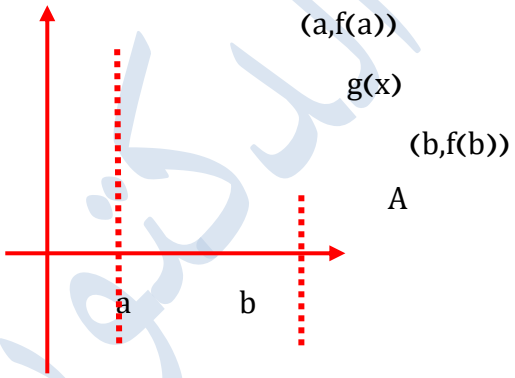
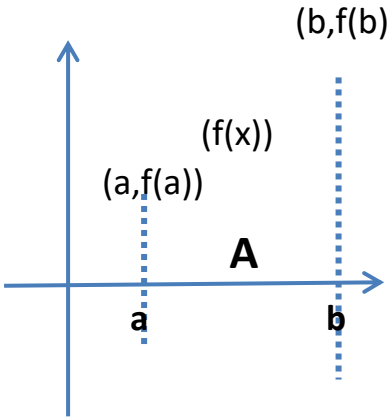
الفصل الرابع : التكامل

مساحة المنطقة تحت المنحني

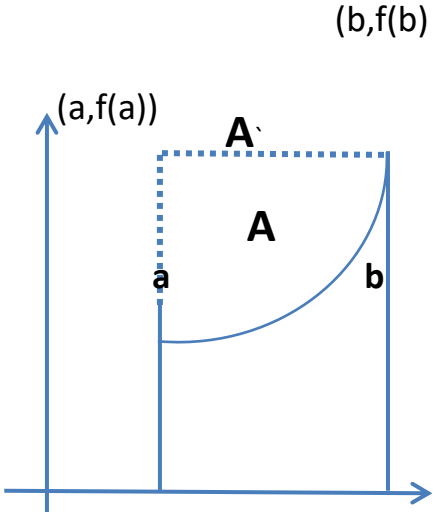
للتطبيقي

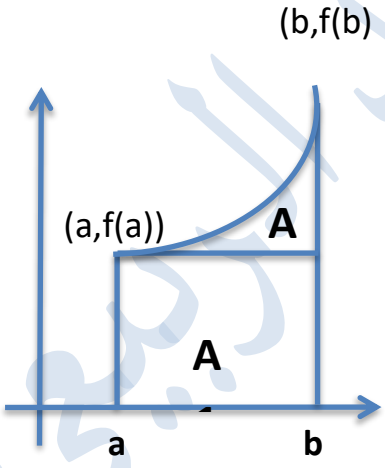
ايجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة مستوية





الدالة g(x) متناقصة ضمن الفترة المغلقة [a,b] وهذا يعني $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$ لاتوجد نقطة حرجه	الدالة f(x) متزايدة ضمن الفترة المغلقة [a,b] وهذا يعني $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$ لاتوجد نقطة حرجه.





A` اصغر مستطيل ممكن رسمه خارج المنطقة Aوفوق المنحني

A1 اكبر مستطيل ممكن رسمه داخل المنطقة A وتحت المنحني

ملاحظة

حساب مساحة منطقة مستوية Aمحصورة بين منحني دالة ومحور السينات وضمن فترة محددة عبر قيمة المساحة Aوالتي تساوي مساحة أكبر مستطيل داخل المنطقة وتحت المنحني ومساحة المنطقة والتي تساوي مساحة اصغر مستطيل Aوتحت المنحني ومساحة المنطقة A والتي تساوي مساحة اصغر مستطيل خارج المنطقة A وفوق المنحني ويكون

خطوات الحل:

1. نضع الدالة
2. نجد ادنى قيمة m حيث الصغيرة $m = (x_2 - x_1)y$
3. نجد اعلى قيمة M حيث الكبيرة $M = (x_2 - x_1)y$
4. نطبق القانون الآتي: $A \cong \frac{m+M}{2}$

مثال/ اذا كانت $A = \{(x,y): 2 \le x \le 5, y \le \sqrt{x-1}\}$ أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A؟

الحل/

$y = \sqrt{x-1}, [2,5]$

$m = (5-2)(1) = 3$

$M = (5-2)(2) = 6$

$\therefore A \cong \frac{m+M}{2} \cong \frac{3+6}{2} \cong \frac{9}{2} \cong 4\frac{1}{2}\text{unit}^2$

مثال/ لتكن $A = \{(x,y): 1 \le x \le 2, y = x^2 + 1\}$ أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A؟

الحل/

$y = x^2 + 1, [1,2]$

$m = (2-1)(2) = 2$

$M = (2-1)(5) = 5$

$\therefore A \cong \frac{m+M}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}unit^2$

مثال : أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الآتية $A = \{(x,y): 2 \le x \le 5, y = x^2 + 1\}$

حيث: $\sigma = (2,3,5)$ **1)** , $\sigma = (2,3,4,5)$ **2)**

الحل/

1) $\sigma = (2,3,5) = [2,3],[3,5]$

$y = x^2 + 1$

$m = (3-2)(5) + (5-3)(10) = 5 + 20 = 25$

$M = (3-2)(10) + (5-3)(26) = 10 + 52 = 62$

$\therefore A \cong \frac{m+M}{2} = \frac{25+62}{2} = \frac{87}{2} \cong 43\frac{1}{2}\,\text{unit}^2$

2) $\sigma = (2,3,4,5) = [2,3],[3,4],[4,5]$

$y = x^2 + 1$

$m = (3-2)(5) + (4-3)(10) + (5-4)(17) = 5 + 10 + 17 = 32$

$M = (3-2)(10) + (4-3)(17) + (5-4)(26) = 10 + 17 + 26 = 53$

$\therefore A \cong \frac{m+M}{2} = \frac{32+53}{2} = \frac{85}{2} \cong 42\frac{1}{2}\,unit^2$

ملاحظة

يمكن الحصول على دقة اكبر في حساب المساحة A وذلك بزيادة عدد المستطيلات داخل المنطقة A وخارجها ويتم ذلك من خلال تجزأة الفترة بالمجزئ σ كما في الامثلة التالية :

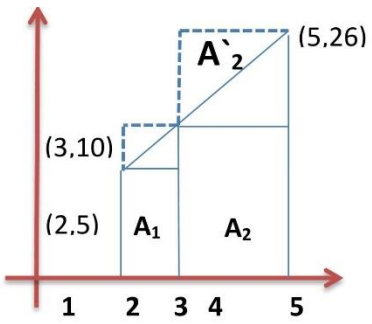
مثال / اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 2 \le x \le 5\,, y = x^2 + 1\}$ **وذلك باستخدام التجزئة** $\sigma = (2,3,5)$

الحل //

$X = 2 \rightarrow y = 5$

$x = 3 \rightarrow y = 10$

$x = 5 \rightarrow y = 26$



مجموع مساحات m المناطق المستطيلة تحت المنحني $= A1 + A2$

$= (1)(5) + (2)(10) = 5 + 20 = 25\,unit^2$

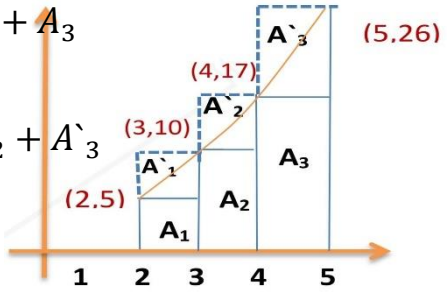
مجموع مساحات M المناطق المستطيلة فوق المنحني $= A`1 + A`2$

$= (1)(10) + (2)(26) = 10 + 52 = 62\,unit^2$

المساحة $A = \frac{25+62}{2} = 43\,\frac{1}{2}\,unit^2$

مثال / اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 2 \le x \le 5 \, , y = x^2 + 1\}$ **وذلك باستخدام التجزئة** $\sigma = (2,3,4,5)$

الحل //



مجموع مساحات المناطق المستطيلة تحت المنحني $m = A_1 + A_2 + A_3$

$= 5 + 10 + 17 = 32 \; unit^2$

مجموع مساحات المناطق المستطيلة تحت المنحني $M = A`_1 + A`_2 + A`_3$

$= 10 + 17 + 26 \; = 53 \; unit^2$

المساحة $A = \dfrac{m + M}{2} = \dfrac{32 + 53}{2} = 42 \, \dfrac{1}{2} \; unit^2$

الدكتور محمد الربيعي

المجاميع العليا والمجاميع السفلى $L(\sigma,f),U(\sigma,f)$

للتطبيقي

- ✓ المجاميع السفلى ويرمز لها بالرمز $L\ (\sigma,f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق داخل المنطقة A (تحت المنحني)
- ✓ المجاميع العليا ويرمز لها بالرمز $U\ (\sigma,f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق داخل المنطقة A (فوق المنحني)

ملاحظة

بالامكان الان حساب المساحات وذلك بايجاد $U(\sigma\ ,f\ ),L\ (\sigma,f)$ حيث

المساحة $A=\frac{U(\sigma\ ,f\ )+L\ (\sigma,f)}{2}$

خطوات الحل:

❶ نجزئ الفترة المعطاة الى تجزيئات ومنها نجد σ من خلال $h=\frac{b-a}{n}$ حيث n عدد فترات التجزئة .

❷ نشتق ثم مساواة المشتقة بالصفر لنجد النقطة الحرجة .

❹ نكون جدول:

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
الفترة	طول الفترةb-a	$F(a)$	$F(b)$	$L(\sigma,f)$	$U(\sigma,f)$

ملاحظات:

1. اذا كانت المشتقة الأولى مجرد عدد خالي من X عدد $\overline{f}(x)=$ فهنا لا توجد نقاط حرجة ثم نلاحظ:
   أ) إذا كان العدد موجب فأن الدالة متزايدة في مجالها
   ب) إذا كان العدد سالب فأن الدالة متناقصة في مجالها
2. اذا كانت الدالة ثابته عدد $f(x)=$ فلا داعي للاشتقاق ويكون المجموع الاعلى مساوياً للمجموع الاسفل
3. إذا كانت النقطة الحرجة تنتمي الى الفترة المعطاة نعوض في الدالة الاصلية وكذلك بداية ونهاية الفترة ثم نلاحظ النواتج الثلاثة الأكبر يمثل M والاصغر يمثل m.

مثال / لتكن $f(x)=5-2x$ **حيث** $f:[0,5]\to R$ **فإذا كان** $\sigma=(0,1,3,5)$ **فأوجد المجموع السفلي** $L(\sigma,f)$ **والمجموع العلوي** $U(\sigma,f)$

الحل /

$\therefore$ **الدالة متناقصة ولا توجد نقطة حرجة** $f(x)=-2<0$

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma,f)$	$U(\sigma,f)$
[0,1]	1	3	5	3	5
[1,3]	2	-1	3	-2	6
[3,5]	2	-5	-1	-10	-2
				المجموع 9	المجموع 9

$L=(\sigma,f)=-9$ $\qquad$ $U=(\sigma,f)=9$

ملاحظة

المساحات دائماً موجبه ولا يمكن أن تكون سالبة . وعليه في المثال السابق إذا أردنا إيجاد المساحة فالقيم السالبة في الحقلين $U(\sigma,f),L(\sigma,f)$ **تجمع موجبة مثلا 2 تجمع 2 و 10- تجمع 10**

مثال: لتكن $f:[1,4]\to R, f(x)=5+2x$ **جد المجموع الأسفل** $L(\sigma,f)$ **والمجموع الأعلى** $U(\sigma,f)$ **مستخدمة ثلاث فترات منتظمة ؟**

الحل/

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-1}{3}=1$$

$\therefore \sigma=(1,2,3,4)\Rightarrow[1,2],[2,3],[3,4]$ $\qquad$ $\overline{f}(x)=2>0$

لا توجد نقاط حرجة الدالة متزايدة في مجالها

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	7	9	7	9
[2,3]	1	9	11	9	11
[3,4]	1	11	13	11	13
				27	33

$\therefore L(\sigma,f)=27,\qquad U(\sigma,f)=33$

مثال / اذا كانت $f:[0,4]\to R, f(x)=3x-x^2$ اوجد كل من $L(\sigma,f)$, $U(\sigma,f)$ مستخدماً اربع تجزيئات منتظمة؟

الحل/

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

$$\therefore \sigma=(0,1,2,3,4)\Longrightarrow [0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$$

$$\overline{f}(x)=3-2x=0\Longrightarrow 2x=3\div 2\Rightarrow x=\frac{3}{2}\in[1,2]$$

$$f(1)=2, f(2)=2, f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[0,1]	1	0	2	0	2
[1,2]	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
[2,3]	1	0	2	0	2
[3,4]	1	-4	0	-4	0
				-2	$\frac{25}{4}$

$$\therefore L(\sigma,f)=-2, U(\sigma,f)=6\frac{1}{4}$$

س 1 : اوجد كل من $L(\sigma,f)$, $U(\sigma,f)$ أذا كانت : (تمرين 4-1)

