol : $f`(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f``(x) = 12x - 6$ , $f``(x) = 0 \rightarrow 12x - 6 = 0 \rightarrow 12x = 6 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 1 = \frac{1 - 3 - 24 + 4}{4} = \frac{-22}{4}$

$= -\frac{11}{2}$, $\left(\frac{1}{2} , -\frac{11}{2}\right)$ نقطة انقلاب مرشحة

$\left\{x : x < \frac{1}{2}\right\}$ الدالة محدبة بالفترة , $\left\{x : x > \frac{1}{2}\right\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$\left(\frac{1}{2} , -\frac{11}{2}\right)$ نقطة انقلاب

اشارة $f``(x)$ ---- $\frac{1}{2}$ ++++

س) جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب ان وجدت للدوال التالية :

1) $f(x) = 4x^3 - x^4$

sol: $f`(x) = 12x^2 - 4x^3$, $f``(x) = 24x - 12x^2$

$f``(x) = 0 \rightarrow 24x - 12x^2 = 0 \rightarrow 12x(2 - x) = 0$

$12x = 0 \rightarrow x = 0$, $f(0) = 0$ or $2 - x = 0 \rightarrow x = 2$, $f(2) = 32 - 16 = 16$

$(0 , 0) , (2 , 16)$ نقاط انقلاب مرشحة

اشارة f``(x) ---------- (0) ++++++ (2) ---------- ←→

تحدب تقعر تحدب

الدالة مقعرة بالفترة $(0 , 2)$, الدالة محدبة بالفترتين $\{x : x < 0\} , \{x : x > 2\}$

$(0 , 0) , (2 , 16)$ نقاط انقلاب

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Sol : $f(x) = x + x^{-1}$, $f`(x) = 1 - x^{-2}$

$f``(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \neq 0$ → لا توجد نقاط انقلاب

اشارة f``(x) ---------- (0) ++++++ ←→

تحدب تقعر

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x < 0\}$, الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x > 0\}$

ملاحظة

في حالة عدم امكانية مساواة المشتقة الثانية بالصفر نثبت على خط الاعداد القيمة التي تجعل المقام صفر على شكل فجوة

3) $h(x) = 4 - (x + 2)^4$

Sol : $h`(x) = -4(x + 2)^3$

$h``(x) = -12(x + 2)^2$ , $h``(x) = 0 \rightarrow -12(x + 2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$f(-2) = 4$, $(-2 , 4)$ نقطة انقلاب مرشحة

اشارة h``(x) ---------- (-2) ---------- ←→

تحدب تحدب

الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

4) $f(x) = 3 - 2x - x^2$

sol: $f`(x) = -2 - 2x$

$f``(x) = -2 < 0$ الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

5) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

sol : $f`(x) = 4x^3 + 6x$

$f``(x) = 12x^2 + 6 > 0$ الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

طريقة فحص النقطة الحرجة باستخدام المشتقة الثانية :-

اذا كانت (x , y) نقطة حرجة فيمكن معرفة نوعها باستخدام المشتقة الثانية حسب الحالات التالية :

1) اذا كانت $f``(x) > 0$ فان النقطة الحرجة هي نقطة نهاية صغرى محلية .

2) اذا كانت $f``(x) < 0$ فان النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية .

3) اذا كانت $f``(x) = 0$ فان هذه الطريقة فاشلة في تحديد نوع النقطة وعندها يجب اللجوء الى خط الاعداد.

4) اذا كانت $f``(x) = a$ فان النقطة الحرجة هي عظمى محلية اذا كانت $a < 0$ أي سالب, وتكون نقطة نهاية صغرى محلية اذا كانت $a > 0$ أي موجب , دون الحاجة الى معرفة الاحداثي السيني للنقطة الحرجة.

س) باستخدام اختبار المشتقة الثانية ان امكن , جد النهايات المحلية للدوال الاتية :

1) $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

sol : $f`(x) = 6 - 6x \quad , f`(x) = 0 \rightarrow 6 - 6x = 0 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 6 - 3 - 1 = 2$, $(1 , 2)$ نقطة حرجة

$f``(x) = -6 < 0$, $(1 , 2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$2)\ f(x)=x-\frac{4}{x^2}\ ,\quad x\neq 0$

Sol : $f(x)=x-4x^{-2}\ ,\quad f`(x)=1+8x^{-3}=1+\frac{8}{x^3}$

$f`(x)=0\rightarrow 1+\frac{8}{x^3}=0\ ].x^3\ \rightarrow x^3+8=0\rightarrow x^3=-8$ بالجذر التكعيبي $\rightarrow x=-2$

$f(-2)=-2-1=-3\quad ,\quad (-2,-3)$ نقطة حرجة

$f``(x)=-24x^{-4}=\frac{-24}{x^4}\ \rightarrow\ f``(-2)=\frac{-24}{16}<0$

$(-2,-3)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$3)\ f(x)=x^3-3x^2-9x$

sol: $f`(x)=3x^2-6x-9\ ,\quad f`(x)=0$

$\{3x^2-6x-9=0\}\div 3$

$x^2-2x-3=0\rightarrow (x-3)(x+1)=0$

$x=3\ ,f(3)=27-27-27=-27$

OR $x=-1\ ,f(-1)=-1-3+9=5$

$(3,-27),(-1,5)$ نقاط حرجة

$f``(x)=6x-6\ ,f``(3)=18-6=12>0\ ,f``(-1)=-6-6=-12<0$

$(3,-27)$ نقطة نهاية صغرى محلية $,(-1,5)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$4)\ f(x)=4-(x+1)^4$

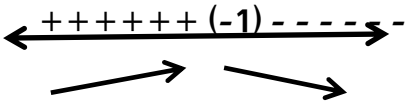
Sol : $f`(x)=-4(x+1)^3\ ,\ f`(x)=0$

$-4(x+1)^3=0\rightarrow x+1=0\rightarrow x=-1$

$f(-1)=4-(-1+1)^4=4\quad ,\quad (-1,4)$ نقطة حرجة

$f``(x)=-12(x+1)^2$

$f``(-1)=-12\ (0)=0$ هذه الطريقة فاشلة في تحديد نوع النقطة الحرجة



اشارة f`(x)

$\{x:x<-1\}$ الدالة متزايدة بالفترة $,\{x:x>-1\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(-1,4)$ نقطة نهاية عظمى محلية

س) لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $a \in (-4, 8) , b \in R$ جد قيمة a اذا كانت :

1) الدالة f محدبة 2) الدالة f مقعرة

Sol : $f`(x) = 2ax - 6$, $f``(x) = 2a$

a) الدالة محدبة

$f``(x) < 0 \rightarrow 2a < 0 \rightarrow a = -4$

b) الدالة مقعرة

$f``(x) > 0 \rightarrow 2a > 0 \rightarrow a = 8$

أيجاد قيم الثوابت

ملاحظة

النقطة الحرجة تحقق معادلة المنحني من جهة وتحقق مساواة المشتقة الاولى بالصفر من جهة اخرى

س) اذا كانت $(2 , 6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$ فجد قيمة $a , b \in R$ وبين نوع النقطة الحرجة . (2011 خارج)

$f(2) = 6$, $f`(2) = 0$

sol : $f(2) = 6 \rightarrow 6 = a - (2 - b)^4$ ... ... (1

$f`(x) = -4(x - b)^3$

$f`(2) = 0 \rightarrow -4(2 - b)^3 = 0$

$2 - b = 0 \rightarrow b = 2$ نعوضها في (1)

$6 = a - (2 - 2)^4 \rightarrow a = 6$

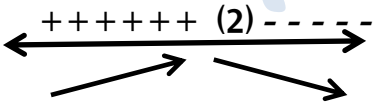
$f(x) = 6 - (x - 2)^4$, $f`(x) = -4(x - 2)^3$

$f``(x) = -12(x - 2)^2$

$f``(2) = -12(2 - 2)^2 = 0$

هذه الطريقة فاشلة في تحديد نوع النقطة الحرجة

اشارة f`(x)



$(2 , 6)$ نقطة نهاية عظمى محلية

ملاحظة

نقطة الانقلاب تحقق معادلة المنحني من جهة وتحقق مساواة المشتقة الثانية بالصفر من جهة اخرى

س) اذا علمت ان للدالة $f(x)=ax^3+bx^2$ نقطة انقلاب (-2 , 4) جد قيمتي a , b .

sol : $f(-2)=4 \rightarrow [4=-8a+4b] \div 4$

$-2a+b=1 \ldots\ldots (1$

$f`(x)=3ax^2+2bx \ , f``(x)=6ax+2b$

$f``(-2)=0$

$-12a+2b=0] \div 2$

$-6a+b=0 \rightarrow b=6a \ldots\ldots (2$

$-2a+6b=1$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1)

$4a=1 \rightarrow a=\frac{1}{4}$, $b=6a=(6)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

ملاحظة

نقطة التماس تحقق معادلة المنحني من جهة وتحقق مساواة المشتقة الاولى بميل المماس من جهة اخرى

س) اذا علمت ان للدالة $f(x)=ax^2+bx+1$ نقطة تماس (1 ,5) وميل المماس عندها يساوي (2) جد قيمتي a , b .

sol : $f(1)=5 \rightarrow 5=a+b+1 \rightarrow a+b=4 \ldots\ldots (1$

$f`(x)=2ax+b$

$f`(1)=2 \rightarrow 2=2a+b \rightarrow b=2-2a \ldots\ldots (2$

$a+2-2a=4$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1)

$-a=2 \rightarrow a=-2$, $b=2-2a=2-2(-2) \rightarrow b=2+4 \rightarrow b=6$

ملاحظة

اذا علم من النقطة الحرجة احداثيها السيني فقط فانها تحقق مساواة المشتقة الاولى بالصفر فقط

س) عين قيمتي الثابتين a , b لكي يكون لمنحني الدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ونهاية صغرى محلية عند $x=2$ ثم جد نقطة الانقلاب . (2012 د1 , 2013 د3)

sol : $f`(x)=3x^2+2ax+b$

$f`(-1)=0 \rightarrow 3-2a+b=0 \quad \dots\dots\dots(1$

$f`(2)=0 \rightarrow 12+4a+b=0 \rightarrow b=-12-4a \quad \dots\dots\dots(2$

$3-2a-12-4a=0$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1)

$-6a-9=0 \Rightarrow -6a=9 \rightarrow a=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}$

$b=-12-4\left(-\frac{3}{2}\right)=-12+6=-6$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x \rightarrow f`(x)=3x^2-3x-6 \rightarrow f``(x)=6x-3$