$F:[-2,1]\to R, f(x)=3-x$ $\quad a)\sigma=(-2,0,1)$

الحل/ تقسيم الفترات $[-2,0],[0,1]$

لا توجد نقاط حرجة الدالة متناقصة $f'(x)=-1<0$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
]-2,0[	2	3	5	6	10
[0,1]	1	2	3	2	3
				8	13

$$L(\sigma,f)=8, U(\sigma,f)=13$$

b) تقسيم الفترة [-2,1] الى ثلاث فترات جزئية منتظمة؟

$$h=\frac{b-a}{n}\Rightarrow\frac{1+2}{3}=1\Rightarrow\sigma=(-2,-1,0,1)$$

الفترات $[-2,-1],[-1,0],[0,1]$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
]-2,-1[	1	4	5	4	5
]-1,0[	1	3	4	3	4
]0,1[	1	2	3	2	3
				9	12

$$L(\sigma,f)=9,U(\sigma,f)=12$$

س 2 : اوجد كل من $L(\sigma,f)$, $U(\sigma,f)$ أذا كانت : (تمرين 4-1)

$$F:[0,4]\to R,f(x)=4x-x^2\qquad\sigma=(0,1,2,3,4)$$

الحل/ تقسيم الفقرات $[0,1],[1,2][2,3],[3,4]$

$$f'(x)=4-2x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 4-2x=0\Rightarrow x=2\in[1,2][2,3]$$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[0,1]	1	0	3	0	3
[1,2]	1	3	4	3	4
[2,3]	1	3	4	3	4
[3,4]	1	0	3	0	3
				6	14

$$L(\sigma,f)=6,U(\sigma,f)=14$$

س 3 : اوجد كل من $L(\sigma,f)$, $U(\sigma,f)$ أذا كانت : (تمرين 4-1)

3) $f:[1,4]\to R, f(x)=3x^2+2x$

a $(\sigma=(1,2,4)$

b) استخدام ثلاث تجزئات متساوية

الحل/

a) $[1,2]\cdot[2,4]$

$f'(x)=6x+2\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 6x+2=0\Rightarrow x=\frac{-1}{3}\notin[0,4]$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,4]	2	16	56	32	112
				37	128

$L(\sigma,f)=37, U(\sigma,f)=128$

b) اخذ ثلاث فترات متساوية:

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-1}{3}=\frac{3}{3}=1$

$\sigma=(1,2,3,4)\Longrightarrow[1,2],[2,3],[3,4]$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1, 2]	1	5	16	5	16
[2,3]	1	16	33	16	33
[3,4]	1	33	56	33	56
				54	105

$L(\sigma,f)=54, U(\sigma,f)=105$

تعريف التكامل (التكامل المحدد)

للتطبيقي

اذا كان $f:[a,b]\to R$ دالة مستمرة على الفترة [a,b] فأنه يوجد عدد وحيد K بحيث لأي تجزئ σ للفترة [a,b] فأن $L(\sigma,f)\le K\le U(\sigma,f)$ نسمي العدد (K) التكامل المحدد للدالة f على الفترة [a,b] ونرمز له $\int_a^b f\,(x)dx$ ولإيجاد القيمة التقريبية للتكامل المحدد للدالة f على الفترة [a,b] نطبق القانون الاتي:

$$\int_a^b f\,(x)dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

ملاحظة

من الممكن أن يكون قيمة التكامل المحدد للدالة f على الفترة [a,b] سالب ولإيجاد مساحة المنطقة (A) نأخذ القيمة المطلقة للتكامل $A=|\int_a^b f\,(x)dx|$

مثال/ لتكن $f:[1,3]\to R$ حيث $f(x)=x^2$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2\,dx$ اذا جزئت الفترة [1,3] الى تجزئتين ؟

الحل/

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=1\Longrightarrow\therefore\ \sigma=(1,2,3)\Longrightarrow[1,2],[2,3]$$

$$\overline{f}(x)=2x=0\div 2\Rightarrow x=0\notin[1,3]$$

$$\therefore\int_1^3 x^2\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{5+13}{2}=\frac{18}{2}=9$$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1, 2]	1	1	4	1	4
[2,3]	1	4	9	4	9
				5	13

مثال : لتكن $f:[2,5]\to R$ **حيث** $f(x)=3x^2$ **أوجد قيمة تقريبية للتكامل** $\int_2^4 f(x)dx$ **باستخدام التجزئة** $\sigma=(2,3,4)$

اذا لم يعطي σ **في السؤال ولم يذكر عدد فترات التجزئة عند الحل نجزئ الفترة المعطاة الى فترتين على الأقل**

مثال: لتكن $f:[2,5]\to R$ **حيث** $f(x)=2x-3$ **اوجد** $\int_2^5 f(x)dx$ **؟**

الحل/

let $3\in[2,5]\Rightarrow[2,3],[3,5]$

$\overline{f}(x)=2>0$

لا توجد نقاط حرجة الدالة متزايدة في مجالها

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[2, 3]	1	1	3	1	3
[3,5]	2	3	7	6	14
				7	17

$$\therefore \int_2^5 (2x-3)\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{7+17}{2}=\frac{24}{2}=12unit^2$$

مثال: لتكن $f:[1,5]\to R, f(x)=3$ **اوجد** $\int_1^5 f(x)dx$ **؟**

الحل/

Let $3\in[1,5]\Rightarrow[1,3],[3,5]$

$$\therefore \int_1^5 f(x)dx=\frac{L+U}{2}=\frac{24}{2}=12\ unit^2$$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1, 3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				12	12

مثال // ليكن $f(x) = 2x - 3$ حيث $f:[2,5] \to R$ اوجد $\int_2^5 f$ وتحقق هندسيا من الناتج .

الحل / $\therefore$ الدالة متزايدة ولا توجد نقطة حرجة $f`(x) = 2 > 0$

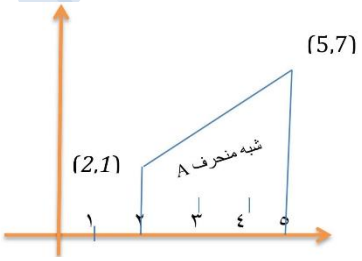
الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[2,3]	1	1	3	1	3
[3,4]	1	3	5	3	5
[4,5]	1	5	7	5	7
				المجموع 9	المجموع 15

$$\therefore \int_2^5 f = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{9+15}{2} = \frac{24}{4} = 12\ unit^2$$

الطريقة الثانية / التحقق هندسياً

$x = 2 \to y = 2(2) - 3 = 1 \quad (2,1)$

$x = 5 \to y = 2(5) - 3 = 7 \quad (5,7)$



مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) . الارتفاع

$$A = \frac{1}{2}(4+7).3 = \frac{1}{2}8 \ .3 = 12\ unit^2$$

مثال /لتكن f(x) =3 حيث $f:[1,5] \to R$ **اوجد** $\int_1^5 f$

الحل / الطريقة الاولى

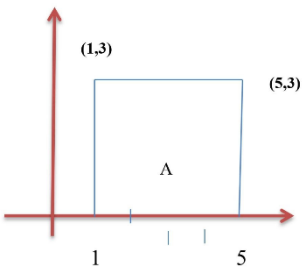
المساحة A = **الطول** × **العرض**

$$A = (4)(3) = 12\ unit^2$$

الطريقة الثانية /

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[1,3]	2	3	3	6	3
[3,5]	2	3	3	6	5
				المجموع 12	المجموع 12

$$\therefore \int_1^5 f = \int_1^5 3dx = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12\ unit^2$$



س1/ أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$ ؟ (تمرين 4-2)

الحل/

$[1,2],[2,3]$ $\quad f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$

$f'(x) = -3x^{-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} < 0 [1,3]$ الدالة متناقصة في الفترة

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1, 2]	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
[2,3]	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$

$$\therefore \int_1^3 f(x) = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$

س2/ لتكن $F: [1,4] \to R f(x) = 3x - 3$ اوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)dx$ باستخدام التجزئة. $\sigma =$ $(1,2,3,4)$ ثم تحقق هندسيا بحساب مساحة المنطقة تحت المنحني f؟ (تمرين 4-2)

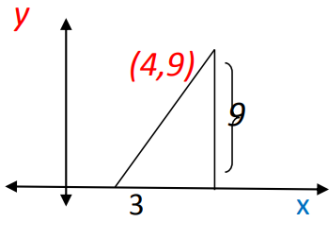
الحل/ $[1,2],[2,3],[3,4]$ $\quad f(x) = 3x - 3 \Rightarrow f'(x) = 3 > 0$

الدالة متزايدة في الفترة $[1,4]$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1, 2]	1	0	3	0	3
[2,3]	1	3	6	3	6
[3,4]	1	6	9	6	9
				9	18

$$\therefore \int_1^4 f(x)dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{9 + 18}{2} = \frac{27}{2}$$

التحقق من الناتج هندسياً



$$A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(3 \times 9) = \frac{27}{2}$$

س3/ أوجد قيمة تقريبه للتكامل: $\int_2^4 (3x^2-3)\,dx$ باستخدام التجزئة. $\sigma=(2,3,4)$ ؟ (تمرين 4-2)

الحل/

$f(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(x)=6x \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0 \notin [2,4]$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[2, 3]	1	9	24	9	24
[3,4]	1	24	45	24	45
				33	69

$\therefore \int_2^4 (3x^2-3)\,dx = \frac{33+69}{2} = \frac{102}{2} = 51$

س4/ أوجد قيمة تقريبية للتكامل: $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ حيث $f(x)=-4$ ؟ (تمرين 4-2)

الحل/ نقوم باختيار عدد يقع ضمن الفترة المعطاة وليكن $0 \in [-3,2]$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[-3, 0]	3	-4	-4	-12	-12
[0,2]	2	-4	-4	-8	-8
				-20	-20

$\therefore \int_{-3}^{2} f(x)dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{-20-20}{2} = \frac{-40}{2} = -20$

$\therefore A = |\int_{-3}^{2} f(x)dx| = |-20| = 20\text{unit}^2$

س5/ أوجد قيمة تقريبية للتكامل : $\int_1^5 x^3\,dx$ باستخدام أربعة تجزئات منتظمة ؟ (تمرين 4-2)

الحل/

$\therefore \sigma=(1,2,3,4,5) \quad \Leftarrow h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$

$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2 \Rightarrow 3x^2=0 \Rightarrow x=0 \notin [1,5]$

$[1,2],[2,3],[3,4],[4,5]$

$[a,b]$	hi	mi	Mi	himi	hiMi
[1, 2]	1	1	8	1	8
[2,3]	1	8	27	8	27
[3,4]	1	27	64	27	64
[4,5]	1	64	125	64	125
				100	224

$$\therefore \int_1^5 \mathrm{fdx} = \frac{\mathrm{L}(\sigma,\mathrm{f})+\mathrm{U}(\sigma,\mathrm{f})}{2} = \frac{100+224}{2} = \frac{324}{2} = 162\text{unit}^2$$

النظرية الاساسية للتكامل (الدالة المقابلة)

لتكن f دالة مستمرة على الفترة [a,b] فهناك دالة F تسمى دالة مقابلة إذا تحققت الشروط الآتية:

1-الدالة F مستمرة على الفترة [a,b].

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)

3 - $f(x) = \overline{F}(x)$

ولإيجاد قيمة التكامل المحدد للدالة f نطبق القانون الآتي:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ملاحظة

اذا لم تكن الدالة مستمرة فلا يمكن اجراء التكامل .

س)اذا كانت f(x) دالة مستمرة على الفترة $[1\ ,5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد

$\int_1^5 f(x)\ dx$

sol : $\int_1^5 f(x)\ dx = [F(x)]_1^5 = [3x^2]_1^5 = 75 - 3 = 72$ (2014 د4 انبار)

س) اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ وان الدالة المقابلة للدالة f هي : $F(x) = \sin x$, F :

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to R$ فاوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$. (2017 د2 احيائي خارج)

sol : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

س) اثبت فيما اذا كانت $F : [1\ ,3] \to R\ , F(x) = x^3 + 2$ هي دالة مقابلة للدالة : $f(x) = 3x^2$

الحل : بما ان F دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R (لانها كثيرة حدود)

اذن F دالة مستمرة على الفترة $[1\ ,3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(1\ ,3)$

$\therefore\ \overline{F}(x) = 3x^2 = f(x) \quad \forall\ x \in (1\ ,3)$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f على الفترة $[1\ ,3]$

س) اثبت ان الدالة: $F : R \to R\ , F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مقابلة للدالة $f: R \to R\ , f(x) = \cos 2x$

ثم اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ dx$

الحل : بما ان الدالة F هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$\therefore$ F هي دالة مستمرة على الفترة $\left[0\ ,\frac{\pi}{4}\right]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $\left(0\ ,\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ F دالة مقابلة للدالة f $\qquad \overline{F}(x) = \frac{1}{2}\cos 2x\ .(2) = \cos 2x = f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

س) اثبت ان الدالة: $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $f(x) = 1 + \cos x$ حيث $f : \left[0 , \frac{\pi}{6}\right] \to R$ حيث $F(x) = \sin x + x$ ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\ dx$

الحل : F هي دالة مستمرة على الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{6}\right]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $\left(0 , \frac{\pi}{6}\right)$

$$\bar{F}(x) = \cos x + 1 = f(x) \quad \forall\, x \in (0 , \frac{\pi}{6})$$

∴ F هي دالة مقابلة للدالة f على الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{6}\right]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\ dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = [\sin x + x]_0^{\frac{\pi}{6}} = (\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) - (\sin 0 + 0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$$

س) اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx$

$$\text{sol} : \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

س) اوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\ dx$

$$\text{sol} : \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\ dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{4} = 0 + \mathbf{1} = 1$$

س) اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\ dx$

$$\text{sol} : \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\ dx = [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$$

س) جد $\int_1^3 x^3\ dx$

$$\text{sol} : \int_1^3 x^3\ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

الدكتور محمد الربيعي

التكامل غير المحدد

عملية التكامل هي عملية معاكسة لعملية التفاضل فنلاحظ ان مشتقة الدوال $y = x^2 , y = x^2 +$ $1 , y = x^2 + 5$ هو $y` = 2x$ وبالتالي فان تكامل (2x) ويرمز له $\int 2x\,dx = x^2 + c$ حيث يمكن ان تكون $c = 0, 1 , 2 \ldots$ اما الرمز dx فيعني ان التكامل يجري بالنسبة للمتغير (x) حيث ان أي رمز اخر نعتبره ثابتا . لكن هذه الطريقة في التكامل التي ترجع الدوال الى اصولها عملية ليست يسيرة دائما لذلك سوف نحدد قواعد عامة لتكاملات الدوال الجبرية والدائرية وكما يلي :-

تكاملات الدوال الجبرية

1) $\int dx = x + c$ تكامل الثابت

2) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad , n \neq -1$ تكامل حد مرفوع الى اس

3) $\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \quad , n \neq -1$ تكامل ثابت في دالة

4) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx + c$ تكامل حاصل جمع او طرح عدة دوال

5) $\int [f(x)]^n\ f`(x)\,dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$ تكامل قوس مرفوع الى اس

ملاحظات قبل اجراء التكامل :-

1) نتخلص من الاقواس ان وجدت (التوزيع , مربع حدانية)

2) نتخلص من الجذور اينما وجدت وذلك بتحويلها الى اس كسري

ملاحظات بعد اجراء عملية التكامل :-

1) نتخلص من الاس السالب (ننزله للمقام)

2) اذا كان الاس كسر فيفضل ان نرجعه الى جذر

س) جد التكاملات التالية

1) $\int 3\,dx = 3x + c$ نضرب الثابت في المتغير الموجود في دليل التكامل

2) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ يضاف الى الاس واحد ونقسم على الاس الجديد

3) $\int x^2\,dy = x^2y + c$

4) $\int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

5) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

الاس n ممكن ان يكون عدد صحيح موجب او صحيح سالب او اس كسر

ملاحظة

لا يمكن تكامل الجذور الا بعد تحويلها الى اسس حيث : $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

ملاحظة

اذا كان الاس كسر موجب فان الاس الجديد هو $\frac{\text{البسط+المقام}}{\text{المقام نفسه}}$, واذا كان الاس سالب $\frac{-\text{البسط+المقام}}{\text{المقام نفسه}}$

6) $\int 3x^4\,dx = \frac{3}{5}x^5 + c$

7) $\int (x^2 + 2x + 1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + x + c = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + c$

ملاحظة

لايجاد التكامل لأي قوس مرفوع الى قوى معينة

1) نقوم باستخراج مشتقة داخل القوس فاذا كانت نفسها خارج القوس نقوم بتطبيق القاعدة الخامسة مباشرة ,

2) اما اذا كانت مشتقة داخل القوس تختلف عن خارج القوس (بعدد ثابت) نقوم باجراء موازنة على السؤال ثم تطبيق القاعدة الخامسة

3) اما اذا كانت مشتقة داخل القوس تختلف عن خارج القوس بمتغير فهناك احتمالان اما نعيد صياغة السؤال باستخدام احدى طرق التحليل (العامل المشترك او المربع الكامل او غيرها) او بالتخلص من الاقواس ثم استخدام القاعدة المناسبة وخصوصا الرابعة .

1) $\int (x^2 + 3)^2\ 2x dx = \frac{1}{3}(x^2 + 3)^3 + c$

2) $\int (x^2 + 3)^2\ x dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 3)^2\,(2x)dx = (\frac{1}{2})(\frac{1}{3})(x^2 + 3)^3 + c = \frac{1}{6}(x^2 + 3)^3 + c$

3) $\int (3x^2 + 1)^2\,dx = \int (9x^4 + 6x^2 + 1)\ dx = \frac{9}{5}x^5 + 2x^3 + x + c$

ملاحظة

لاحظ ان مشتقة داخل القوس تختلف عن خارجه بمتغير لذلك تعذر استخدام القاعدة الخامسة واضطررنا الى التخلص من الاقواس قبل اجراء التكامل .

4) $\int (3x^2 + 8x + 5)^6(3x + 4)dx = \frac{1}{2}\int (3x^2 + 8x + 5)^6\ 2(3x + 4)dx$

$= \frac{1}{2}\int (3x^2 + 8x + 5)^6(6x + 8)dx = \frac{1}{14}\ (3x^2 + 8x + 5)^7 + c$

ملاحظة

اذا كان داخل الجذر حدودية ثلاثية تحلل بشكل مربع كامل :-

$$(\sqrt{\text{الحد الاول}} \pm \sqrt{\text{الحد الثالث}})^2$$

5) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx = \int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx = \int (x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$$= \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+5)^5} + c$$

ملاحظة

اذا وجد داخل الجذر عامل مشترك نستخرج العامل المشترك (يكون العامل المشترك غالبا يساوي دليل الجذر) ثم نوزع الاس ومن ثم نتاكد من مشتقة داخل القوس ثم نستخدم القاعدة المناسبة

6) $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx = \int [x^3(3-5x^2)]^{\frac{1}{3}}\,dx = \int (x^3)^{\frac{1}{3}}(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$$= \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,x\,dx = -\frac{1}{10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10x)\,dx$$

(2004 د1 , 2015 خارج)

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{40}\sqrt[3]{(3-5x^2)^4} + c$$

ملاحظة

اذا كان داخل الجذر حدودية لا تحتوي على عامل مشترك ولا تحلل مربع كامل فهنا نتخلص من الجذر ونتعامل معه حسب صيغة السؤال .

7) $\int \sqrt[4]{1-2x}\,dx = \int (1-2x)^{\frac{1}{4}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{\frac{1}{4}}(-2)\,dx$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)(1-2x)^{\frac{5}{4}} + c = -\frac{2}{5}\sqrt[4]{(1-2x)^5} + c$$

ملاحظة

لا توجد قاعدة مباشرة لتكامل حاصل ضرب دالتين كما في موضوع المشتقة وعندها اما نتخلص من الاقواس ونستخدم القاعدة الرابعة او بإيجاد مشتقة داخل القوس ونجدها خارجه لاستخدام القاعدة الخامسة .

1) $\int x^2(3x-1)dx = \int (3x^3-x^2)\,dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + c$

2) $\int (2x+3)(x^4-4x)dx = \int (2x^5-8x^2+3x^4-12x)\,dx$

$$= \frac{1}{3}x^6 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - 6x^2 + c$$

3) $\int (x-2)(x+1)^2 dx = \int (x-2)(x^2+2x+1)\,dx$

$= \int (x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)\,dx = \int (x^3-3x-2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 - 2x + c$

4) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^2\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x+4x^{\frac{1}{2}}+4)\ dx$

$= \int (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})\ dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2x^2 + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + c$

ملاحظة

لا توجد قاعدة مباشرة لتكامل حاصل قسمة دالتين كما في موضوع المشتقة وعندها يجب التخلص من المقام بثلاث طرق :

1) اذا كان لدينا بسط ومقام قابل للتحليل نحلل ثم نختصر وبعدها نجري عملية التكامل

2) اذا كان لدينا قوس مرفوع الى اس في المقام نرفعه للبسط ونغير اشارة الاس

3) اذا كان لدينا حدودية ثلاثية في المقام تحلل بشكل مربع كامل في هذه الحالة نحلل ومن ثم نرفع القوس للبسط مع تغيير اشارة الاس .

1) $\int \frac{x^3-1}{x-1}\ dx = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\ dx = \int (x^2+x+1)\ dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$

2) $\int \frac{x^4-1}{x-1}\ dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\ dx = \int \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}\ dx$

$= \int (x+1)(x^2+1)\,dx = \int (x^3+x^2+x+1)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$

3) $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx = \int \frac{[(2x^2-3)-3]\,[(2x^2-3)+3]}{x^2}\ dx$

$= \int \frac{(2x^2-6)(2x^2)}{x^2}\ dx = \int (4x^2-12)\ dx = \frac{4}{3}x^3 - 12x + c$

4) $\int \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\ dx = \int x^{-2}(2x^3-4x^2+5)\ dx$

$= \int (2x-4+5x^{-2})\ dx = x^2 - 4x - 5x^{-1} + c = x^2 - 4x - \frac{5}{x} + c$

ملاحظة
كل دالة في المقام مرفوعة الى اس نرفعها الى البسط مع تغيير اشارة الاس

$$5)\ \int \frac{3}{2x^3}\,dx = \frac{3}{2}\int x^{-3}\,dx = \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-2} + c = \frac{-3}{4x^2} + c$$

$$6)\ \int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\,dx = \int (3x^2+5)^{-4}\,(x)dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}\,(6x)dx$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{3}\right)(3x^2+5)^{-3} + c = \frac{-1}{18(3x^2+5)^3} + c$$

$$7)\ \int \frac{1}{x^2-14x+49}\,dx = \int \frac{1}{(x-7)^2}\,dx = \int (x-7)^{-2}\,dx = -(x-7)^{-1} + c$$
$$= \frac{-1}{x-7} + c$$

$$8)\ \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}}-x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \int (x^{\frac{1}{2}}-x)^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{-3}{4}}\,dx = \int \left[x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})\right]^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{-3}{4}}\,dx$$
$$= \int x^{\frac{1}{4}}\,(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{-3}{4}}\,dx = \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{-2}{4}}\,dx = \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$
$$= -2\int \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{\frac{-1}{2}}\,dx = -\frac{4}{3}\,(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + c$$

(2017 د2 تطبيقي خارج)

ملاحظة
اذا كان داخل الجذر ثابت ومتغير يفضل ان نفصل بين الثابت والمتغير مع ملاحظة ان يحتفظ بالجذر سواء بالبسط او المقام

$$9)\ \int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx = \int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{\sqrt{7}\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int (3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}})^7\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\int (3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{-2}{\sqrt{35}}\,(3-\sqrt{5x})^8 + c$$
$$= \frac{-1}{4\sqrt{35}}\,(3-\sqrt{5x})^8 + c$$

س) جد التكامل لكل مما ياتي : (بعض الاسئلة الوزارية المهمة)

1) $\int x\sqrt{x^2-15}\,dx = \int \sqrt{x^2-15}\,(x)dx = \frac{1}{2}\int (x^2-15)^{\frac{1}{2}}(2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(x^2-15)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-15)^3} + c$ (1د 1997)

2) $\int \sqrt{x}\,(x+6)\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x+6)\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ (2د 2002)

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 4\sqrt{x^3} + c$

3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}xdx = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}(2x)dx$

$= \frac{1}{2}(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2+9} + c$ (1د 2004)

4) $\int \frac{1}{9-12x+4x^2}dx = \int \frac{1}{(3-2x)^2}dx = \int (3-2x)^{-2}\,dx$ (2د 2003 , 2د 2001)

$= \frac{-1}{2}\int (3-2x)^{-2}(-2)dx = \frac{1}{2}(3-2x)^{-1} + c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2x}\right) + c = \frac{1}{6-4x} + c$

ملاحظة

عند الضرب (قوس في قوس) اذا كانت الاساسات متشابهة تجمع الاسس لاحظ السؤالين رقم 5 و 6

5) $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\,dx = \int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx$ (تمهيدي 2010)

$= \int (2x+3)^{\frac{3}{2}}(2)dx = \frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5} + c$

6) $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}dx = \int 3(x-2)(x-2)^{\frac{-1}{3}}\,dx = 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}dx$

$= 3\left(\frac{3}{5}\right)(x-2)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + c$

7) $\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}dx = \int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}dx = \int \frac{(x-3)}{[2(x-3)]^3}dx = \int \frac{(x-3)}{2^3\,(x-3)^3}dx$

$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-3)^2}dx = \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2}\,dx = \frac{1}{8}(-1)(x-3)^{-1} + c = \frac{-1}{8(x-3)} + c$ (1د خ 2016)

8) $\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx = \cdots\ldots\ldots = 3x^3 - 24x + c$ (3د 2017 تطبيقي داخل)

9) $\int \frac{(2-\sqrt{7x})^3}{\sqrt{5x}}\,dx = \cdots\ldots\ldots = \frac{-1}{2\sqrt{35}}(2-\sqrt{7x})^4 + c$ (3د 2017 احيائي داخل)

تكاملات الدوال الدائرية

1) $\int \cos u \ du = \sin u + c$
2) $\int \sin u \ du = -\cos u + c$
3) $\int \sec^2 u \ du = \tan u + c$
4) $\int \csc^2 u \ du = -\cot u + c$
5) $\int \sec u \tan u \ du = \sec u + c$
6) $\int \csc u \cot u \ du = -\csc u + c$

سوف نقسم تكاملات الدوال الدائرية الى عدة اقسام :-

اولا : التكاملات المباشرة : وهي التكاملات التي تشمل احدى الحالات الستة اعلاه ويجب عندها اجراء موازنة على الزاوية ثم التطبيق المباشر للقاعدة .

1) $\int \cos 3x \ dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \ .3dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$
2) $\int \sin(2x+5) \ dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x+5) \ 2dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+5) + c$
3) $\int (\cos x + x^{-2}) \ dx = \sin x - x^{-1} + c = \sin x - \frac{1}{x} + c$
4) $\int (x + \sec x \tan x) \ dx = \frac{1}{2} x^2 + \sec x + c$
5) $\int 9 \sin 3x \ dx = 9(\frac{1}{3}) \int \sin 3x \ (3) \ dx = 3 \int \sin 3x \ . 3dx = -3 \cos 3x + c$
6) $\int x^2 \sin x^3 \ dx = \frac{1}{3} \int \sin x^3 \ . 3x^2 dx = -\frac{1}{3} \cos x^3 + c$
7) $\int \sec^2 4x \ dx = \frac{1}{4} \int \sec^2 4x \ (4) dx = \frac{1}{4} \tan 4x + c$
8) $\csc^2 2x \ dx = \frac{1}{2} \int \csc^2 2x \ (2) dx = -\frac{1}{2} \cot 2x + c$

ثانيا :- التكاملات باستخدام القاعدة الخامسة:-اذا ما وجدت مشتقة داخل القوس خارجه (تكامل قوس مرفوع الى اس).

ملاحظة

أي دالة مثلثية مرفوعة الي اس معين تعامل معاملة قوس مرفوع الى اس (هنا يجب ان نوفر مشتقة داخل القوس) أي نضيف واحد للاس ونقسم على الاس الجديد .

1) $\int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

2) $\int \tan^6 x \sec^2 x \, dx = \frac{1}{7}\tan^7 x + c$

3) $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) \, dx = \frac{1}{8}(\sin x - \cos x)^8 + c$

4) $\int \cot x \csc^3 x \, dx = \int \csc^2 x \, (\csc x \cot x) dx$

$= -\int \csc^2 x \, (-\csc x \cot x) dx = -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$

5) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx = \int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}} \, (1-x)^{\frac{-1}{2}} \, dx$

$= -2\int \cos(1-x)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{-1}{2}}\right] dx = -2\sin(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = -2\sin\sqrt{1-x} + c$

6) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx = 2\int \sin x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{-2}{3}} \, dx = (2)(3)\int \sin x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} \, dx = 6\int \sin x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} \, dx$

$= -6\cos x^{\frac{1}{3}} + c = -6\cos\sqrt[3]{x} + c$

ملاحظة

انتبه الى وجود دالة ال $\cos x$ و $\sin x$ معا او $\sec^2 x$ و $\tan x$ معا او $\csc^2 x$ و $\cot x$ معا في السؤال وذلك لان احدهما يمثل مشتقة الثاني (مشتقة داخل القوس) , واذا لم تجدها معا فنستخدم بعض القوانين لتحويلها وتبسيطها ومن ثم اجراء التكامل .

ملاحظة

في بعض الاحيان نحتاج بعض القوانين للحصول على دالة ومشتقتها او التكامل المباشر .

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$, $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

7) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\, dx = \int \tan^{-3} x \sec^2 x\, dx$ (2017 د3 احيائي)

$= -\frac{1}{2}\tan^{-2} x + c = -\frac{1}{2\tan^2 x} + c$

8) $\int (\tan x + \tan^3 x)\, dx = \int \tan x\,(1+\tan^2 x)\, dx$ (2018 د3 احيائي)

$= \int \tan x \sec^2 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$

9) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx = \int \tan x \sec^2 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$

10) $\int \csc^2 x \cos x\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}.\cos x\, dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\sin x} dx = \int \cot x \csc x\, dx = -\csc x + c$

ثالثا :- لا يمكن اجراء التكامل الا اذا كانت الزوايا موحدة .

أي يتم تحويل الزاوية من حالة الضعف الى حالة النصف $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

أي يتم تحويل الزاوية من حالة الضعف الى حالة النصف $\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$

ملاحظة

اذا كانت الدالة $\cos x$ هي الضعف نعتمد على الدالة المجاورة لها وكما يلي

1) اذا كانت الدالة المجاورة تحتوي $\cos x$ نستخدم القانون $1 - 2\sin^2 x$

2) اذا كانت الدالة المجاورة تحتوي على $\sin x$ نستخدم القانون $2\cos^2 x - 1$

3) اذا كانت الدالة تحتوي على $\cos x$ و $\sin x$ معا في المقام نستخدم القانون $\cos^2 x - \sin^2 x$

1) $\int \sin 6x \cos^2 3x\, dx = \int (2\sin 3x \cos 3x)\cos^2 3x\, dx$ (2014 د3 , 2016 د1)

$= 2\int \cos^3 3x \sin 3x\, dx = 2(-\frac{1}{3})\int \cos^3 3x(-3\sin 3x)\, dx$

$= \frac{-2}{3}.\frac{1}{4}\cos^4 3x + c = \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$

2) $\int \cos 2x \sin x\, dx = \int (2\cos^2 x - 1)\sin x\, dx$

$= \int (2\cos^2 x \sin x - \sin x)\, dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + c$

3) $\int \cos 2x \cos 4x \, dx = \int \cos 2x \, (1 - 2\sin^2 2x)dx$

$= \int (\cos 2x - 2\sin^2 2x \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \,(2)dx - \int \sin^2 2x \,(2\cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x + c$

4) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$ (1د 2014, 1د 2015)

$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx = \int (\cos 2x + \sin 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \,(2)dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x \,(2)dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

رابعا :- تكاملات مربعات الدوال الدائرية

$$\cos^2 x = \begin{cases} 1 - \sin^2 x & \text{اذا كان الاس عدد فردي} \\ \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) & \text{اذا كان الاس عدد زوجي} \end{cases}$$

$$\sin^2 x = \begin{cases} 1 - \cos^2 x & \text{اذا كان الاس عدد فردي} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) & \text{اذا كان الاس عدد زوجي} \end{cases}$$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

ملاحظة

تكامل $(\sec^2 x \ , \csc^2 x)$ هو تكامل مباشر (لا يحتاج لتحويلها)

1) $\int \sin^2 3x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \, dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

2) $\sin^2 8x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 16x) \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{16}\sin 16x\right) + c$

3) $\int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \, dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

4) $\int \tan^2 7x \, dx = \int (\sec^2 7x - 1) \, dx = \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

5) $\int \tan^2 8x \, dx = \int (\sec^2 8x - 1) \, dx = \frac{1}{8}\tan 8x - x + c$

6) $\int \cot^2 5x \, dx = \int (\csc^2 5x - 1) \, dx = -\frac{1}{5}\cot 5x - x + c$

ملاحظة

اذا كانت دالة ال $\cos x$ او $\sin x$ مرفوعة الى قوة (3) او اكثر عند الحل نتبع ما يلي

1) نجزء القوة الى قوة (2) في قوة واحد او اكثر 2) نطبق احد القوانين 3) نجري عملية التوزيع

4) التكامل

7) $\int \sin^3 x\ dx = \int \sin x \sin^2 x\ dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\ dx$

$= \int (\sin x - \cos^2 x\ \sin x)\ dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

8) $\int \cos^3 x\ dx = \int \cos x \cos^2 x\ dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\ dx$ (2018 خارج)

$= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x)\ dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

9) $\int \sin^4 x\ dx = \int [\sin^2 x]^2\ dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2\ dx$ (2000 د1)

$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\ dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\ dx$

$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]\ dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right]\ dx$

$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right]\ dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + c$

12) $\int \cos^4 3x\ dx = \int [\cos^2 3x]^2\ dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]^2\ dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 6x)^2\ dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x)\ dx$

$= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right] dx = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x\right]\ dx$

$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2} + 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x\right]\ dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\sin 6x + \frac{1}{24}\sin 12x\right] + c$

خامسا :- يفضل اجراء التبسيط ثم التكامل باستخدام قوانين التحويلات ان امكن .

1) $\int (1+\cos 3x)^2\ dx = \int (1+2\cos 3x+\cos^2 3x)\ dx$ **(2د 2013)**

$= \int \left[1+2\cos 3x+\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right] dx = \int \left[1+2\cos 3x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6x)\right] dx$

$= \int \left[\frac{3}{2}+2\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 6x)\right] dx = \frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{12}\sin 6x+c$

2) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\ dx = \int \frac{\cos x\ \cos^2 x}{1-\sin x}\ dx = \int \frac{\cos x\ (1-\sin^2 x)}{1-\sin x}\ dx$

$= \int \frac{\cos x\ (1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}\ dx = \int \cos x\,(1+\sin x)\ dx$

$= \int (\cos x+\sin x\cos x)\ dx = \sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+c$ **(2010 تمهيدي , 2017 د3 ت)**

3) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\ dx = \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}\ dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}\ \csc^2 2x\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}\ (-2\csc^2 2x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} 2x+c = -\frac{1}{3}\sqrt{\cot^3 2x}+c$

4) $\int (\cos^4 x-\sin^4 x)\ dx = \int (\cos^2 x-\sin^2 x)\ (\cos^2 x+\sin^2 x)\ dx$

$= \int \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2)\ dx = \frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\int (\sin 2x-1)(\cos^2 2x+2)\ dx = \int [\sin 2x\cos^2 2x+2\sin 2x-\cos^2 2x-2]\ dx$

$= \int \left[\cos^2 2x\sin 2x+2\sin 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)-2\right] dx$

$= \int \left[\cos^2 2x\sin 2x+2\sin 2x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x)-2\right] dx$

$= -\frac{1}{6}\cos^3 2x-\cos 2x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x-2x+c$

ملاحظة

اذا كان داخل الجذر دالة مثلثية واحدة والعدد واحد , فطريقة الحل هي اكمال مربع وذلك بالتعويض بالقانون $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ثم نختصر التربيع مع الجذر ونضع $(\pm)$ خارج التكامل اذا كان التكامل غير محدد

6) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\ dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\ dx$ (2014 د4 انبار)

$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\ dx = \pm \int (\sin x - \cos x)\ dx = \pm(-\cos x - \sin x) + c$

ملاحظة

طريقة الضرب بالعامل المرافق

7) $\int \frac{1}{1-\sin x} dx = \int \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx + \int \cos^{-2} x \sin x\, dx$

$= \tan x - \frac{\cos^{-1} x}{-1} + c = \tan x + \frac{1}{\cos x} + c = \tan x + \sec x + c$

س) جد التكامل لكل مما ياتي : (بعض الاسئلة الوزارية المهمة)

1) $\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)\ dx$ (2د 1996)

sol : $\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)\ dx = \int (\sec^2 x - \sin^2 x)\, dx$

$= \int \left[\sec^2 x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx = \int \left[\sec^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right] dx$

$= \tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

2) $\int \cos 2x\ \sin^2 x\, dx$ (1د 1997)

sol : $\int \cos 2x\ \sin^2 x\, dx = \int \cos 2x \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx$

$= \int \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x\right) dx = \int \left[\frac{1}{2}\cos 2x - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$

$= \int \left[\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}(1 + \cos 4x)\right] dx$

$= \int \left[\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x\right] dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$

3) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ (د1 2001)

sol : $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right] dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$

4) $\int \tan 3x \sec^5 3x \, dx$ (تمهيدي 2009)

sol : $\int \tan 3x \sec^5 3x \, dx = \int \sec^4 3x \sec 3x \tan 3x \, dx$

$= \frac{1}{3}\int \sec^4 3x (3 \sec 3x \tan 3x) \, dx = \frac{1}{15}\sec^5 3x + c$

5) $\int \cos^2 2x \sin x \, dx$ (د2 2008)

sol : $\int \cos^2 2x \sin x \, dx = \int (\cos 2x)^2 \sin x \, dx = \int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x \, dx$

$= \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)\sin x \, dx = \int (4\cos^4 x \sin x - 4\cos^2 x \sin x + \sin x)\, dx$

$= -4\int \cos^4 x (-\sin x)\, dx + 4\int \cos^2 x (-\sin x)\, dx + \int \sin x \, dx$

$= \frac{-4}{5}\cos^5 x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x + c$

الدكتور محمد الربيعي

خواص التكامل المحدد

اولا :- 1) **اذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة** $[a,b]$ **وكان**

$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ **فأن** $f(x) \geq 0 \ , \forall x \in [a,b]$

a) $f(x) = x^2 \geq 0 \ , \ \forall x \in [-1,2]$: **لان** $\int_{-1}^{2} x^2\,dx \geq 0$

b) $f(x) = 3 > 0 \ , \ \forall x \in [-2,3]$: **لان** $\int_{-2}^{3} 3\,dx > 0$

c) $f(x) = (x+1) > 0 \ , \ \forall x \in [2,3]$: **لان** $\int_{2}^{3} (x+1)\,dx > 0$

2) **اذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة** $[a,b]$ **وكان**

$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ **فأن** $f(x) \leq 0 \ , \forall x \in [a,b]$

a) $f(x) = -2 < 0 \ , \ \forall x \in [-1,2]$: **لان** $\int_{-1}^{2} (-2)\,dx < 0$

b) $f(x) = x \leq 0 \ , \ \forall x \in [-2,-1]$: **لان** $\int_{-2}^{-1} x\,dx \leq 0$

ثانيا :- **اذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة** $[a,b]$ **وكان c عددا حقيقيا ثابتا فان :**

$$\int_a^b c\,.f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

س) اذا كان $\int_2^5 f = 8$ **جد** $\int_2^5 5\,f$

sol : $\int_2^5 f(x)\,dx = 5\int_2^5 f(x)\,dx = 5(8)$

$= 40$ (** جعل الثابت خارج التكامل او العكس)