$f``(x)=0 \rightarrow 6x-3=0 \rightarrow 6x=3 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-3=\frac{1-3-24}{8}=\frac{-26}{8}=\frac{-13}{4}$, $\left(\frac{1}{2},\frac{-13}{4}\right)$ نقطة انقلاب مرشحة

اشارة $f``(x)$ $- - - - \left(\frac{1}{2}\right) + + + +$

تحدب تقعر

الدالة محدبة بالفترة $\left\{x : x<\frac{1}{2}\right\}$, الدالة مقعرة بالفترة $\left\{x : x>\frac{1}{2}\right\}$

نقطة انقلاب $\left(\frac{1}{2},\frac{-13}{4}\right)$

ملاحظة

اذا علم من نقطة الانقلاب احداثيها السيني فقط فانها تحقق مساواة المشتقة الثانية بالصفر فقط

س) لتكن $f(x)=x^2+\frac{a}{x}\ ,x\neq 0\ ,a\in R$ فجد قيمة a علما ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$, ثم بين ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

Sol : $f(x)=x^2+ax^{-1}$

$$f`(x)=2x-ax^{-2}\ \rightarrow f``(x)=2+2ax^{-3}=2+\frac{2a}{x^3}$$

$$f``(1)=0\ \rightarrow 2+2a=0\rightarrow 2a=-2\rightarrow a=-1$$

$$f(x)=x^2-\frac{1}{x}\ =x^2-x^{-1}$$

$$f`(x)=2x+x^{-2}\quad ,\quad f`(x)=0$$

$$2x+\frac{1}{x^2}=0\ ]\ .(x^2)\Rightarrow 2x^3+1=0\rightarrow 2x^3=-1$$

$$x^3=\frac{-1}{2}\ \rightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$f``(x)=2-2x^{-3}=2-\frac{2}{x^3}\rightarrow f``\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=2-\frac{2}{\frac{-1}{2}}=2+4=6>0$$

الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية ولا يمكن ان تمتلك نهاية عظمى محلية

س) لتكن $x\neq 0\ ,a\in R/\{0\}\ ,f(x)=x^2-\frac{a}{x}$ برهن ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية (2013 د1)

sol : $f(x)=x^2-\frac{a}{x}\rightarrow f(x)=x^2-ax^{-1}$

$$f`(x)=2x+ax^{-2}=2x+\frac{a}{x^2}\quad ,\quad f`(x)=0$$

$$2x+\frac{a}{x^2}=0]*x^2\rightarrow 2x^3+a=0\ \rightarrow 2x^3=-a\rightarrow x^3=-\frac{a}{2}\rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$$

$$f``(x)=2-2ax^{-3}=2-\frac{2a}{x^3}$$

$$f``(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}})=2-\frac{2a}{\frac{-a}{2}}=2+(2a)\left(\frac{2}{a}\right)=2+4=6>0$$

الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية ولا يمكن ان تمتلك نهاية عظمى محلية

ملاحظة

1) اذا كانت الدالة مقعرة لكل $x > a$ ومحدبة لكل $x < a$ او بالعكس وكانت الدالة مستمرة عند $x = a$ فيعني ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = a$.

2) واذا كانت الدالة متزايدة لكل $x > a$ ومتناقصة لكل $x < a$ او بالعكس وكانت الدالة مستمرة عند $x = a$ فيعني ان الدالة تمتلك نقطة حرجة عند $x = a$.

س) اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall x > 1$ ومحدبة $\forall x < 1$ وللدالة نقطة نهاية عظمى محلية هي (5 , 1-) فجد قيمة الثوابت $a , b , c \in R$. (2012 د3 , 2015 د1)

Sol : $f(-1) = 5 \rightarrow -a + b - c = 5 \quad \ldots\ldots\ldots (1$

$f`(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f`(-1) = 0 \rightarrow 3a - 2b + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2$

$-a + b - c = 5 \quad \ldots\ldots\ldots (1$

$\underline{3a - 2b + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2}$

$2a - b = 5 \quad \ldots\ldots\ldots (3$

$f``(x) = 6ax + 2b \quad , \quad f``(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \rightarrow 2b = -6a \rightarrow b = -3a \ldots (4$

$2a - (-3a) = 5 \Rightarrow 2a + 3a = 5 \rightarrow 5a = 5 \rightarrow a = 1$ نعوض معادلة (4) في معادلة (3)

$b = -3a = -3$

$-1 - 3 - c = 5 \Rightarrow -4 - c = 5 \rightarrow c = -9$ نعوض قيمة a و b في معادلة (1)

ملاحظة

ميل المستقيم اذا علمت معادلته $ax + by + c = 0$ يساوي $\frac{-a}{b} = \frac{\text{معامل x}-}{\text{معامل y}}$, ويمكن حساب ميل المستقيم عن طريق المشتقة الاولى لذلك المستقيم .

س)اذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعر في $\{x: x<1\}$ ومحدب في$\{x: x>1\}$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة (3 ,1) فجد قيم الاعداد الحقيقية a , b , c . (2014د1)

sol : $f(3)=1 \rightarrow 27a+9b+c=1$ ... ... (1

$y+9x=28 \rightarrow y=28-9x \rightarrow y`=-9=m$ ميل المستقيم

$f`(x)=3ax^2+2bx$

$f`(3)=m \rightarrow 27a+6b=-9$ ... ... (2

$f``(x)=6ax+2b$

$f``(1)=0 \rightarrow 6a+2b=0 \rightarrow 2b=-6a \rightarrow b=-3a$ ... ... (3

$27a+6(-3a)=-9$ (2) في معادلة (3) نعوض معادلة

$27a-18a=-9 \rightarrow 9a=-9 \rightarrow a=-1$ (3) نعوضها في معادلة

$b=(-3)(-1)=3$

$-27+27+c=1$ (1) في معادلة a , b نعوض قيمة

$c=1$

س) اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $g(x)=1-12x$ وكان كل من g , f متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي (1 ,-11) فجد قيمة الثوابت $a , b , c \in R$. (2014 د2)

sol : $f(1)=-11$, $f`(1)=m$ , $f`(1)=0$

$f(1)=-11 \rightarrow a+b+c=-11$ ... ... (1

$m=g`(x)=-12$

$f`(x)=3ax^2+2bx+c$

$\therefore f`(1)=m \rightarrow 3a+2b+c=-12$ ... ... (2

$\mp a \mp b \mp c=\pm 11$ ... ... (1

$\underline{3a+2b+c=-12}$ .....(2

$2a+b=-1$ ... ... (3

$f``(x)=6ax+2b$

$f``(1)=0 \rightarrow 6a+2b=0$

$2b=-6a \rightarrow b=-3a$ ... ... (4

$2a-3a=-1 \rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$ (3) في معادلة (4) نعوض معادلة

$b=-3a=-3(1)=-3$

$1-3+c=-11 \rightarrow c=-9$ (1) في معادلة b وقيمة a نعوض قيمة

س) المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $f(x)=ax^2+bx+c$ عند (2 ,-1) وكانت له نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2}$ جد قيمة $a,b,c\in R$ وما نوع النهاية . (2003د2 , 2014د4 انبار,2016 د1)

sol : $3x-y=7\Rightarrow y=3x-7\Rightarrow y'=3=m$

$f(2)=-1\rightarrow 4a+2b+c=-1$ ... ... (1

$f`(x)=2ax+b$

$f`(2)=m\rightarrow 4a+b=3$ ... ... (2

$f`\left(\frac{1}{2}\right)=0\rightarrow a+b=0\rightarrow a=-b$ ... ... (3

$-4b+b=3$ نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$-3b=3\Rightarrow b=-1$, $a=-b\Rightarrow a=-(-1)\rightarrow a=1$

$4-2+c=-1\Rightarrow 2+c=-1\rightarrow c=-3$ نعوض قيمة a وقيمة b في معادلة (1)

ملاحظة

اذا مر المنحني بنقطة فانها تحقق معادلته فقط .

س10) اذا كانت $f(x)=x^3-bx^2+cx$ يمر بالنقطة $(-2,-2)$ وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمتي $b,c\in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية . (1999 د2)

sol : $(-2,-2)\in f(x)\rightarrow f(-2)=-2\rightarrow -8-4b-2c=-2$ ... ... (1

$f`(x)=3x^2-2bx+c$, $f``(x)=6x-2b$

$f``(1)=0\rightarrow 6-2b=0\rightarrow b=3$ $\leftarrow$ الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$

$-8-12-2c=-2\rightarrow -2c=18\rightarrow c=-9$ $\leftarrow$ نعوض قيمة b في معادلة (1)

$f(x)=x^3-3x^2-9x$

$f`(x)=3x^2-6x-9$, $f`(x)=0\rightarrow [3x^2-6x-9=0]\div 3$

$x^2-2x-3=0\rightarrow (x-3)(x+1)=0$

either $x=3$, $f(3)=27-27-27=-27$

OR $x=-1$, $f(-1)=-1-3+9=5$

$(3,-27),(-1,5)$ نقاط حرجة

$f``(x)=6x-6$ , $f``(3)=18-6=12>0$, $f``(-1)=-6-6=-12<0$

$(-1,5)$ نقطة النهاية العظمى المحلية للدالة هي

ملاحظة

اذا كانت الدالة لها نهاية محلية (عظمى او صغرى او مجرد حرجة) قيمتها h فهذا يعني ان $y = h$

س) اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 , ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a , c \in R$. (2015 د2)

sol : $y = 8$

$f`(x) = 3ax^2 + 6x \quad , f`(x) = 0$

$3ax^2 + 6x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1$

$f``(x) = 6ax + 6$

$f``(1) = 0 \rightarrow 6a + 6 = 0 \rightarrow 6a = -6 \rightarrow a = -1$ نعوضها في معادلة (1)

$-3x^2 + 6x = 0 \rightarrow -3x(x - 2) = 0$

$-3x = 0 \rightarrow x = 0 \quad$ OR $\quad x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f``(x) = -6x + 6$

$f``(0) = 6 > 0 \quad , \quad f``(2) = -12 + 6 = -6 < 0$

$(2 , 8)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(2) = 8 \quad \Rightarrow \quad -8 + 12 + c = 8 \Rightarrow 4 + c = 8 \rightarrow c = 4$

س) اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة $c \in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه . (2012 خارج)

sol : $y = 6$

$f`(x) = 6x - 3x^2 \quad , \quad f`(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0$

$3x(2 - x) = 0 \quad , \quad x = 0 \quad$ OR $\quad x = 2$

$f``(x) = 6 - 6x \quad , \quad f``(0) = 6 - 0 = 6 > 0 \quad , \quad f``(2) = 6 - 12 = -6 < 0$

$(0 , 6)$ هي نقطة النهاية الصغرى $\in$ للمنحني

$6 = 0 - 0 + c \rightarrow c = 6$ نقطة النهاية الصغرى $(0 , 6)$ تحقق معادلة المنحني

$f(x) = 3x^2 - x^3 + 6$

$f`(x) = 6x - 3x^2 \rightarrow f``(x) = 6 - 6x$

$f``(x) = 0 \rightarrow 6 - 6x = 0 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 3 - 1 + 6 = 8$

اشارة $f``(x)$ + + + + + + + (1) - - - - - - -

تحدب تقعر

$(1,8)$ نقطة انقلاب وتماس

$m = f`(1) = 6 - 3 = 3$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ معادلة المماس

$(y - 8) = 3(x - 1) \rightarrow y - 8 = 3x - 3$

$3x - y + 5 = 0$ معادلة المماس

الدكتور محمد الربيعي

رسم الدوال

خطوات الحل

اولا :- ايجاد اوسع مجال للدالة :- اذا كانت الدالة كثيرة حدود أي انها لا تحتوي على متغير في المقام او تحت الجذر او في الاس فان اوسع مجال لها هو R , واذا كانت الدالة نسبية أي انها تحتوي على متغير في المقام فان اوسع مجال لها هو $R/\{$القيم التي تجعل المقام صفرا$\}$.