ثالثا :- **اذا كانت الدالتين** $f_1 \ , f_2$ **مستمرتين على الفترة** $[a,b]$ **فان**

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2) = \int_a^b f_1 \mp \int_a^b f_2$$

س) اذا كان $\int_1^3 f_1 = 17 \ , \int_1^3 f_2 = 15$ **جد** $\int_1^3 (f_1 + f_2) \ , \int_1^3 (f_1 - f_2)$

sol : $\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_1^3 f_1(x)\,dx + \int_1^3 f_2(x)\,dx = 17 + 15 = 32$

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \int_1^3 f_1(x)\,dx - \int_1^3 f_2(x)\,dx = 15 - 17 = -2$$

س) اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فاوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

sol : $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx = \int_1^2 3x^2\,dx + \int_1^2 2x\,dx$

$= [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = (8-1) + (4-1) = 7 + 3 = 10$

رابعا :- اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a\,,b]$ وكانت $c \in (a\,,b)$ فان :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

س) اذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فاوجد $\int_1^7 f(x)\,dx$

sol : $\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^7 f(x)\,dx = 5 + 8 = 13$

خامسا :-

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$, b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

س) اثبت ان $\int_3^3 x\,dx = 0$

sol : $\int_3^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$

ملاحظة عند تساوي بداية ونهاية فترة التكامل فان الناتج يكون صفرا

س) جد ناتج $\int_3^2 3x^2\,dx$

sol : $\int_3^2 3x^2\,dx = -\int_2^3 3x^2\,dx = -[x^3]_2^3 = -(27-8) = -19$

** انتبه قلب حدي التكامل وتغيير اشارته

س) احسب كل من التكاملات الاتية :

1) $\int_{-2}^{2}(3x-2)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{2} = (6-4)-(6+4) = 2-10 = -8$

2) $\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)\,dx = [-x^{-1}+x^2+x]_1^2 = \left[-\frac{1}{x}+x^2+x\right]_1^2$
$= \left[-\frac{1}{2}+4+2\right]-[-1+1+1] = \left[\frac{-1+8+4}{2}\right]-[1] = \frac{11}{2}-1 = \frac{9}{2}$

3) $\int_{1}^{3}(x^4+4x)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5+2x^2\right]_1^3 = \left[\frac{1}{5}(3)^5+2(3)^2\right]-\left[\frac{1}{5}(1)^5+2(1)^2\right]$
$= \left(\frac{243}{5}+18\right)-\left(\frac{1}{5}+2\right) = \frac{243}{5}+18-\frac{1}{5}-2 = \frac{242}{5}+16 = \frac{242+80}{5} = \frac{322}{5}$

4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(x+\cos x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = [0+\sin 0]-\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$
$= (0)-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi^2}{8}+1$

5) $\int_{3}^{2}\frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_{2}^{3}\frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_{2}^{3}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\,dx = -\int_{2}^{3}(x^2+x+1)\,dx$
$= -\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3 = -\left[\left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+2+2\right)\right] = -\left(12+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}-4\right)$
$= -\left(8+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}\right) = -8-\frac{9}{2}+\frac{8}{3} = \frac{-48-27+16}{6} = \frac{-59}{6}$ (2015 د4 رصافة)

6) $\int_{1}^{3}\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx = \int_{1}^{3}x^{-2}(2x^3-4x^2+5)\,dx = \int_{1}^{3}(2x-4+5x^{-2})\,dx$
$= [x^2-4x-5x^{-1}]_1^3 = \left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3$
$= \left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(1-4-5) = -3-\frac{5}{3}+8 = 5-\frac{5}{3} = \frac{15-5}{3} = \frac{10}{3}$

س) اوجد كل من التكاملات الاتية :

1) $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2\ dx = \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)\,dx$

$= \int_1^4 (x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)\,dx = \int_1^4 (x^3-3x-2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^4 = (64-24-8)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2\right) = 32-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+2$

$= 34-\frac{1}{4}+\frac{3}{2} = \frac{136-1+6}{4} = \frac{141}{4}$

2) $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}\ dx = \int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\ dx = \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}\ dx$

$= \int_2^3 (x+1)(x^2+1)\,dx = \int_2^3 (x^3+x+x^2+1)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+x\right]_2^3 = \left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+9+3\right)-(4+2+\frac{8}{3}+2)$

$= \frac{81}{4}+\frac{9}{2}+12-\frac{8}{3}-8 = \frac{81}{4}+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}+4 = \frac{243+54-32+48}{12} = \frac{313}{12}$

3) $\int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\ dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^2\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(x+4x^{\frac{1}{2}}+4)\,dx$

$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+2x^2+\frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1$

$= \left(\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3}\right)-(0) = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$

س) جد تكامل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ (تمهيدي 2015)

sol : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{-1}{2}}\cos x\,dx = \left[2(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[2\sqrt{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}\right)-\left(2\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right) = 2\sqrt{1}-2\sqrt{\frac{1}{2}} = 2-\frac{2}{\sqrt{2}}$

$= 2-\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$

س) جد تكامل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \sin^2 x \, dx$ (2018 د1 احيائي خارج)

sol : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x \cos x) \sin^2 x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x \, dx$

$= 2\left[\frac{1}{4}\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{4}[\sin^4 x]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left[(\sin\frac{\pi}{6})^4 - (\sin 0)^4\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 0\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{32}$

س) جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} \, dx$ (2009 د2) (من الاسئلة الوزارية المكررة)

sol : $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} \, dx = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}} \, dx = \int_3^8 \frac{x}{|x|\sqrt{(x+1)}} \, dx = \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}} \, dx$

$= \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{(x+1)}} \, dx = \int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}} \, dx = \left[2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8$

$= \left[2\sqrt{x+1}\right]_3^8 = \left(2\sqrt{9} - 2\sqrt{4}\right) = 2(3-2) = 2$

ملاحظة

القيمة المطلقة للمتغير x تم تعويضها بالصورة الموجبة لان جميع العناصر داخل حدود التكامل موجبة

$\int_a^b \sqrt{x^2} \, dx = \int_a^b |x| \, dx$ (المطلق هو ناتج للجذر التربيعي للقوة 2)

خطوات حل الدوال المطلقة

1) ناخذ ما بين المطلق ونساويه للصفر ونجد قيمة x وتسمى قيمة x الحد الفاصل (اذا كان الحد الفاصل يقع بين حدي التكامل نجزء التكامل , واذا وقع خارج حدي التكامل او احد حدي التكامل فلا يمكن ان نجزء التكامل)

2) نجعل الدالة مزدوجة (شطرية)

$$f(x)=\begin{cases} +\left(\text{الدالة}\right) & ,\forall\ x \geq \text{الحد الفاصل} \\ -\left(\text{الدالة}\right) & ,\forall\ x < \text{الحد الفاصل} \end{cases}$$

3) نكامل بالشكل الاتي : الجزء الموجب $\int_{\text{الحد الفاصل}}^{b}$ + الجزء السالب $\int_{a}^{\text{الحد الفاصل}}$

س) لتكن $f(x)=|x|$ اوجد $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$ (1د 2011)

الحل : f دالة مستمرة على الفترة $[-3\ ,4]$ ولها قاعدتان هما :-

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ,\forall\ x \geq 0 \\ -x & ,\forall\ x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{4} f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{4} x\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{4}$$

$$=\left[(0)-(-\frac{9}{2})\right]+\left[\left(\frac{16}{2}\right)-(0)\right]=\frac{9}{2}+\frac{16}{2}=\frac{25}{2}$$

س) اوجد كل من التكاملات الاتية :

1) $\int_{0}^{2}|x-1|\,dx$ (2د 2017 احيائي داخل)

Sol : $|x-1|=\begin{cases} x-1 & ,\forall\ x \geq 1 \\ -(x-1) & ,\forall\ x < 1 \end{cases}$

$$\int_{0}^{2}|x-1|\,dx=\int_{0}^{1}(-x+1)\ dx+\int_{1}^{2}(x-1)\ dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{2}=\left[\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(0)\right]+\left[(2-2)-(\frac{1}{2}-1)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=1$$

2) $\int_{-1}^{1}|x+1|\,dx$

Sol : $|x+1|=\begin{cases} x+1 & ,x\geq -1 \\ -(x+1) & ,x<-1 \end{cases}$

$\int_{-1}^{1}|x+1|\,dx=\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$

$=\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1=2$

ملاحظة تم الاكتفاء باخذ جزء واحد من الدالة المزدوجة لان الحد الفاصل لا يقع بين حدي التكامل المحدد

تكاملات الدوال المزدوجة (الشطرية)

1) اذا كان الحد الفاصل يقع ضمن الفترة المعطاة عند الحل يجب ان نبحث عن استمرارية الدالة عند الحد الفاصل ثم نجزء الفترة المعطاة .

1) $f(a)=\cdots$ تعوض بالدالة التي تقابل رمز المساواة

2) $\lim f(x)=\cdots \quad =L_1$ تعوض بالدالة التي تقابل علامة اكبر

3) $\lim f(x)=\cdots \quad =L_2$ تعوض بالدالة التي تقابل علامة اصغر

فاذا كانت $L_1=L_2$ عندها تكون الغاية موجودة

4) $f(a)=\lim f(x)$ عندها تكون الدالة مستمرة

ملاحظة نعوض الحد الفاصل في الدالة التي تقابل رمز المساواة .

2) اذا كان الحد الفاصل يقع خارج الفترة المعطاة فهنا نثبت الاستمرارية وناخذ التكامل من الطرف الذي تنتمي الفترة اليه

3) اذا كان الحد الفاصل هو احد حدي التكامل فهنا يجب ان نثبت الاستمرارية ثم نجري التكامل على احد الجزئين ونهمل الجزء الاخر

س) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ,\forall\, x\geq 1\\ 3 & ,\forall\, x<1\end{cases}$ فأوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$

الحل : f مستمرة على الفترة $[0\ ,5]$ وذلك لانها مستمرة عند $x=1$ لان

$f(1)=2(1)+1=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3 \quad L_1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3=3 \quad L_2$

$\therefore\ L_1=L_2=3$ الغاية موجودة

$\therefore\ F(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ الدالة مستمرة عند ال (1)

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x: x>1\}$ و $\{x: x<1\}$, وبما ان الدالة مستمرة على $[0\ ,5]$

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,\mathbf{d}x+\int_1^5 f(x)\,dx=\int_0^1 3\,dx+\int_1^5 (2x+1)\,dx$$
$$=[3x]_0^1+[x^2+x]_1^5=[3-0]+[(25+5)-(1+1)]$$
$$=3+(30-2)=3+28=31$$

س) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & ,\forall\, x\geq 3\\ 6 & ,\forall\, x<3\end{cases}$ فأوجد $\int_1^4 f(x)\,dx$ (2016 خارج)

sol : $f(3)=(2)(3)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=(2)(3)=6 \quad L_1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 3^-} \mathbf{f}(x)=6 \quad L_2$

$\therefore\ L_1=L_2=6$ الغاية موجودة

$\therefore\ F(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$ الدالة مستمرة عند ال (3)

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx=\int_1^3 6\,dx+\int_3^4 2x\,dx$$
$$=[6x]_1^3+[x^2]_3^4=[18-6]+[16-9]=12+7=19$$

س) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2 & ,\forall\, x\geq 0\\ 2x & ,\forall\, x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ (1د 2014)

sol : $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \quad L_1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \quad L_2$

$\therefore\ L_1=L_2=0$ الغاية موجودة

$\therefore\ F(3)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ الدالة مستمرة عند ال (0)

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 2x\,dx+\int_0^3 3x^2\,dx$$
$$=[x^2]_{-1}^0+[x^3]_0^3=[0-1]+[27-0]=-1+27=26$$

اللوغاريتم الطبيعي

اذا كانت $y = \ln u$ **فان** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ **حيث ان** $u > 0$ **وبالتالي فان** $\int \frac{1}{u} . du = \ln u + c$

حيث ان $u = f(x)$ **وان** $du = f'(x)$

س) اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ **فاوجد** $\frac{dy}{dx}$.

sol : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2+4}(6x) = \frac{6x}{3x^2+4}$

س) جد $\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta}$

sol : $\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta} = \ln|1+\sin\theta| + c$

ملاحظة **اذا كانت مشتقة المقام في البسط نستخدم :** $\ln|\text{المقام}| + c$

اذا كانت $y = e^u$ **فان** $\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$ **وبالتالي فان** $\int e^u \, du = e^u + c$

س) لتكن $y = e^{\tan x}$ **فجد** $\frac{dy}{dx}$

sol : $y = e^{\tan x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\tan x} . \sec^2 x$

س) جد $\int x\, e^{x^2} \, dx$ (3د 2013)

sol : $\int x\, e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x)dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

اذا كانت $y = a^u$ **فان** $\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ **وبالتالي فان** $\int a^u \, du = \frac{1}{\ln a} . a^u + c$

س) جد $\frac{dy}{dx}$ **لكل مما يأتي :**

1) $y = 3^{2x-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}(2)(\ln 3) = 2 \ln 3 \ (3^{2x-5})$

2) $y = 2^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2}(-2x)(\ln 2) = -2x \ln 2 \ (2^{-x^2})$

3) $y = 5^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{\sin x}(\cos x)(\ln 5)$

$\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln x^n = n \ln x$, $\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x$, $\ln 1 = 0$, $\ln a = \ln b \rightarrow a = b$, $e^0 = e^{\ln 1} = 1$

$a^u = e^{u \ln a}$, $n \ln x = \ln x^n$, $\ln e = 1$

س) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $y = \ln 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

2) $y = \ln \left|\frac{x}{3}\right| \Rightarrow y = \left|\frac{1}{3}x\right| \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{3}x}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{x}$

3) $y = \ln(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

4) $y = (\ln x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \ln x \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 \ln x}{x}$

5) $y = \ln(\frac{1}{x})^3 \Rightarrow y = \ln(x^{-1})^3 \Rightarrow y = \ln(x^{-3})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} = \frac{-3x^3}{x^4} = \frac{-3}{x}$

6) $y = \ln(2 - \cos x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(-\sin x)}{2-\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

7) $y = e^{-5x^2+3x+5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (-10x + 3)\, e^{-5x^2+3x+5}$

8) $y = 9^{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\ln 9) = \frac{9^{\sqrt{x}} \ln 9}{2\sqrt{x}}$

9) $y = 7^{\frac{-x}{4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{\frac{-x}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right)(\ln 7) = -\frac{1}{4} \ln 7 \ (7^{\frac{-x}{4}})$

10) $y = x^2 e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 e^x + 2x e^x$

الدكتور محمد الربيعي

س) جد التكاملات الاتية :

1) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln|x+1|]_0^3 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$ (2018)

2) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = [\ln|x^2+9|]_0^4 = \ln 25 - \ln 9 = \ln \frac{25}{9}$ (2012 و 2015 تمهيدي)

3) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}\,[e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}(e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3})$ 2016 , 1د 2014, 1د 2012) (1د

$= \frac{1}{2}[(e^{\ln 5^2}) - (e^{\ln 3^2})] = \frac{1}{2}[(5)^2 - (3)^3] = \frac{1}{2}(25-9) = \frac{1}{2}(16) = 8$

4) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^{\ln 2} = -[e^{-\ln 2} - e^0] = -[e^{\ln(2)^{-1}} - 1]$

$= -e^{\ln \frac{1}{2}} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

5) $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x\,dx = \left[\frac{1}{3}(1+e^x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}[(1+e^x)^3]_0^1$ (2د 2013 , 1د 2011)

$= \frac{1}{3}[(1+e^1)^3 - (1+e^0)^3] = \frac{1}{3}[(1+e^1)^3 - (1+1)^3]$

$= \frac{1}{3}[(1+e^1)^3 - (2)^3] = \frac{1}{3}[(1+e^1)^3 - 8]$

6) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx = [\ln|x^3+4x+1|]_0^1 = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6$ (2د 2011)

7) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = (e^{\sqrt{4}}) - (e^{\sqrt{1}}) = e^2 - e$ (2د 2015 , 2د 2012)

8) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)}\,dx = [\ln(2+\tan x)]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(2+\tan(\frac{-\pi}{4})\right]$ (1د 2011)

$= \left[\ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(2-\tan\frac{\pi}{4})\right] = \ln(2+1) - \ln(2-1) = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$

9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x\,dx = \left[2(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$ (تمهيدي 2015)

$= [2\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}\right) - \left(2\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right) = (2\sqrt{1}) - (2\sqrt{\frac{1}{2}})$

$= 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$

10) $\int \cot^3 5x\ dx = \int \cot^2 5x\ \cot 5x\ dx = \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\ dx$

$= \int (\cot 5x \csc^2 5x - \cot 5x)\ dx$

$= \frac{-1}{5}\int \cot 5x\,(-5\csc^2 5x)\ dx - \frac{1}{5}\int \frac{5\cos 5x}{\sin 5x}dx$

$= -\frac{1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\ dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}(-\sin x)\,dx = [-e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$ (2011 خارج)

$= \left[(-e^{\cos\frac{\pi}{2}}) - (-e^{\cos 0})\right] = [-e^0 + e^1] = -1 + e$

12) $\int_1^2 x\, e^{-\ln x}\,dx = \int_1^2 x\,(e^{\ln x})^{-1}dx = \int_1^2 x\,(x^{-1})dx = \int_1^2 1\,dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

س) جد التكامل لكل مما ياتي : (بعض الاسئلة الوزارية المهمة)

س1) جد $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$ (2015 خارج)

sol : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|$

$= \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = -\ln\frac{1}{2} = -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2$

س2) جد $\int \tan x\ dx$ (2016 تمهيدي)

sol : $\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$

س3) جد تكامل $\int \tan^3 2x\,dx$ (2017 د2 احيائي داخل)

sol : $\int \tan^3 2x\,dx = \int \tan 2x\ \tan^2 2x\ dx = \int \tan 2x\,(\sec^2 2x - 1)\,dx$

$= \int (\tan 2x\ \sec^2 2x - \tan 2x)\ dx = \frac{1}{2}\int \tan 2x\,(2\sec^2 2x)\,dx - \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx$

$= \frac{1}{2}\int \tan 2x\,(2\sec^2 2x)\,dx - (-\frac{1}{2})\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{4}\tan^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

س4) جد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \ \sin x \, dx$ (تمهيدي 2012)

sol : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \ \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx$

$= -[\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left[\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| - \ln|\cos 0|\right] = -\left[\ln\left|\frac{1}{2}\right| - \ln|1|\right] = -\left(\ln\frac{1}{2} - 0\right) = -\ln\frac{1}{2}$

س5) جد $\int \sqrt{e^{2x-4}} \, dx$ (د3 2014)

sol : $\int \sqrt{e^{2x-4}} \, dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}} \, dx = \int e^{x-2} \, dx = e^{x-2} + c$

س6) جد تكامل $\int_1^3 3x \, e^{\ln x} \, dx$ (د2 2017 تطبيقي خارج)

sol : $\int_1^3 3x \, e^{\ln x} \, dx = \int_1^3 3x \, (x) \, dx = \int_1^3 3x^2 \, dx = [x^3]_1^3 = 27 - 1 = 26$

س) اثبت ان :

1) $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2$ (خارج 2015)

sol : $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} \, x^{\frac{-2}{3}} dx = 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} \, (\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}) dx$

$= \left[3\left(\frac{2}{3}\right)(x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{x} - 1)^3}\right]_1^8 = 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{x} - 1)^3}\right]_1^8$

$= 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{8} - 1)^3} - \sqrt{(\sqrt[3]{1} - 1)^3}\right] = 2\left[\sqrt{(2-1)^3} - \sqrt{(1-1)^3}\right]$

$= 2\left[\sqrt{(1)^3} - \sqrt{(0)^3}\right] = 2(1 - 0) = 2$

2) $\int_{-2}^4 |3x - 6| \, dx = 30$ (د3 2014)

sol : $|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & , x \geq 2 \\ -(3x - 6) & , x < 2 \end{cases}$

$\int_{-2}^4 |3x - 6| \, dx = \int_{-2}^2 (-3x + 6) \, dx + \int_2^4 (3x - 6) \, dx$

$= \left[-\frac{3}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^2 + \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_2^4$

$= [(-6 + 12) - (-6 - 12)] + [(24 - 24) - (6 - 12)]$

$= (6 + 18) + (6) = 30$

س) $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2\ ,\ 6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)\ dx = 6$ وكان (2016 د1)

$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\ dx = 32$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$

sol : $\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\ dx = 32 \Rightarrow \int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx + \int_{-2}^{6}[3]\,dx = 32$

$\int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx + [3x]_{-2}^{6} = 32 \Rightarrow \int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx + [18-(-6)] = 32$

$\int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx = 8$

$\int_{-2}^{6}[f(x)]\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{6} f(x)\ dx$

$8 = \int_{-2}^{1} f(x)\ dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\ dx = 8-6 = 2$

س) جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a (x+\frac{1}{2})\ dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx$ (2014 تمهيدي)

sol : $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] = 2(1-0) = 2$

$\int_1^a (x+\frac{1}{2})\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_1^a = \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1$

$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx$

$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1 = 2\ ]*2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 4 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$

$(a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -3 \quad OR \quad a = 2$

س) لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$, دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_1^3 f(x)\,dx$ 2015) د4 رصافة , 2016 تمهيدي)

الحل : بما ان الدالة تمتلك نهاية صغرى فان $\bar{f}(x) = 0$, $y = -5$

$\bar{f}(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

$\therefore \bar{\bar{f}}(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

$\therefore (-1, -5) \in f(x)$ نقطة النهاية الصغرى المحلية

$f(x) = x^2 + 2x + k \Rightarrow -5 = 1 - 2 + k \Rightarrow -5 = -1 + k \Rightarrow k = -4$

$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 4$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{3}(3)^3 + (3)^2 - 4(3)\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 - 4(1)\right]$$

$$= (9 + 9 - 12) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 4\right) = 6 - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = 6 - \frac{1}{3} + 3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

س) اذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب $(a\ ,\ b)$ جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f`(x)\,dx - \int_0^a f``(x)\,dx$. (2015 د4 رصافة , 2017 د1 احيائي)

الحل : نقطة الانقلاب ناتجة من مساواة المشتقة الثانية بالصفر

$\bar{f}(x) = 3(x-3)^2 \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 6(x-3)$, $\bar{\bar{f}}(x) = 0$

$6(x-3) = 0] \div 6 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1 \Rightarrow (3, 1)$ نقطة انقلاب

$(3, 1) = (a, b) \Rightarrow a = 3, \quad b = 1$

$$\int_0^b f`(x)\,dx - \int_0^a f``(x)\,dx = \int_0^1 3(x-3)^2\,dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$= [(x-3)^3]_0^1 - [3(x-3)^2]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)^3] - [3(3-3)^2 - 3(0-3)^2]$$

$$= [(-2)^3 - (-3)^3] - [3(0)^2 - 3(-3)^2] = [-8 - (-27)] - [0 - 3(9)]$$

$$= [-8 + 27] - [0 - 27] = 19 + 27 = 46$$

تمارين عامة

س6) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$

Sol : $x^3 \cdot 2y\frac{dy}{dx} + y^2 \cdot 3x^2 - 2\frac{dy}{dx} = 5$

$2yx^3\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2$

$(2yx^3 - 2)\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2yx^3 - 2}$

2) $y = (\sin x + \cos x)^2$

Sol : $y = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x$

$y = 1 + \sin 2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$

3) $y = e^{x^2} \ln|2x|$ (2018 د3 تطبيقي)

Sol : $\frac{dy}{dx} = e^{x^2} \cdot \frac{1}{2x}(2) + \ln|2x| \cdot 2x\, e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{x} + 2x\, e^{x^2} \ln|2x|$

4) $y = \tan(\cos x)$

Sol : $\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x) \cdot (-\sin x) = -\sin x \sec^2(\cos x)$

5) $y = x^2 \ln|x|$

Sol : $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln|x| \cdot 2x = x + 2x \ln|x|$

6) $y = \ln(\tan^2 x)$

Sol : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan^2 x}(2\tan x \cdot \sec^2 x) = 2\cot x \cdot \sec^2 x$

الدكتور محمد الربيعي

7) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

sol : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(e^x - e^{-x}).(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}).(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= \dfrac{(e^{2x} - e^0 - e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} + e^0 + e^0 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= \dfrac{(e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= \dfrac{(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

8) $y = \cos(e^{\pi x})$

Sol : $\dfrac{dy}{dx} = -\sin(e^{\pi x}) \cdot \pi e^{\pi x} = -\pi e^{\pi x} \sin(e^{\pi x})$

الدكتور محمد الربيعي

المساحات

اولا :- المساحة بين منحني دالة ومحور السينات

اذا كانت $y = f(x)$ معادلة منحني فان المساحة بين هذا المنحني ومحور السينات بالفترة $[a , b]$ هي :

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

ملاحظة

لإيجاد هذه المساحة نقوم ابتداءا بمساواة دالة المنحني بالصفر ($y = 0$) ثم نحل المعادلة لايجاد قيم x , ومن ثم يتحول السؤال الى احد الاحتمالات الخمسة التالية :

1) اذا علمت فترة في السؤال $[a , b]$ فنقوم بعرض قيم x الناتجة من مساواة الدالة بالصفر عليها فاذا كانت تنتمي لها فنقوم بتجزئة التكامل الى جزئين او اكثر , اما اذا كانت طرف فيها او لا تنتمي لها فلا نجزئ التكامل وفي كلتا الحالتين نقوم بسحب القيمة المطلقة الى خارج هذا التكامل .

2) يمكن ان تستبدل الفترة $[a , b]$ في السؤال بعبارة المستقيمين $x = a \ , x = b$ ويكون لها نفس التفسير السابق .

3) اذا لم يعلم فترة او مستقيمين في السؤال فان قيم x الناتجة من مساواة الدالة بالصفر ترتب تصاعديا ويتم اعتبارها فترات التكامل دون اهمال أي قيمة وفي هذه الحالة فان قيم x الناتجة تكون على الاقل قيمتين .

4) اذا كان المطلوب ايجاد المساحة بين منحني معين ومحور السينات والمستقيم $x = a$ فقط , فنقوم باضافة هذه القيمة الى القيم الناتجة من مساواة الدالة بالصفر ثم ترتب تصاعديا ويتم اعتبارها فترات للتكامل دون اهمال أي قيمة .

5) اذا لم نتمكن من مساواة الدالة بالصفر كأن تكون مجموع مربعين او اذا كانت الدالة لا يمكن تحليلها بالطرق المعروفة فان المساحة تكون تكاملا واحدا وعلى الفترة المعطاة .