ثانيا :- ايجاد نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

1- نفرض $x=0$ مرة ونعوضها بالدالة الاصلية لاستنتاج قيمة y .

2- ثم نفرض $y=0$ مرة ونعوضها بالدالة الاصلية لاستنتاج قيمة x .

ثالثا :- ايجاد التناظر ان وجد ثم بيان نوعه

1- اذا كانت $f(-x)=f(x)$ فان المنحني متناظر حول محور الصادات .

2- اذا كانت $f(-x)=-f(x)$ فان المنحني متناظر حول نقطة الاصل .

ملاحظة

يكون المنحني متناظر حول محور الصادات اذا كانت جميع اسسه زوجية علما ان الثابت يعتبر باس زوجي , ويكون المنحني متناظر حول نقطة الاصل اذا كانت جميع اسسه فردية بشرط ان لا تكون دالة المنحني نسبية

رابعا :- ايجاد المحاذيات

1- اذا كانت الدالة كثيرة حدود فلا يوجد لها محاذيات .

2- اذا كانت الدالة نسبية فيمكن ان يكون لها نوعين من المحاذيات (عمودية وافقية) حسب التفصيل التالي:

a- المحاذي العمودي : هو $x=\{$القيم التي تجعل المقام صفرا$\}$ ويتم استنتاجه من مجال الدالة .

b- المحاذي الافقي ويكون حسب نوع الدالة النسبية

** اذا كانت الدالة النسبية بسطها ومقامها متغيران فان المحاذي الافقي هو $y=\frac{\text{معامل اعلى اس في البسط}}{\text{معامل اعلى اس في المقام}}$

** اذا كانت الدالة النسبية بسطها ثابتا فان المحاذي الافقي لها هو $y=0$

خامسا :- ايجاد النهايات العظمى والصغرى المحلية ونقاط الانقلاب ان وجدت

سادسا : رسم الدالة

س) ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

1) $f(x) = x^5$ (تمهيدي 2014 , د3 2013 , د1 2003 , د1 2000)

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع

$$if\ x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$if\ y = 0 \rightarrow x = 0$$

$(0,0)$ نقطة التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر

$$\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$$

$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$ المنحني متناظر حول نقطة الاصل

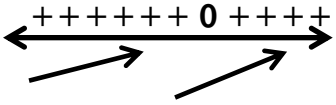
4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

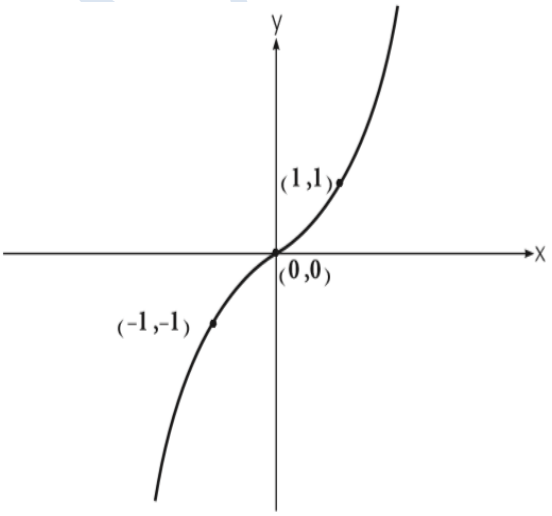
5)

$$f(x) = x^5 \rightarrow f`(x) = 5x^4 \quad , \quad f`(x) = 0$$

$$5x^4 = 0 \rightarrow x = 0$$

$f(0) = 0$, $(0,0)$ نقطة حرجة





$\{x : x > 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة

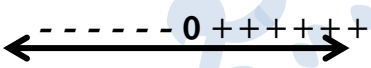
$\{x : x < 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$(0,0)$ مجرد نقطة حرجة

$f``(x) = 20x^3$ , $f``(x) = 0$

$20x^3 = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 0$, $(0,0)$ نقطة انقلاب مرشحة



تحدب تقعر

$\{x : x > 0\}$ الدالة مقعرة بالفترة , $\{x : x < 0\}$ الدالة محدبة بالفترة

$(0,0)$ نقطة انقلاب

$2)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (2015 تمهيدي)

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع

$if\ x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0,4)$

3) التناظر

$\forall x \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$

$f(-x) \neq -f(x)\ ,\ (-x) \neq f(x)$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الاصل لان

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

5)

$f`(x) = 3x^2 - 6x\ \ ,\ f`(x) = 0$

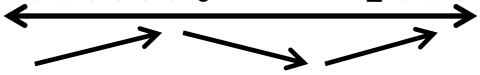
$3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0$

$3x = 0 \rightarrow x = 0\ \ OR\ \ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(0) = 4\ \ ,\ \ f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$

$(0,4),(2,0)$ نقاط حرجة

اشارة f`(x) ++++++ 0 - - - - - - 2 ++++++

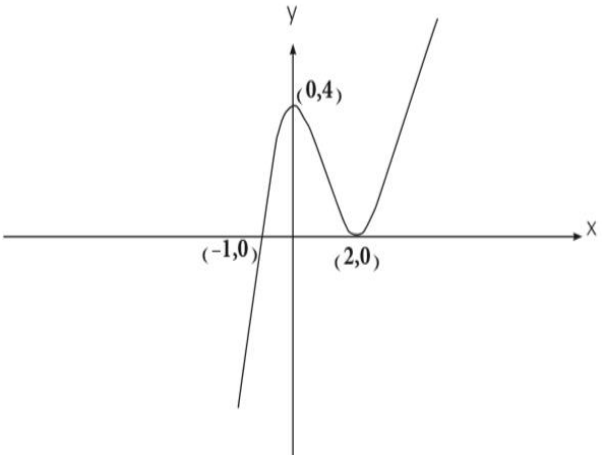


الدالة متزايدة بالفترتين $\{x : x > 2\}, \{x : x < 0\}$

الدالة متناقصة بالفترة $(0,2)$

نقطة نهاية عظمى محلية $(0,4)$

نقطة نهاية صغرى محلية $(2,0)$



$f``(x) = 6x - 6\ \ ,f``(x) = 0$

$\rightarrow 6x - 6 = 0 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 2\ \ ,\ \ (1,2)$ نقطة انقلاب مرشحة

اشارة f``(x) - - - - - - 1 ++++++

تحدب تقعر

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x < 1\}$,الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x > 1\}$

$\therefore$ نقطة انقلاب $(1,2)$

3) $f(x) = 10 - 3x - x^2$ (2013 تمهيدي)

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$$\text{if } x = 0 \rightarrow y = 10$$

$$\text{if } y = 0 \rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0 \rightarrow (2 - x)(5 + x) = 0$$

$$\text{either } x = 2 \quad \text{or} \quad x = -5$$

$(0, 10), (-5, 0), (2, 0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R$$

$$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 \rightarrow f(-x) = 10 + 3x - x^2 \neq f(x)$$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الاصل لان $f(-x) \neq -f(x)$, $f(-x) \neq f(x)$

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

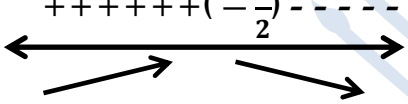
$$f(x) = 10 - 3x - x^2 \rightarrow f`(x) = -3 - 2x \ , \ f`(x) = 0$$

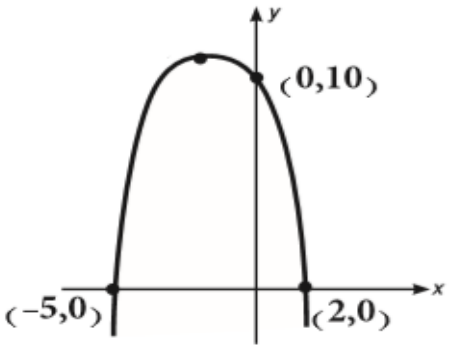
$$-3 - 2x = 0 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{40 + 18 - 9}{4} = \frac{49}{4} \quad , \left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$$ نقطة حرجة

اشارة f`(x)





$\left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\left\{x : x > -\frac{3}{2}\right\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f``(x) = -2 < 0$ الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

$4)\ f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \ \rightarrow y = 3$$

$$\text{if } y = 0 \ \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \ \rightarrow (x+3)(x+1) = 0$$

$$\text{either } \ x = -3 \quad \text{or} \quad x = -1$$

$(0\,,3)\,,(-3\,,0)\,,(-1\,,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر

$$\forall\, x \in\ , \exists (-x) \in R$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 3 \ \rightarrow f(-x) = x^2 - 4x + 3 \ \neq f(x)$$

$f(-x) \neq -f(x)\,,\ f(x) \neq f(-x)$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الاصل لان

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$$f`(x) = 2x + 4\ ,\ f`(x) = 0$$

$$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

$(-2\,,-1)$ نقطة حرجة

اشارة f`(x) - - - - - - (-2) + + + + + +

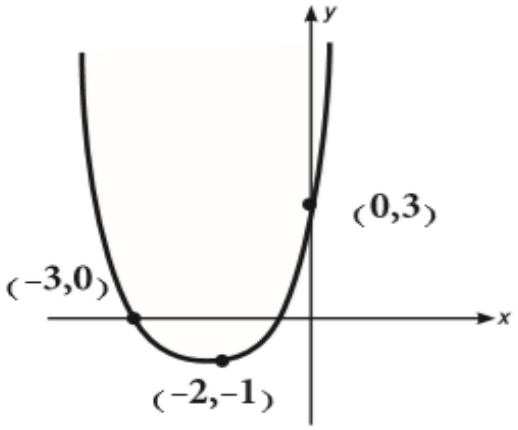
$\{x : x > -2\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x : x < -2\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(-2\,,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$$f``(x) = 2 > 0$$

الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب



$5)\ f(x) = (1-x)^3 + 1$ (2011 د2 , 2013 د2)

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع

$\text{if } x = 0 \ \rightarrow\Rightarrow y = 1 + 1 \Rightarrow y = 2$

$\text{if } y = 0 \rightarrow (1-x)^3 + 1 = 0 \rightarrow (1-x)^3 = -1$ بالجذر التكعيبي

$1 - x = -1 \rightarrow x = 2$

$(0\ ,2)\ ,(2\ ,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر

$\forall\ x\ \in R\ , \exists(-x) \in R$

$f(-x) = [1-(-x)]^3 + 1$

$= (1+x)^3 + 1 \neq -f(x)$ لا يوجد تناظر مع محمور الصادات او مع نقطة الاصل

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

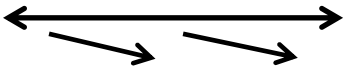
5) النهايات

$f`(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2 \ , f`(x) = 0$

$-3(1-x)^2 = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1 \quad , f(1) = 1$

$(1\ ,1)$ نقطة حرجة

اشارة f`(x) - - - - - - 1 + + + + + +



$\{x : x > 1\}, \{x : x < 1\}$ الدالة متناقصة بالفترتين

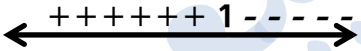
$(1\ ,1)$ مجرد نقطة حرجة

$f``(x) = -6(1-x)(-1) = 6(1-x) \quad , f`(x) = 0$

$6(1-x) = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1 \quad , f(1) = 1$

$(1\ ,1)$ نقطة انقلاب مرشحة

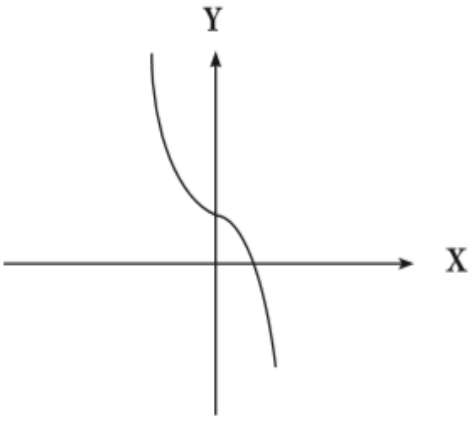
اشارة f``(x) + + + + + + 1 - - - - - -



تحدب تقعر

$\{x : x > 1\}$ الدالة محدبة بالفترة $\{x : x < 1\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$\therefore\ (1\ ,1)$ نقطة انقلاب



6) $f(x) = 6x - x^3$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\text{if } y = 0 \rightarrow 6x - x^3 = 0 \rightarrow x(6 - x^2) = 0$$

$$\text{either } x = 0 \quad \text{or} \quad 6 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

$(0,0), (\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R$$

$$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 \rightarrow f(-x) = -6x + x^3$$

$$= -f(x)$$ المنحني متناظر حول نقطة الاصل

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

5)

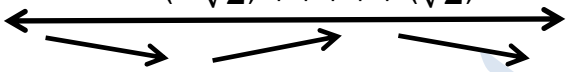
$$f`(x) = 6 - 3x^2, \quad f`(x) = 0$$

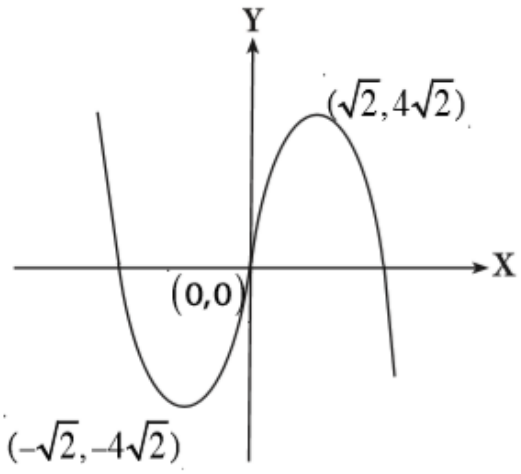
$$6 - 3x^2 = 0 \rightarrow 3x^2 = 6 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \quad \text{OR} \quad f(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نقاط حرجة

اشارة f`(x) - - - - - $(-\sqrt{2})$ + + + + + $(\sqrt{2})$ - - - - -





$\{x : x > \sqrt{2}\}, \{x, x < -\sqrt{2}\}$ الدالة متناقصة بالفترتين

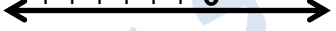
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ الدالة متزايدة بالفترة

$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نهاية عظمى , $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نهاية صغرى

$$f``(x) = -6x, \quad f``(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

$f(0) = 0$, $(0,0)$ نقطة انقلاب مرشحة

اشارة f``(x) + + + + + + 0 - - - - - -



تحدب تقعر

$\{x : x > 0\}$ الدالة محدبة بالفترة , $\{x : x < 0\}$ الدالة مقعرة بالفترة

$(0,0)$ نقطة انقلاب

7) $f(x) = 2x^2 - x^4$ (2د 2012)

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\text{if } y = 0 \rightarrow 2x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(2 - x^2) = 0$$

$$\text{either } x = 0 \quad \text{or} \quad x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R$$

$$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 \rightarrow f(-x) = 2x^2 - x^4$$
$$= f(x)$$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

5)

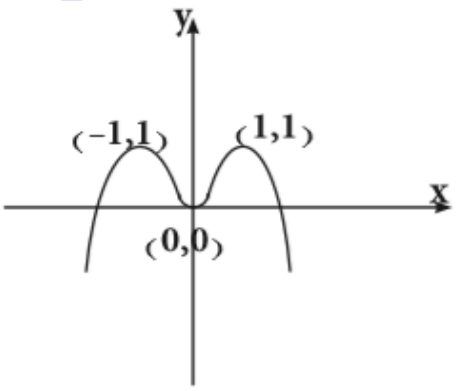
$$f(x) = 2x^2 - x^4 \rightarrow f`(x) = 4x - 4x^3 \quad , \quad f`(x) = 0$$

$$4x - 4x^3 = 0 \rightarrow 4x(1 - x^2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{OR} \quad 1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1 \quad , \quad f(-1) = 1$$

$(0,0), (1,1), (-1,1)$ نقاط حرجة



اشارة f`(x) ----- (0) +++++ (1) ----- +++++(-1)

الدالة متناقصة بالفترتين $\{x : x > 1\}, \{x : x \in (-1,0)\}$

الدالة متزايدة بالفترتين $\{x : x < -1\}, \{x ; x \in (0,1)\}$

$(0,0)$ نهاية صغرى , $(1,1)$ نهاية عظمى , $(-1,1)$ نهاية عظمى

$$f``(x) = 4 - 12x^2 \quad , \quad f``(x) = 0 \rightarrow 4 - 12x^2 = 0 \rightarrow 12x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \quad , \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ نقاط انقلاب مرشحة

اشارة f``(x) ------ $(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ ++++++ $(\frac{1}{\sqrt{3}})$ ------

تحدب تقعر تحدب

الدالة مقعرة بافترة $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, الدالة محدبة بالفترتين $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$ نقاط انقلاب

8) $f(x)=(x+2)(x-1)^2$ (1د 2008 , 1د 2005)

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع

$$\text{if } x=0 \rightarrow y=2$$

$$\text{if } y=0 \rightarrow (x+2)(x-1)^2=0$$

$$\text{either } x+2=0 \rightarrow x=-2 \quad \text{or} \quad (x-1)^2=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$$

$(0,2),(-2.0),(1,0)$ نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر

$$\forall x \in R \ , \exists(-x) \in R$$

$f(-x)=(-x+2)(-x-1)^2=-(x-2)(-x-1)^2 \neq -f(x)$ لا يوجد تناظر

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية

5)

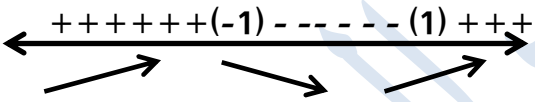
$$f(x)=(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$$

$$f`(x)=(x+2)(2x-2)+(x^2-2x+1)(1)=2x^2-2x+4x-4+x^2-2x+1$$

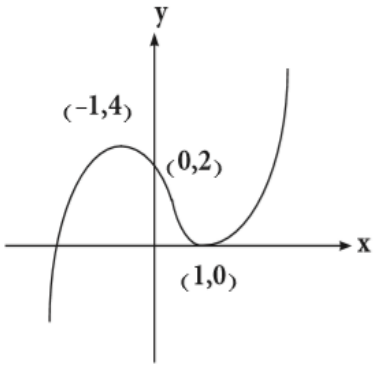
$$f`(x)=3x^2-3 , \quad f`(x)=0 \rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow 3x^2=3 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$$

$$x=1 \rightarrow f(1)=0 \quad \text{OR} \quad x=-1 \rightarrow f(-1)=4$$

$(1,0),(-1,4)$ نقاط حرجة



اشارة f`(x)



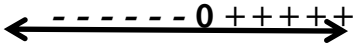
$\{x: x>1\}$, $\{x: x<-1\}$ الدالة متزايدة بالفترتين

$\{x: x \in (-1,1)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$(1,0)$ نهاية صغرى , $(-1,4)$ نهاية عظمى

$f``(x)=6x$ , $f``(x)=0 \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$

$f(0)=2$, $(0,2)$ نقطة انقلاب مرشحة



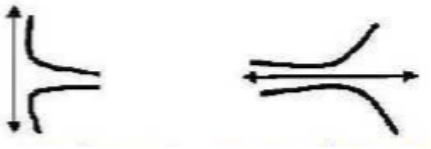
اشارة f``(x)

تقعر تحدب

$\{x: x>0\}$ الدالة مقعرة بالفترة , $\{x: x<0\}$ الدالة محدبة بالفترة

$(0,2)$ نقطة انقلاب

ملاحظة نقطة الشروع في الرسم بالنسبة للمحاذي الافقي تكون من اقصى اليسار اما متزايدة ومقعرة او متناقصة ومحدبة , اما نقطة الشروع بالنسبة للمحاذي العمودي تكون من جهة اليمين فاما تكون متناقصة ومقعرة او تكون متزايدة ومحدبة , وفي حالة عدم تحقق هذا الشرط فانها تعتبر اشارة على وجود خطأ في الحل , حسب المخطط التالي



ملاحظة أي دالة (ضمن المنهج فقط) تحتوي على محاذي عمودي فان مشتقتها الاولى والثانية تكون دالة نسبية بسطها ثابتا أي انها لا تحتوي على نقاط حرجة او انقلاب

س) ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

$$1)\ f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة $= R/\{-1\}$

2) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$$if\ \ x=0\ \rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$if\ \ \ y=0\rightarrow 0=\frac{3x-1}{x+1}\rightarrow 3x-1=0\rightarrow x=\frac{1}{3}$$

نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,-1),\left(\frac{1}{3},0\right)$

3) التناظر : بما ان العدد (1) ينتمي الى مجال الدالة لكن العدد (1 -) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا متناظر مع نقطة الاصل

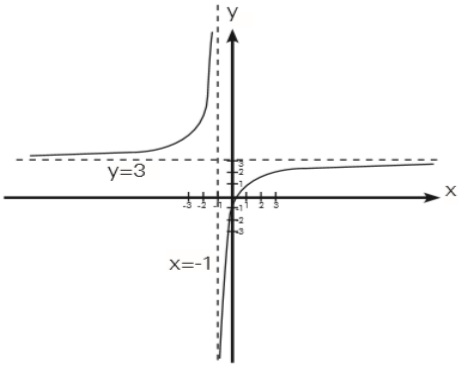
4) المحاذيات : المحاذي العمودي $x = -1$, $y=\frac{3x-1}{x+1}$

$$yx+y=3x-1\ \rightarrow yx-3x=-1-y\ \rightarrow x(y-3)=-1-y$$

المحاذي الافقي $y-3=0\rightarrow y=3$, $x=\frac{-1-y}{y-3}$

$$f`(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}\neq 0$$

اشارة f`(x) ++++++(-1)++++++ أي انه لا توجد نقاط حرجة



$\{x : x > -1\}$,$\{x : x < -1\}$ الدالة متزايدة بالفترتين

$f`(x) = 4(x+1)^{-2}$

$f``(x) = -8(x+1)^{-3}(1) = \frac{-8}{(x+1)^3} \neq 0$

اشارة f``(x) ++++++ (-1) - - - - - -

تحدب تقعر

أي انه لا توجد نقاط انقلاب

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x > -1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x < -1\}$

ملاحظة

أي دالة نسبية مشتقتها الاولى او الثانية دالة نسبية بسطها ثابتا فلا توجد لها نقاط حرجة او انقلاب لعدم امكانية مساواتها بالصفر ويجب تثبيت قيمة المحاذي العمودي على خطي الاعداد الاول والثاني حصرا على شكل فجوة

$2)\ f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة $= R/\{-1\}$

2) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$if\ x = 0 \rightarrow y = \frac{0-1}{0+1} = -1$

$if\ y = 0 \rightarrow 0 = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0, -1), (1, 0)$

3) التناظر : بما ان العدد (1) ينتمي الى مجال الدالة لكن العدد (1 -) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

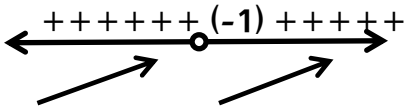
4) المحاذيات :

المحاذي العمودي $x = -1$, $y = \frac{x-1}{x+1}$

$yx + y = x - 1 \rightarrow yx - x = -1 - y \rightarrow x(y-1) = -1 - y$

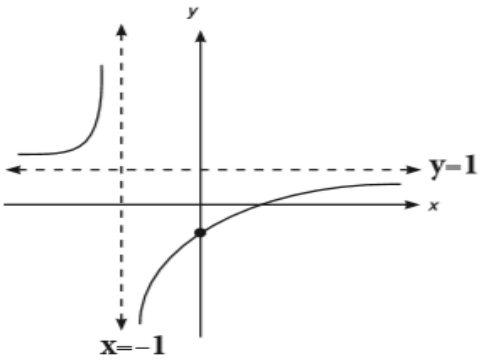
$x = \frac{-1-y}{y-1} \rightarrow y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$ المحاذي الافقي

$$f`(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\neq 0$$



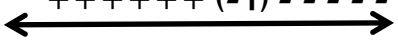
اشارة f`(x)

أي انه لا توجد نقاط حرجة



الدالة متزايدة بالفترتين $\{x: x<-1\}$,$\{x: x>-1\}$

$$f``(x)=\frac{(x+1)^2.(0)-2.(2)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}\neq 0$$



اشارة f``(x)

أي انه لا توجد نقاط انقلاب

تحدب تقعر

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x<-1\}$ الدالة محدبة بالفترة $\{x: x>-1\}$

$$3)\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$$if\ x=0\rightarrow y=0$$

نقطة التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,0)$,$if\ y=0\rightarrow x^2=0\rightarrow x=0$

3) التناظر :

$$\forall x\in R\ ,\exists(-x)\in R$$

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المحاذيات :

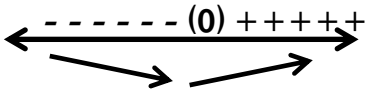
$y=\frac{x^2}{x^2+1}$,$x^2+1\neq 0$ لا يوجد محاذي عمودي

$$yx^2+y=x^2\rightarrow yx^2-x^2=-y\rightarrow x^2(y-1)=-y$$

$x^2=\frac{-y}{y-1}\rightarrow y-1=0\rightarrow y=1$ المحاذي الافقي

$$f`(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow 2x=0\rightarrow x=0$,$f(0)=0$ $\rightarrow (0,0)$ نقطة حرجة



$\{x : x > 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة , $\{x : x < 0\}$ الدالة متناقصة بالفترة , $(0,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

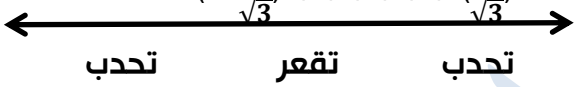
$$f``(x) = \frac{(x^2+1)^2.2 - 2x.(2)(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f``(x) \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \to 2-6x^2 = 0 \to 6x^2 = 2 \to x^2 = \frac{1}{3} \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \quad , \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$$ نقاط انقلاب مرشحة

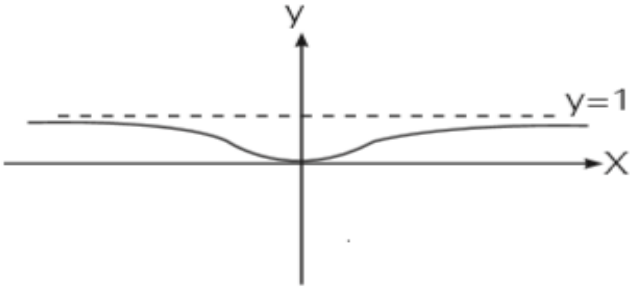


تحدب تقعر تحدب

$\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ الدالة محدبة بالفترتين

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ الدالة مقعرة بالفترة

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{4}\right)$ نقاط انقلاب



$$4)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة = R (1997 د1)

2) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$$if\ x=0\ \rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$if\ y=0\rightarrow 0=\frac{x^2-1}{x^2+1}\rightarrow x^2-1=0\rightarrow x=\pm 1$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,-1),(-1,0),(1,0)$

3) التناظر :

$$\forall x\in R\ ,\exists(-x)\in R$$

$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)$ متناظر حول محور الصادات

4) المحاذيات :

$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}\ ,x^2+1\neq 0$ لا يوجد محاذي عمودي

$$yx^2+y=x^2-1\ \rightarrow yx^2-x^2=-1-y\ \rightarrow x^2(y-1)=-1-y$$

$$x^2=\frac{-1-y}{y-1}\rightarrow y-1=0\rightarrow y=1$$ المحاذي الافقي

$$f`(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$\frac{4x}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow 4x=0\rightarrow x=0$, $f(0)=\frac{-1}{1}=-1$, $(0,-1)$ نقطة حرجة

اشارة f`(x) ------ (0) ++++++

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x<0\}$, الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x>0\}$

$(0,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$$f``(x)=\frac{(x^2+1)^2.4-4x.(2)(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4(x^2+1)^2-16x^2(2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f``(x)\frac{(x^2+1)[4(x^2+1)-16x^2]}{(x^2+1)^4}=\frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}=0\rightarrow 4-12x^2=0\rightarrow 12x^2=4\rightarrow x^2=\frac{1}{3}\rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y=\frac{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2-1}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

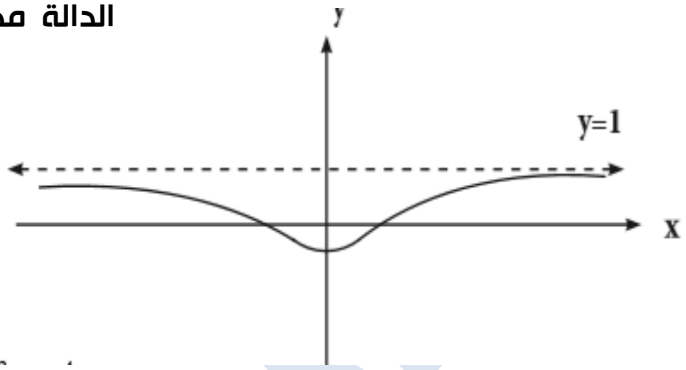
اشارة f``(x) $\text{- - - - - - } (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ + + + + + + } (\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ - - - - - -}$

تحدب تقعر تحدب

الدالة محدبة بالفترتين $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} , \left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

نقاط انقلاب $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , -\frac{1}{2}\right) , \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} , -\frac{1}{2}\right)$



5) $f(x) = \frac{1}{x}$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة $R/\{0\}$ (2012 تمهيدي)

2) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$if\ x = 0 \rightarrow y =$ غير معرف

$if\ y = 0 \rightarrow x =$ غير معرف

$x \neq 0 , y \neq 0$ لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر :

$\forall x \in R , \exists(-x) \in R$

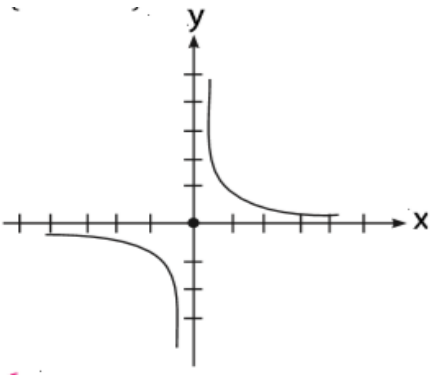
$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ المنحني متناظر حول نقطة الاصل

4) المحاذيات : $y = 0$ المحاذي الافقي , $x = 0$ المحاذي العمودي

$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f`(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$-\frac{1}{x^2} \neq 0$ اي انه لا توجد نقاط حرجة

اشارة f`(x) $\text{- - - - - - } (0) \text{ - - - - - -}$



الدالة متناقصة بالفترتين $\{x : x > 0\} , \{x : x < 0\}$

$f``(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$\frac{2}{x^3} \neq 0$ أي انه توجد لا نقاط انقلاب