س)جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2\,,2]$ (2007 تمهيدي)

الحل : نجعل $f(x) = 0$ $\quad x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0\ , x = 2\ , x = -2$

∴ فترات التكامل هي : $[0\,,2]\ ,\ [-2\,,0]$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - (4-8) = -(-4) = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2} = (4-8) - 0 = -4$$

$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة

س) جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 3\ , x = 1$.

sol : if $y = 0 \ \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \in /[1\,,3]$ (3د 2013)

$$A = \left|\int_{1}^{3} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{1}^{3} x^2\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{3}\right| = \left|(9) - (\frac{1}{3})\right| = \left|\frac{26}{3}\right| = \frac{26}{3}$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1\ , x = -1$.

sol : $y = 0 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

either $x = 0 \in [-1\,,1]$ OR $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \in [-1\,,1]$

∴ فترة التكامل هي $[-1,\ 0]\,,[0\,,1]$

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^4 - x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^4 - x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|0 - \left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right| = \left|\frac{7}{10}\right| + \left|\frac{-3}{10}\right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات. (2006 تمهيدي, 2013 د1)

sol: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \therefore x = 0 \ , \quad x = 1 \ , \quad x = 2$

$\therefore$ فترة التكامل هي $[0\ ,1]\ ,[1\ ,2]$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2 = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{-1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

س) جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات . (2005 د1)

sol : $\text{if } y = 0 \rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x(x+3)(x+1) = 0$

$x = 0 \quad \text{OR} \quad X = -3 \quad \text{OR} \quad x = -1 \rightarrow$ فترات التكامل $[-3\ ,-1]\ ,[-1\ ,0]$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} f(x)\ dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} f(x)\ dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right)\right| + \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + \frac{108}{3} - \frac{27}{2}\right| + \left|-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right|$$

$$= \left|-\frac{80}{4} + \frac{104}{3} - \frac{24}{2}\right| + \left|\frac{-3 + 16 - 18}{12}\right| = \left|-20 + \frac{104}{3} - 12\right| + \left|\frac{-5}{12}\right|$$

$$= \left|-32 + \frac{104}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right| = \left|\frac{-96 + 104}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right|$$

$$= \left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32 + 5}{12} = \frac{37}{12}$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات .

sol : if $y=0 \rightarrow x^4-x^2=0 \rightarrow x^2(x^2-1)=0$

$x^2=0 \rightarrow x=0$ OR $x^2=1 \rightarrow x=\mp 1 \rightarrow [-1,0]\ ,[0,1]$ فترات التكامل

$$A_1=\int_{-1}^{0}(x^4-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=(0)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{-2}{15}$$

$$A_2=\int_{0}^{1}(x^4-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)-(0)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{-2}{15}$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{-2}{15}\right|+\left|\frac{-2}{15}\right|=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$ وحدة مساحة

س) جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)=x^2-1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2\ ,3]$.

sol : $f(x)=0 \Rightarrow x^2-1=\mathbf{0} \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$

either $x=1 \in [-2,3]$, or $x=-1 \in [-2,3]$

∴ نجزء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية : $[-2,-1]\ ,[-1,1]\ ,[1,3]$

$$A_1=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1}=\left[-\frac{1}{3}+1\right]-\left[-\frac{8}{3}+2\right]$$

$$=\left[\frac{-1+3}{3}\right]-\left[\frac{-8+6}{3}\right]=\left[\frac{2}{3}\right]-\left[\frac{-2}{3}\right]=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{3}-1\right]-\left[-\frac{1}{3}+1\right]$$

$$=\left[\frac{1-3}{3}\right]-\left[\frac{-1+3}{3}\right]=\left[\frac{-2}{3}\right]-\left[\frac{2}{3}\right]=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$A_3=\int_{1}^{3}(x^2-1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{3}=[9-3]-\left[\frac{1}{3}-1\right]=6-\left[\frac{1-3}{3}\right]=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$$

$$A=|A_1|+|A_2|+|A_3| \Rightarrow A=\left|\frac{4}{3}\right|+\left|-\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{20}{3}\right|=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=\frac{28}{3}$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-3x^2-4$ وعلى الفترة $[-2\ ,3]$ ومحور السينات .

sol : if $y=0 \rightarrow x^4-3x^2-4=0 \rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$

$x^2+1=0$ يهمل , $x^2=4 \rightarrow x=2 \in [-2,3]$ يجزئ OR $x=-2 \in [-2,3]$ لا يجزئ

فترات التكامل $[-2,2]\ ,[2,3]$

$$A_1=\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left(\frac{32}{5}-8-8\right)-\left(\frac{-32}{5}+8+8\right)=\frac{32}{5}-8-8+\frac{32}{5}-8-8=\frac{64}{5}-32=\frac{64-160}{5}$$

$$=\frac{-96}{5}$$

$$A_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 (x^4 - 3x^2 - 4)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x\right]_2^3$$
$$= \left(\frac{243}{5} - 27 - 12\right) - \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) = \frac{243}{5} - 39 - \frac{32}{5} + 16 = \frac{211}{5} - 23 = \frac{211 - 115}{5} = \frac{96}{5}$$
$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-96}{5}\right| + \left|\frac{96}{5}\right| = \frac{96}{5} + \frac{96}{5} = \frac{192}{5}$$ وحدة مساحة

ملاحظات :

1) $\sin x = 0 \rightarrow x = 0 + n\pi \quad , n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2 , \ldots$ حسب الحاجة

2) $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad , n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2 , \ldots$ حسب الحاجة

3) $\sin(-x) = -\sin x \quad , \quad \cos(-x) = \cos x$

س) جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$.

sol : $y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \quad , n \in Z$

$n = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$

$n = 1 \Rightarrow x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$

$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$

$n = -1 \Rightarrow x = -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$

نجزئ فترات التكامل الى الفترات الجزئية الاتية $\left[-\frac{\pi}{2} , 0\right] , \left[-0 , \pi\right]$

$$A_1 = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0} = [-\cos 0] - \left[-\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] = -\cos 0 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -1 + 0 = -1$$
$$A_2 = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = [-\cos \pi] - [-\cos 0] = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$
$$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = |-1| + |2| = 1 + 2 = 3$$ وحدة مربعة

س) جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=\cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi,\pi]$.

sol : if $y=0 \rightarrow \cos x=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in Z$

$n=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[-\pi,\pi]$ يجزئ التكامل (2018 د1 تطبيقي خارج)

$n=1 \rightarrow x=\frac{3\pi}{2}\notin[-\pi,\pi]$ لا يجزئ التكامل

$n=-1 \rightarrow x=-\frac{\pi}{2}\in[-\pi,\pi]$ يجزئ التكامل

$n=-2 \rightarrow x=-\frac{3\pi}{2}\in[-\pi,\pi]$ لا يجزء التكامل

نجزئ فترات التكامل الى الفترات الجزئية الاتية $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$$A_1=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}=\sin(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\pi)=-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi=-1+0=-1$$

$$A_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(-\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2$$

$$A_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}=0-1=-1$$

$$A=|A_1|+|A_2|+|A_3|$$

$A=|-1|+|2|+|-1|=1+2+1=4$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x)=\sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

sol : if $y=0 \rightarrow \sin 3x=0 \rightarrow 3x=0+n\pi$, $n\in Z$

$n=0 \rightarrow 3x=0 \rightarrow x=0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لا يجزئ التكامل

$n=1 \rightarrow 3x=\pi \rightarrow x=\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ يجزئ التكامل

$n=2 \rightarrow 3x=2\pi \rightarrow x=\frac{2\pi}{3}\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لا يجزئ التكامل

نجزئ فترات التكامل الى الفترات الجزئية الاتية $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

$$A_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx=\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{3}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{3}(-1-1)=-\frac{1}{3}(-2)=\frac{2}{3}$$

$$A_2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\,dx=\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\pi\right)=-\frac{1}{3}[0-(-1)]=-\frac{1}{3}$$

$A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{-1}{3}\right|=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ وحدة مساحة

ملاحظة

نقوم بتعويض القيم الموجبة ل (n) فقط اذا كانت فترة التكامل في السؤال موجبة فقط , نقوم بتعويض القيم الموجبة والسالبة ل (n) اذا كانت فترة التكامل في السؤال موجبة وسالبة .

س) جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$.

(2003 د2 , 2006 د2 , 2009 د2 , 2016 د1 خارج)

sol : $f(x) = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

نجزئ فترات التكامل الى الفترات الجزئية الاتية $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right]$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 x - 1)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

ثانيا :- المساحة المحددة بمنحنيين

اذا علمت معادلتي منحني $y = f(x)\ ,\ y = g(x)$ المعرفتين على الفترة $[a\ ,\ b]$ فان المساحة المحددة بينهما هي :

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx$$

ملاحظة لايجاد نقاط التقاطع (قيم x) نجعل $f(x) = g(x) \rightarrow f(x) - g(x) = 0$ فاذا كان الناتج ينتمي للفترة $[a\ ,b]$ فنجزئ الفترة كما تعلمنا سابقا واذا كان الناتج لا ينتمي للفترة فيهمل وتؤخذ الفترة المعطاة فقط .

ملاحظة اذا لم تعطى فترة في السؤال فالفترة يتم تحديدها من خلال نقاط تقاطع الدالتين .

ملاحظة اذا كانت الدالة لها اكثر من صورة واحدة عند التبسيط والحل لاستخراج قيم المتغير x فيمكن اجراء التكامل علي أي صورة منها ما لم نضرب بعدد او نقسم على عدد او نرفع الطرفين الى قوى معينة كأن تكون تربيع او جذر .

- يجب التخلص من الجذور ان وجدت .
- نتخلص من الكسور بضرب المعادلة في المقام .

س) جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$. (2011 د1)

sol : $\sqrt{x} = x$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0$

$x(1 - x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0\ ,\ \ x = 1 \ \Rightarrow \ [0\ ,1]$ فترة التكامل

$$A = \left|\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right| = \left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)\right| = \left|\frac{4 - 3}{6}\right| = \frac{1}{6}$$ وحدة مساحة

س) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$. (2015 تمهيدي)

sol : $x^3 = x \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0 \quad OR \quad x = 1 \quad OR \quad x = -1 \rightarrow [-1, 0] , [0, 1]$ فترات التكامل

$$A = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{1} \right|$$

$$= \left| 0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) \right| + \left| (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - 0 \right| = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \sqrt{x-1}$, $y = \frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2 , 5]$. (2018 د3 تطبيقي)

sol : $\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1}$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = x - 1] * 4 \Rightarrow x^2 = 4x - 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$A = \int_{2}^{5} \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x-1} \right) dx = \int_{2}^{5} \left(\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_{2}^{5}$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \right]_{2}^{5} = \left[\left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{(5-1)^3} \right) - (\frac{4}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{(2-1)^3}) \right]$$

$$= \left[\left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{(4)^3} \right) - (1 - \frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}) \right] = \left[\left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}(8) \right) - (1 - \frac{2}{3} \right]$$

$$= \left(\frac{25}{4} - \frac{16}{3} \right) - \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{75 - 64}{12} \right) - \frac{1}{3} = \frac{11}{12} - \frac{1}{3} = \frac{11 - 4}{12} = \frac{7}{12}$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12$, $y = x^2$. (1997 د2 , 2008 د1 , 2015 د3)

sol : $x^4 - 12 = x^2 \rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$

$x^2 + 3 = 0$ يهمل , $x^2 = 4 \rightarrow x = \mp 2 \rightarrow [-2 , 2]$ فترة التكامل

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12)\, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 12x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 \right) - (\frac{-32}{5} + \frac{8}{3} + 24) \right| = \left| \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 \right|$$

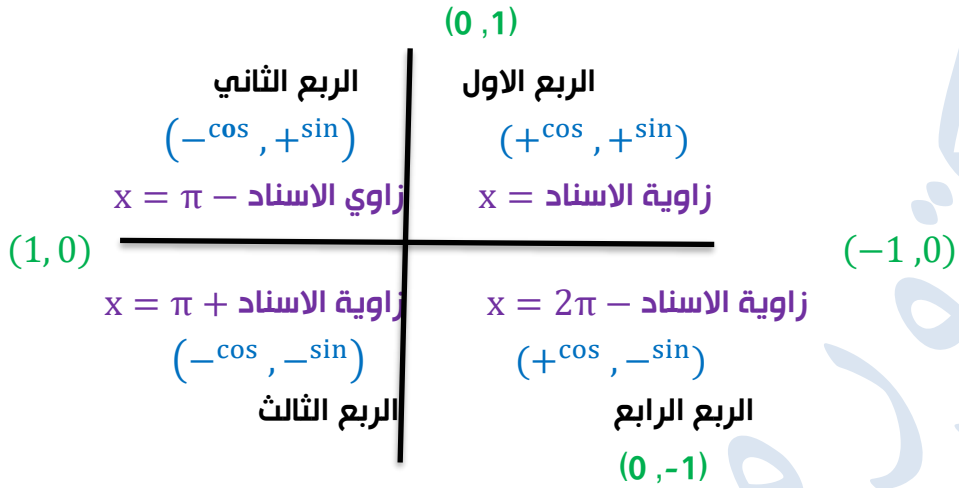
$$= \left| \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 \right| = \left| \frac{192 - 80 - 720}{15} \right| = \left| \frac{-608}{15} \right| = \frac{608}{15}$$ وحدة مساحة

ملاحظات :-

1) اذا كانت $\sin ax\ ,\cos ax = \mp\left\{\frac{1}{2}\ ,\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ نستخرج زاوية الاسناد ثم نستخرج قيمة x حسب موقع الزاوية في الارباع الاربعة .