اشارة f``(x) $\text{- - - - - - } (0) \text{ + + + + + +}$

تحدب تقعر

الدالة محدبة بالفترة $\{x : x < 0\}$, الدالة مقعرة بالفترة $\{x : x > 0\}$

$$6)\ f(x)=\frac{6}{x^2+3}$$

الحل : 1) اوسع مجال للدالة R (2015 د2 خارج)

2) نقاط التقاطع :

$$if\ x=0\ \rightarrow\ y=\frac{6}{3}=2\ ,\ \ y\neq 0$$

$(0\ ,2)$ نقطة التقاطع مع المحور الصادي

3) التناظر:

$$\forall\, x\ \in R\ ,\exists(-x)\in R$$

$$f(-x)=\frac{6}{(-x)^2+3}=\frac{6}{x^2+3}=f(x)$$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المحاذيات :- لا يوجد محاذي عمودي لان $x^2+3\neq 0$

$$y=\frac{6}{x^2+3}\Rightarrow yx^2+3y=6\Rightarrow yx^2=6-3y\Rightarrow x^2=\frac{6-3y}{y}\ ,y=0$$ المحاذي الافقي

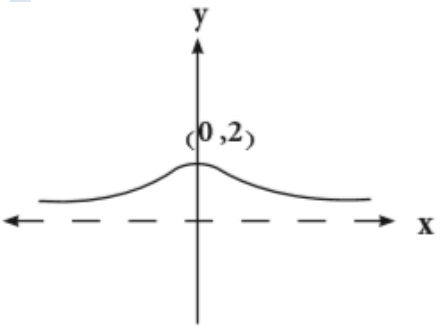
$$f(x)=\frac{6}{(x^2+3)}=6(x^2+3)^{-1}$$

$$f`(x)=-6(x^2+3)^{-2}.(2x)=-12x(x^2+3)^{-2}=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{-12x}{(x^2+3)^2}=0\rightarrow -12x=0\rightarrow x=0$$

$(0,2)$ نقطة حرجة , $f(0)=2$

اشارة f`(x) +++++ (0) - - - - -



الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x>0\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x<0\}$

$(0\ ,2)$ نهاية عظمى محلية

$$f``(x)=\frac{(x^2+3)^2.(-12)-(-12x).2(x^2+3).2x}{(x^2+3)^4}=\frac{-12(x^2+3)^2+48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$f``(x)=\frac{(x^2+3)[-12(x^2+3)+48x^2]}{(x^2+3)^4}=\frac{-12x^2-36+48x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}$$

$$\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}=0\rightarrow 36x^2-36=0\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm 1$$

$$f(1)=\frac{6}{1+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\ ,\qquad f(-1)=\frac{6}{(-1)^2+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

اشارة f``(x) +++++ (-1) - - - - - (1) +++++

تقعر تحدب تقعر

الدالة محدبة بالفترة $(1\ ,-1)$, الدالة مقعرة بالفترتين $\{x:x>1\},\{x:x<-1\}$

نقاط انقلاب $\left(1,\frac{3}{2}\right),\left(-1,\frac{3}{2}\right)$

ملاحظة

لا يمكن رسم أي دالة الا اذا كانت دالة صريحة أي بالصورة y=f(x) كما في السؤال ادناه .

س) باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني البياني للدالة $yx^2=1$.

الحل :

$yx^2=1 \rightarrow y=\frac{1}{x^2}$

1) اوسع مجال للدالة $R/\{0\}$

2) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$if\ x=0 \rightarrow y=$ غير معرف

$if\ y=0 \rightarrow x=$ غير معرف

$x\neq 0\ , y\neq 0$ لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين

3) التناظر :

$\forall x\in R\ , \exists(-x)\in R$

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$ المنحني متناظر حول المحور الصادات

4) المحاذيات :

$y=0$ المحاذي الافقي , $x=0$ المحاذي العمودي

5) النهايات

$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$

$f`(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

$-\frac{2}{x^3}\neq 0$ اي انه لا توجد نقاط حرجة

اشارة f`(x) + + + + + + (0) - - - - - -

الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x>0\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x<0\}$

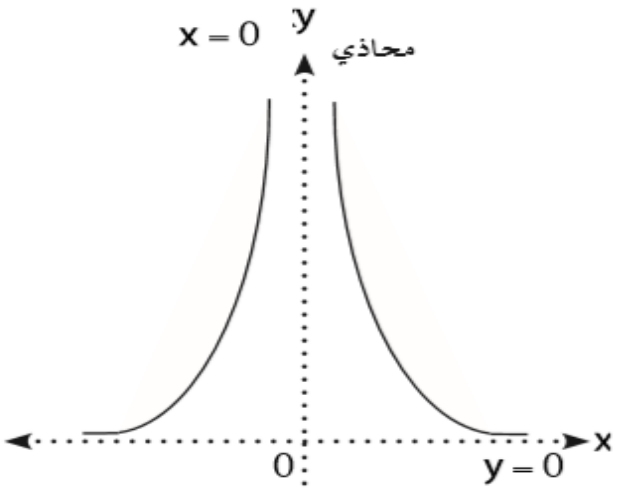
$f``(x)=6x^{-4}=\frac{6}{x^4}$

$\frac{6}{x^4}\neq 0$ أي انه لاتوجد نقاط انقلاب

اشارة f``(x) + + + + + + (0) + + + + + +

تقعر تقعر

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x: x>0\},\{x: x<0\}$



تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

خطوات الحل :

1) نفرض المتغيرات بأسماء معينة .

2) ايجاد (علاقة) بين المتغيرات بالاستفادة من أي عدد في السؤال لجعل احد المتغيرات بدلالة الاخر .

3) كتابة القاعدة (الدالة) الملازمة لكلمة اكبر او اصغر او احدى مرادفاتها .

4) وضع القاعدة (الدالة) بدلالة متغير واحد بالاستفادة من الخطوة (2) , أي دمج (2) مع (3) .

5) اشتقاق القاعدة ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة لايجاد قيمة المتغير الموحد .

6) الرجوع الى الخطوتين (2) ثم (1) والتعويض عن المعلوم لايجاد المجهول .

7) عرض النتائج على خط الاعداد او المشتقة الثانية للتأكد من كون الناتج اكبر او اصغر ما يمكن علما ان اغلب الاسئلة يتم اختيار القيمة المطلوبة الناتجة من الخطوة (5) ذهنيا دون الحاجة الى الخطوة (7) .

س) جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن .

الحل : نفرض العدد x ومربعه x^2

$$h = x + x^2$$

$$h` = 1 + 2x \quad , \quad h` = 0$$

$$1 + 2x = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$h`` = 2 > 0$ العدد الناتج هو اصغر ما يمكن

س) جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبرما يمكن.(2014 د4 انبار)

الحل : نفرض العدد الاول x ونفرض العدد الثاني y

$$x + y = 75 \rightarrow x = 75 - y$$

$$h = x\,y^2 \rightarrow h = (75 - y)y^2 = 75y^2 - y^3$$

$$h` = 150y - 3y^2 \quad , \quad h` = 0$$

$$150y - 3y^2 = 0 \rightarrow 3y(50 - y) = 0$$

$y = 0$ يهمل or $y = 50$

$$x = 75 - 50 = 25$$

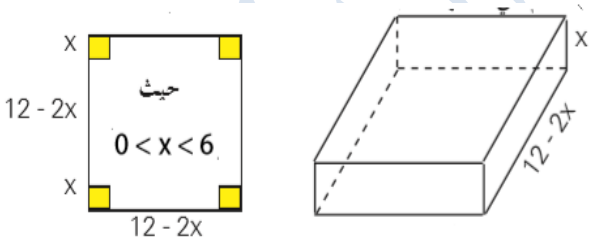
العددان هما $\{50 , 25\}$

س) صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12 cm وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الابعاد من اركانها الاربعة ثم ثنيت الاجزاء البارزة منها .ما هو الحجم الاعظم لهذه العلبة

الحل : نفرض ان طول ضلع المربع المقطوع $= x$

بعد ثني الاجزاء البارزة تكونت علبة على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة طول ضلع القاعدة يساوي $12 - 2x$ وارتفاعها يساوي x

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = (12 - 2x)^2 . x$



$$V = (144 - 48x + 4x^2).x$$
$$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$$
$$V` = 144 - 96x + 12x^2 \quad , V` = 0$$
$$144 - 96x + 12x^2 = 0 \;] \div 12$$
$$12 - 8x + x^2 = 0 \Rightarrow (6 - x)(2 - x) = 0$$

$x = 6$ يهمل OR $x = 2$ طول ضلع المربع المقطوع

$12 - 4 = 8$ طول ضلع القاعدة , $2 =$ الارتفاع

$V = (8)^2 (2) \rightarrow V = 128 \ cm^3$

جدول بسيط يبين كيفية استنتاج القاعدة من السؤال :-

ت	العبارة	القاعدة
1	جد مساحة اكبر مستطيل	مساحة المستطيل
2	جد محيط اكبر مستطيل	مساحة المستطيل
3	جد اقل محيط لمستطيل	محيط المستطيل
4	جد بعدى مستطيل محيطه اصغر ما يمكن	محيط المستطيل
5	جد بعدى مستطيل مساحته اكبر ما يمكن	مساحة المستطيل
6	جد قطر اكبر مستطيل	مساحة المستطيل
7	جد اكبر قطر لمستطيل	قطر لمستطيل
8	جد اكبر اسطوانة	حجم الاسطوانة
9	جد مساحة اكبر اسطوانة	حجم الاسطوانة
10	جد اقل مساحة لاسطوانة	المساحة السطحية للاسطوانة
11	جد بعدى اسطوانة مساحتها الجنبية اكبر ما يمكن	المساحة الجانبية للاسطوانة
12	جد نقطة تكون اقرب ما يمكن الى نقطة معلومة	قانون المسافة بين نقطتين
13	جد اقصر سلم	طول السلم

ملاحظة

1) أي بعد من الابعاد اذا كان مقسم الى قسمين متساويين يفضل ان يفرض بدلالة الضعف .

2) كلمة اكبر او اصغر للشكل الهندسي اذا لم يحدد قانونهما الصريح فانها تعني مساحة بالنسبة للشكل الهندسي ذات بعدين وتعني حجم بالنسبة للاشكال ثلاثية الابعاد , اما اذا ذكر القانون في السؤال فانه يمثل قاعدة اذا جاء بعد كلمة اكبر او اصغر او جاء قبلها مرتبطا بالهاء الموصلة او ما ينوب عنها .

3) لايجاد اكبر مستطيل داخل مثلث يجب ان يعلم في ذلك المثلث طول قاعدته وارتفاعه فاذا كان المثلث متساوي الساقين وعلم طول كل من ساقيه وطول قاعدته فيمكن حساب ارتفاعه حسب فيثاغورس وكذلك الحال اذا علم طول كل من ساقيه وارتفاعه .

4) اذا تشابه مثلثان تناسبت اطوال اضلاعهما وكذلك تناسب ارتفاعيهما .

اهم الحالات التي يمكن ان يكون فيها السؤال في موضوع التطبيقات

اولا :- اذا علم قانوني او معطيين في السؤال احدهما بقيمة معلومة والاخر ملازم لكلمة اكبر او اصغر او احدى مرادفاتهما فيكون القانون الملازم للقيمة المعلومة (علاقة السؤال) التي غالبا ما نجعل فيها احد المتغيرين بدلالة الاخر , اما القانون الملازم لكلمة اكبر او اصغر فيكون (قاعدة السؤال) التي يتم اشتقاقها بعد دمجها مع العلاقة لتكون بدلالة متغير واحد .

س) جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$. (2005 د1 , 2006 د2, 2014 تمهيدي)

الحل : نفرض ان طول المستطيل x , عرض المستطيل y , محيط المستطيل p

$16 = x\,y \rightarrow y = \frac{16}{x}$ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$p = 2(x + y)$ محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض)

$p = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = 2(x + 16x^{-1})$

$p` = 2(1 - 16x^{-2})$ , $p` = 0$

$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$, $y = \frac{16}{x} = \frac{16}{4} = 4$

$p = 2(4 + 4) = 16\ cm$

س) علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(125\pi)cm^3$ جد ابعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن .

الحل : نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = r , نفرض ان ارتفاع الاسطوانة = h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi r^2 h$

$125\pi = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{125}{r^2}$

المساحة السطحية (بدون غطاء) = المساحة الجانبية (محيط القاعدة × الارتفاع) + مساحة القاعدة

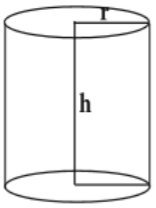
$A = 2\pi rh + \pi r^2 \rightarrow A = 2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right) + \pi r^2 \rightarrow A = \pi(250r^{-1} + r^2)$

$A` = \pi(-250r^{-2} + 2r)\ ,\ A` = 0$

$\frac{-250}{r^2} + 2r = 0\ ] . r^2 \rightarrow -250 + 2r^3 = 0$

$2r^3 = 250 \rightarrow r^3 = 125$

$r = 5\ cm$ نصف قطر قاعدتها , $h = \frac{125}{25} = 5\ cm$ ارتفاعها



س) خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ m^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علما ان الخزان ذو غطاء كامل .

الحل : نفرض ان عرض (y) أي ان طول ضلع الخزان (2y) , نفرض ارتفاع الخزان y

المساحة السطحية للخزان = محيط القاعدة × الارتفاع + 2 × (مساحة القاعدة)

$108 = 2(2y + y)h + 2(2y)(y) \rightarrow 108 = 6yh + 4y^2\ ] \div 2$

$54 = 3yh + 2y^2 \rightarrow 3yh = 54 - 2y^2 \rightarrow h = \frac{54 - 2y^2}{3y}$

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = 2y(y)(h) = 2y^2 h$

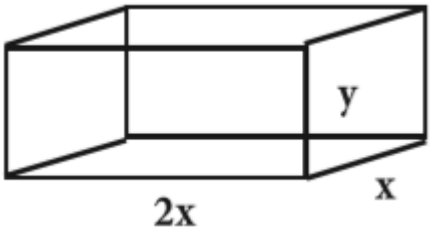
$V = 2y^2(\frac{54-2y^2}{3y}) \rightarrow V = \frac{2}{3}(54y - 2y^3)$

$V` = \frac{2}{3}(54 - 6y^2)\ , V` = 0 \rightarrow (54 - 6y^2) = 0$

$6y^2 = 54 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = 3$

$y = 3\ cm$ عرض الخزان , $\therefore 2y = 6\ cm$ طول ضلع الخزان

$h = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9} = 4\ cm$ ارتفاع الخزان



س) مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60 cm اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع . (3د 2013)

الحل : نفرض نصف قطر الدائرة = r , نفرض طول ضلع المربع = x

العلاقة : محيط المربع + محيط الدائرة = 60 cm

$$60 = 4x + 2\pi r] \div 2 \rightarrow 30 = 2x + \pi r \leftarrow$$

$$\pi r = 30 - 2x \rightarrow r = \frac{1}{\pi}(30 - 2x)$$

الدالة هي : مساحة الدائرة + مساحة المربع

$$A = x^2 + \pi r^2$$

$$A = x^2 + \pi \left[\frac{1}{\pi}(30 - 2x)\right]^2 \rightarrow A = x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$$

$$A` = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) \quad , \quad A` = 0 \rightarrow 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) = 0\ ] . \frac{\pi}{2}$$

$$\pi x + 4x - 60 = 0 \rightarrow x(\pi + 4) = 60 \rightarrow x = \frac{60}{\pi + 4}\ cm$$

$$\therefore \quad r = \frac{1}{\pi}(30 - \frac{120}{\pi + 4})$$

$$r = \frac{30}{\pi + 4}\ cm \quad , \quad x = 2r$$ اي ان

$$A`` = 2 + \frac{1}{\pi}(8) > 0$$ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

الدكتور محمد الربيعي

ثانيا :- اذا وجد مثلث قائم الزاوية وعلم احد اضلاعه وكان الضلعين الاخرين بعدي السؤال او اجزاء منها فان العلاقة في السؤال تكون فيثاغورس .

س) جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}cm$.

الحل : نفرض ان طول القاعدة = 2x , الارتفاع = h

$(8\sqrt{2})^2 = x^2 + h^2 \rightarrow 128 = x^2 + h^2$

$x^2 = 128 - h^2 \rightarrow x = \sqrt{128 - h^2}$

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة × الارتفاع

$A = \frac{1}{2} 2x \,.\, h = x\,h$

$A = h\sqrt{128 - h^2} \rightarrow A = \sqrt{h^2}\sqrt{128 - h^2} \rightarrow A = \sqrt{128h^2 - h^4}$

$A` = \frac{256h - 4h^3}{2\sqrt{128h^2 - h^4}}$ , $A` = 0 \rightarrow \frac{256h - 4h^3}{2\sqrt{128h^2 - h^4}} = 0$

$256h - 4h^3 = 0 \rightarrow 4h(64 - h^2) = 0$

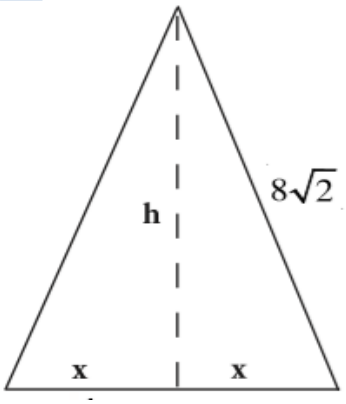
$4h = 0 \rightarrow h = 0$ يهمل

$OR\ \ 64 - h^2 = 0 \rightarrow h^2 = 64 \rightarrow h = 8$

$x = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} \rightarrow x = 8$

$2x = 16\ cm$ طول القاعدة , $h = 8$ الارتفاع

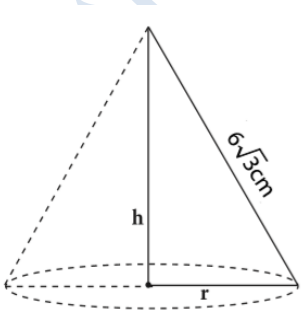
$A = 8 \times 8 = 64\ \ cm^2$



س) جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}cm$ دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين . (2011 د1 , 2014 د1)

الحل : عند دوران المثلث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين

نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = r , ارتفاع المخروط = h



$(6\sqrt{3})^3 = r^2 + h^2 \rightarrow 108 = x^2 + h^2 \rightarrow r^2 = 108 - h^2$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \frac{\pi}{3}(108 - h^2)h \rightarrow V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$

$V` = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) , V` = 0 \rightarrow 108 - 3h^2 = 0$

$3h^2 = 108] \div 3 \rightarrow h^2 = 36 \rightarrow h = 6$

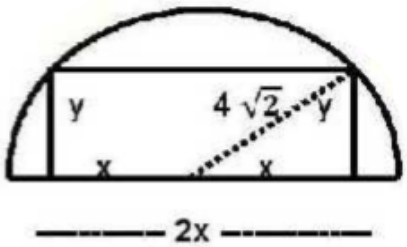
$r^2 = 108 - h^2 \Rightarrow r^2 = 108 - 36 \Rightarrow r^2 = 72 \Rightarrow r = \sqrt{72} \Rightarrow r = 6\sqrt{2}$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(72)(6) = 144\pi \ cm^3$

س) جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}cm$.

الحل : نفرض ان الطول = 2x والعرض = y

مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين x , y مثلث قائم الزاوية



$(4\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 32 = x^2 + y^2$

$x^2 = 32 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{32 - y^2}$

$A = 2x \, . y$ مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 2y\sqrt{32 - y^2}$

$A = 2\sqrt{y^2}\sqrt{32 - y^2} \rightarrow A = 2\sqrt{32y^2 - y^4}$

$A` = \frac{2(64y - 4y^3)}{2\sqrt{32y^2 - y^4}} \rightarrow A` = 0 \rightarrow \frac{2(64y - 4y^3)}{2\sqrt{32y^2 - y^4}} = 0$

$64y - 4y^3 = 0 \rightarrow 4y(16 - y^2) = 0$

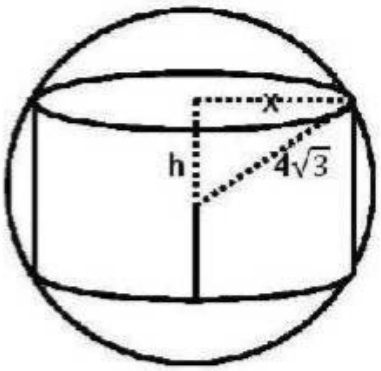
$4y = 0 \rightarrow y = 0$ يهمل OR $16 - y^2 = 0 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = 4$

$x = \sqrt{32 - y^2} = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4$

$2x = 8 \ cm$ الطول , $y = 4 \ cm$ العرض

س) جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}cm$. (3د 2012)

الحل : نفرض نصف قطر الاسطوانة = x , نفرض ارتفاع الاسطوانة = 2h



$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2 \rightarrow 48 = x^2 + y^2$

$x^2 = 48 - h^2$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = \pi x^2 (2h) = 2\pi x^2 h$

$V = 2\pi h(48 - h^2) \rightarrow V = 2\pi(48h - h^3)$

$V` = 2\pi(48 - 3h^2)$ , $V` = 0 \rightarrow 2\pi(48 - 3h^2) = 0$

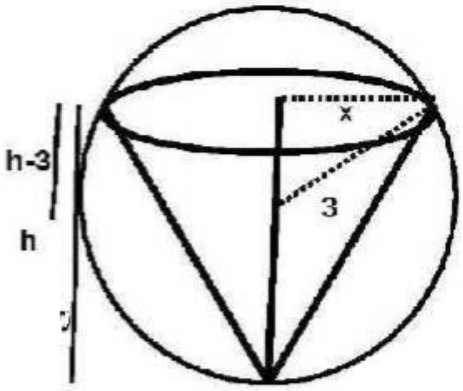
$48 - 3h^2 = 0 \rightarrow 3h^2 = 48 \rightarrow h^2 = 16 \rightarrow h = 4$

$x^2 = 48 - 16 \rightarrow x^2 = 32 \rightarrow x = 4\sqrt{2}$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$2h = 8$ ارتفاع الاسطوانة

س) جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm . (1د 2008)

الحل : نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط x , ارتفاع المخروط h



$9 = x^2 + (h - 3)^2 \rightarrow 9 = x^2 + h^2 - 6h + 9$

$x^2 = 6h - h^2$

$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$ ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع = حجم المخروط

$V = \frac{\pi}{3}(6h - h^2)h \rightarrow V = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$

$V` = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2)$ , $V` = 0$

$V` = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0$

$12h - 3h^2 = 0 \rightarrow 3h(4 - h) = 0$

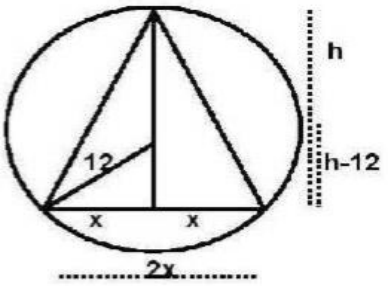
$3h = 0 \rightarrow h = 0$ يهمل OR $4 - h = 0 \rightarrow h = 4$

$x^2 = 6h - h^2 = 24 - 16 = 8$

$V = \frac{\pi}{3}(8)(4) = \frac{32\pi}{3}\ cm^3$ حجم المخروط

س) جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12 cm ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. (2012 خارج)

الحل : نفرض ان طول قاعدة المثلث = 2x ، ارتفاع المثلث = h



$$(12)^2 = x^2 + (h-12)^2 \rightarrow 144 = x^2 + h^2 - 24h + 144$$

$$x^2 = 24h - h^2 \rightarrow x = \sqrt{24h - h^2}$$

$$A = \frac{1}{2}(2x)(h) = xh$$ مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$$A = h\sqrt{24h - h^2} \rightarrow A = \sqrt{h^2}\sqrt{24h - h^2} \rightarrow A = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

$$A` = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} \quad , \quad A` = 0 \rightarrow \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0$$

$$72h^2 - 4h^3 = 0 \rightarrow 4h^2(18 - h) = 0$$

$4h^2 = 0 \rightarrow h = 0$ يهمل or $18 - h = 0 \rightarrow h = 18\ cm$ الارتفاع

$x = \sqrt{24h - h^2} = \sqrt{432 - 324} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \rightarrow 2x = 12\sqrt{3}$ طول القاعدة

$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\frac{1}{2}(2x)(h)}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{2}(12\sqrt{3})(18)}{\pi(12)^2} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

ثالثا :- اذا وجدت معادلة منحني في سؤال ما في موضوع التطبيقات فانها تمثل العلاقة فيه .

س) جد نقطة او نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة $(0\ ,\ 4)$.

الحل : نفرض ان النقطة $p(x\ ,y)$ تنتمي للمنحني , $N(0,4)$ (2011 د2 , 2012 تمهيدي , 2013 د1)

$$y^2 - x^2 = 3 \rightarrow x^2 = y^2 - 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 3}$$

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \quad , \quad x^2 = y^2 - 3 \quad \text{بالتعويض عن}$$

$$s = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} \rightarrow s = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$s` = \frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} \quad , \quad s` = 0 \rightarrow \frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} = 0$$

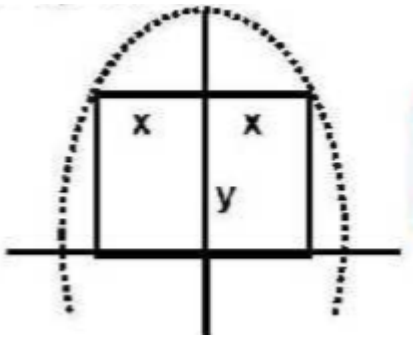
$$4y - 8 = 0 \rightarrow 4y = 8 \rightarrow y = 2$$

$$x = \pm\sqrt{y^2 - 3} = \pm\sqrt{(2)^2 - 3} = \pm\sqrt{4 - 3} \rightarrow x = \pm 1$$

النقط هي $(1\ ,2)\ ,(-1\ ,2)$

س) جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات , رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الاخران على محور السينات ثم جد محيطه . (2012 د2)

الحل : نفرض ابعاد المستطيل $2x\ ,\ y$



$$y = 12 - x^2$$

$A = 2x\,.\,y$ مساحة المستطيل

$$A = 2x\,(12 - x^2) \rightarrow A = 24x - 2x^3$$

$$A` = 24 - 6x^2 \quad , \quad A` = 0 \rightarrow 24 - 6x^2 = 0$$

$$6x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2$$

$$y = 12 - x^2 \Rightarrow y = 12 - 4 \rightarrow y = 8$$

$2x = 4 \quad , y = 8$ ابعاد المستطيل

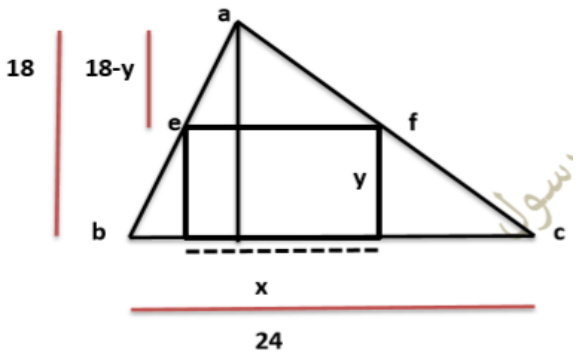
$p = 2(2x + y)$ محيط المستطيل

$p = 2(8 + 4) = 24$ وحدة طول

رابعا :اذا وجد مثلثان متشابهان في سؤال ما فأن تشابه مثلثين سيكون العلاقة فيه .(2013 د2 ,2015 تمهيدي)

س) جد بعدي اكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24 cm وارتفاعه 18 cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

الحل : نفرض طول المستطيل = x , و عرض المستطيل = y



من تشابه المثلثين $abc\ ,aef$

$$\frac{18-y}{18}=\frac{x}{24}\rightarrow 18x=24(18-y)\ ]\ \div 6$$

$$3x=4(18-y)\rightarrow x=\frac{4}{3}(18-y)$$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $A=x.y$

$$A=\frac{4}{3}(18-y).y\rightarrow\ A=\frac{4}{3}(18y-y^2)$$

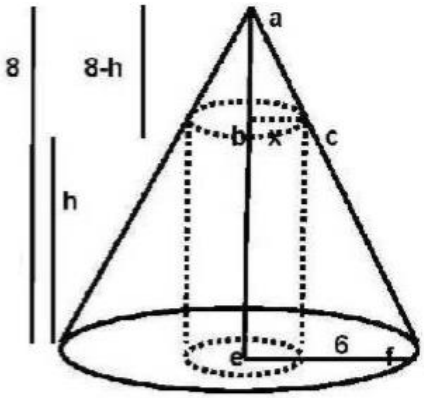
$$A`=\frac{4}{3}(18-2y)\ ,\qquad A`=0\rightarrow\frac{4}{3}(18-2y)=0$$

$$18-2y=0\rightarrow 2y=18\rightarrow y=9cm$$

$$x=\frac{4}{3}(18-9)\Rightarrow x=\frac{4}{3}(9)\rightarrow x=12cm$$

س) جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 cm وطول قطر قاعدته 12cm

الحل : نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = x ، ارتفاع الاسطوانة = h (1997 د1)



من تشابه المثلثين $abc\ ,aef$

$$\frac{x}{6}=\frac{8-h}{8}$$

$$8x=6(8-h)]\div 2\rightarrow 4x=24-3h$$

$$3h=24-4x\ \rightarrow h=\frac{1}{3}(24-4x)$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $V=\pi x^2h$

$$V=\pi x^2\left[\frac{1}{3}(24-4x)\right]\rightarrow V=\frac{\pi}{3}(24x^2-4x^3)$$

$$V`=\frac{\pi}{3}(48x-12x^2)\ ,\quad V`=0\ \rightarrow\frac{\pi}{3}(48x-12x^2)=0$$

$$48x-12x^2=0\ \rightarrow 12x(4-x)=0$$

$$12x=0\rightarrow x=0\ \text{يهمل}\quad OR\ 4-x=0\rightarrow x=4\ cm$$

$$h=\frac{1}{3}(24-16)=\frac{8}{3}\ cm$$

س) جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (8 , 6) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث

الحل : نفرض نقطة التقاطع مع محور السينات (x , 0), نفرض نقطة التقاطع مع محور الصادات (0 , y)

abc , aef من تشابه المثلثين (2011 خارج)

$$\frac{6}{x}=\frac{y-8}{y}\rightarrow 6y=x(y-8)\rightarrow x=\frac{6y}{y-8}$$

$$A=\frac{1}{2}\,x\,y$$ مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$$A=\frac{1}{2}\,y\left(\frac{6y}{y-8}\right)\rightarrow A=\frac{3y^2}{y-8}$$

$$A`=\frac{(y-8).6y-3y^2.1}{(y-8)^2}=\frac{6y^2-48y-3y^2}{(y-8)^2}=\frac{3y^2-48y}{(y-8)^2}$$

$$A`=0\rightarrow\frac{3y^2-48y}{(y-8)^2}=0\rightarrow 3y^2-48y=0\rightarrow 3y(y-16)=0$$

$3y=0\rightarrow y=0$ يهمل OR $y-16=0\rightarrow y=16$

$$x=\frac{(6)(16)}{16-8}\rightarrow x=12$$

$(12,0),(0,16)$ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{16-0}{0-12}=\frac{-4}{3}$$

$(y-y_1)=m(x-x_1)$ معادلة المستقيم

$$(y-16)=\frac{-4}{3}(x-0)\rightarrow 3y-48=-4x$$

$4x+3y-48=0$ معادلة المستقيم