2) اذا كانت $\tan ax\ ,\cot ax = \mp\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\sqrt{3}\ ,1\right\}$ نستخرج زاوية الاسناد ثم نستخرج قيمة x حسب موقع الزاوية في الارباع الاربعة .

3) اذا كانت $\sin ax\ ,\cos ax = \{1\ ,-1\}$ نستخرج قيمة x من خلال موقعها في دائرة الوحدة .



س) جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x\ ,\ g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ (2014 تمهيدي خارج)

sol : $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \quad , \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{or} \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right]$

نجزئ فترات التكامل الى الفترات الجزئية الاتية $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{4}\right]\ ,\left[\frac{\pi}{4}\ ,\frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\,dx\right|$$

$$= \left|[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\frac{-\pi}{2} + \cos\frac{-\pi}{2}\right)\right| + \left|\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1 + 0)\right| + \left|(1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| + \left|1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1\right| + \left|1 - \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|$$

$$= |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin x\cos x$ حيث $x\in[0\,,2\pi]$.

(1998 د2 , 2004 د1 , 2009 تمهيدي, 2014 د1 , 2015 خارج)

sol : $\sin x\cos x=\sin x \Longrightarrow \sin x\cos x-\sin x=0 \Longrightarrow \sin x(\cos x-1)=0$

either $\sin x=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0 \in[0\,,2\pi]\\ \pi\in[0\,,2\pi]\\ 2\pi\in[0\,,2\pi]\end{cases}$

OR $\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=1\Rightarrow x=\begin{cases}0\in[0\,,2\pi]\\ 2\pi\in[0\,,2\pi]\end{cases}$

نجزئ فترات التكامل الى الفترات الجزئية الاتية $[0\,,\pi]\ ,[\pi\,,2\pi]$

$$A=\left|\int_0^{\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx\right|+\left|\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx\right|$$
$$=\left|\int_0^{\pi}\sin x(\cos x-1)\,dx\right|+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x(\cos x-1)\,dx\right|$$
$$=\left|-\int_0^{\pi}(\cos x-1)(-\sin x)dx\right|+\left|-\int_{\pi}^{2\pi}(\cos x-1)(-\sin x)dx\right|$$
$$=\left|\left[\frac{-1}{2}(\cos x-1)^2\right]_0^{\pi}\right|+\left|\left[\frac{-1}{2}(\cos x-1)^2\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$
$$=\left|\left[\frac{-1}{2}(\cos\pi-1)^2\right]-\left[\frac{-1}{2}(\cos 0-1)^2\right]\right|$$
$$+\left|\left[\frac{-1}{2}(\cos 2\pi-1)^2\right]-\left[\frac{-1}{2}(\cos\pi-1)^2\right]\right|$$
$$=\left|\left[\frac{-1}{2}(-1-1)^2\right]-\left[\frac{-1}{2}(1-1)^2\right]\right|+\left|\left[\frac{-1}{2}(1-1)^2\right]-\left[\frac{-1}{2}(-1-1)^2\right]\right|$$
$$=\left|\left[\frac{-1}{2}(-2)^2\right]-\left[\frac{-1}{2}(0)^2\right]\right|+\left|\left[\frac{-1}{2}(0)^2\right]-\left[\frac{-1}{2}(-2)^2\right]\right|$$
$$=\left|\frac{-1}{2}(4)\right|+\left|\frac{-1}{2}(4)\right|=|-2|+|-2|=2+2=4$$ وحدة مساحة

س) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$, $g(x)=\sin x$ حيث $x\in\left[0\,,\frac{3\pi}{2}\right]$.

sol : $2\sin x+1=\sin x\rightarrow 2\sin x+1-\sin x=0$ (2د 2013)

$\sin x+1=0\rightarrow\sin x=-1\rightarrow x=\frac{3\pi}{2}\in\left[0\,,\frac{3\pi}{2}\right]$ لا يجزي التكامل

$$A=\left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)\,dx\right|=\left|[-\cos x+x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right|$$
$$=\left|\left(-\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)-(-\cos 0+0)\right|=\left|\left(\frac{3\pi}{2}\right)-(-1)\right|=\left|\frac{3\pi}{2}+1\right|=\frac{3\pi+2}{2}$$ وحدة مساحة

المسـافـة

اذا كانت $V(t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم فان المسافة المقطوعة بالفترة $[t_1 , t_2]$ هي:

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| \ dt$$

حيث ان وجود القيمة المطلقة داخل التكامل تعني وجوب مساواة دالة السرعة بالصفر لاستخراج قيم t ثم عرضها على الفترة المعطاة فاذا كانت تنتمي لها تكون تجزئة التكامل اجبارية واذا كانت طرفا فيها او لا تنتمي لها فان عدم التجزئة تكون اجبارية وفي كلتا الحالتين يسحب المطلق خارج التكامل .

يتم التعامل مع المسافة كما تعاملنا مع المساحة حيث ان المسافة كمية غير متجهة لذلك يجب ان تكون موجبة , اما الازاحة والسرعة والتعجيل فانها كمية متجهة

ملاحظة

الازاحة التي يقطعها الجسم بالفترة $[t_1 , t_2]$ $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \ dt$ وفي هذه الحالة لا يجب مساواة السرعة بالصفر لاستخراج قيم t أي ان الازاحة هي تكامل السرعة مباشرة على الفترة المعطاة .

ملاحظة

اذا طلب المسافة في الثانية الخامسة هذا يعني (الزمن من4 الى 5 $\int_4^5$) او في الثانية الثالثة هذا يعني (الزمن من 2 الى 3 $\int_2^3$) وهكذا .

ملاحظة

اذا طلب المسافة او بعد الجسم بعد مرور (t=2 , 3 ...) ثانية من بدأ الحركة هذا يعني (الزمن من 0 الى t=2 ,3 ...) وهكذا $\int_0^{t=2,3...}$

ملاحظة

اذا كانت a(t) يمثل تعجيل جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة V(t) فان

$$v = \int a(t) \, dt$$

يجب ان يكون هذا التكامل غير محدد

$$a(t) = v`(t)$$

السرعة = مشتقة الازاحة او المسافة $\Longleftarrow$ الازاحة او المسافة = تكامل السرعة

التعجيل = مشتقة السرعة $\Longleftarrow$ السرعة = تكامل التعجيل

$d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\ dt$ (المسافة بمطلق)

$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt$ (الازاحة بدون مطلق)

$v = \int a(t)\, dt$ (السرعة تكامل غير محدد)

ملاحظة

الفرق بين المسافة والازاحة هو الازاحة بدون مطلق وبدون تجزئة .

ملاحظة

عندما يعود الجسم الى موضعه الاول الذي بدأ منه فان الازاحة تساوي صفر $s = 0$.

ملاحظة

اذا وجدنا في السؤال التعجيل معلوم فهنا نكامل مرتين , مرة نكامل التعجيل لنحصل على السرعة ومرة ثانية نكامل السرعة لنحصل على المسافة او الازاحة .

س) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4\ \ m/s$ فجد : (2000 د2)

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[1\ ,3]$

b) الازاحة المقطوعة في الفترة $[1\ ,3]$

c) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

d) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدأ الحركة

sol : a) $v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2 \in [1\ ,3]$

فترات التكامل : $[1\ ,2]\ ,[2\ ,3]$

$$\therefore d = \left|\int_1^2 (2t-4)\ dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)\, dt\right| = |[t^2 - 4t]_1^2| + |[t^2 - 4t]_2^3|$$
$$= |(4-8) - (1-4)| + |(9-12) - (4-8)|$$
$$= |-4+3| + |-3+4| = |-1| + |1| = 1 + 1 = 2\ m$$

$$b)\ s = \int_1^3 (2t-4)\, dt = [t^2 - 4t]_1^3 = (9-12) - (1-4) = -3 + 3 = 0\ m$$

$$c)\ d = \left|\int_4^5 (2t-4)\, dt\right| = |[t^2 - 4t]_4^5| = |(25-20) - (16-16)| = 5\ m$$

$$d)\ s = \int_0^4 (2t-4)\, dt = [t^2 - 4t]_0^4 = (16-16) - (0) = 0\ m$$

س) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)\ m/s$ احسب :

1) المسافة المقطوعة في الفترة $[2\ ,\ 4]$ (2013 خارج , 2014 د4 انبار)

2) الازاحة في الفترة $[0\ ,\ 5]$

sol : $1) v(t) = 0 \rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0 \rightarrow 3(t^2 - 2t + 1) = 0$

$3(t-1)^2 = 0 \rightarrow t = 1 \notin [2\ ,4]$

$$d = \left|\int_2^4 v(t)\,dt\right| = \left|\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)\ dt\right| = |[t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4|$$

$$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |28 - 2| = |26| = 26\ m$$

$$2)\ s = \int_a^b v(t)\ dt = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\ dt = [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5$$

$$= (125 - 75 + 15) - (0) = 65\ m$$

ملاحظة

اذا طلب الازاحة فاننا نكامل السرعة مباشرة , واذا كانت السرعة غير موجودة فانه يعطي التعجيل ونكامل التعجيل لنجد دالة السرعة وبعدها نجد الازاحة

ملاحظة

البعد يعني الازاحة

س) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/s$ بعد مرور 4 ثواني من بدأ الحركة جد : (1997 د1)

a) المسافة خلال الثانية الثالثة

b) بعده عن نقطة بدأ الحركة بعد مرور 3 ثواني

اذا اعطى قيمة السرعة والزمن عندها نستفاد منها في ايجاد ثابت التكامل c

$sol : a)\ V = \int a(t)\,dt \Rightarrow V = \int 18\,dt$

$V = 18t + c \qquad , V = 82 \quad , t = 4$

$82 = 18(4) + c \Rightarrow 82 = 72 + c \Rightarrow c = 10$

$\therefore v(t) = 18t + 10$

$$d = \left|\int_2^3 (18t + 10)\,dt\right| = |[9t^2 + 10t]_2^3|$$

$$= |(81 + 30) - (36 + 20)| = |111 - 56| = 55\ m$$

$$b)\quad s = \int_0^3 (18t + 10)\,dt = [9t^2 + 10t]_0^3 = (81 + 30) - (0 - 0) = 111\ m$$

س) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور 4 ثواني تساوي $90\ m/s$ احسب : (2011 د2)

1) السرعة عندما $t=2$ 2) المسافة خلال الفترة $[1\ ,\ 2]$ 3) الازاحة بعد مرور 10 ثواني من بدأ الحركة

$sol: 1) v(t)=\int a(t)\ dt \ \rightarrow v(t)=\int (4t+12)\ dt$

$v(t)=2t^2+12t+c \quad , \quad v(t)=90$ عندما $t=4$

$90=32+48+c \ \rightarrow c=10 \ \rightarrow \ v(t)=2t^2+12t+10$

$v(2)=8+24+10=42\ m/s$

2)

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معينة لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لا يجزئ التكامل .

$$d=\left|\int_1^2 v(t)\ dt\right|=\left|\int_1^2 (2t^2+12t+10)\ dt\right|=\left|\left[\frac{2}{3}t^3+6t^2+10t\right]_1^2\right|$$

$$=\left|\left(\frac{16}{3}+24+20\right)-\left(\frac{2}{3}+6+10\right)\right|=\left|\frac{16}{3}+44-\frac{2}{3}-16\right|$$

$$=\left|\frac{14}{3}+28\right|=\left|\frac{14+84}{3}\right|=\frac{98}{3}=32.6\ m$$

3) $s=\int_0^{10} v(t)\ dt=\int_0^{10}(2t^2+12t+10)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+6t^2+10t\right]_0^{10}$

$$=\left(\frac{2000}{3}+600+100\right)-(0)=\frac{2000}{3}+700=\frac{2000+2100}{3}=\frac{4100}{3}=1366.6\ m$$

س) تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدأ الحركة اصبحت سرعتها $(100-6t^2)\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه , ثم احسب التعجيل عندها . (2014 د2, 2016 د2)

$sol: \quad s=\int v(t)\,dt=\int (100t-6t^2)\,dt$

$s=50t^2-2t^3+c \quad , \quad s=0\ ,t=0$ ∴ الجسم يتحرك من السكون

$0=0-0+c \Rightarrow c=0$

∴ $s=50t^2-2t^3 \quad , \quad s=0$ بما ان الجسم عاد الى موضعه الاول

$0=50t^2-2t^3\ ] \div 2 \Rightarrow 0=25t^2-t^3 \Rightarrow t^2(25-t)=0$

$t^2=0 \Rightarrow t=0$ يهمل $\quad or \quad t=25\ sec$ الزمن اللازم

$a(t)=\bar{v}(t)=100-12t$

$a(25)=100-300=-200\ m/sec^2$

اذا ذكر في السؤال ان جسم يتحرك من السكون فان $t=0\ ,s=0$ ومنها نجد قيمة c , واذا عاد الجسم الى موقعه الاصلي فهذا يعني ان $s=0$

س) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t^2 - 12t + 9\ m/min$. احسب المسافة المقطوعة بالفترة $[0\ ,2]$ ثم احسب الزمن الذي يصبح فيه التعجيل $18\ m/min^2$. (2009 د1)

$sol: v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0] \div 3 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-1) = 0$

$either\ \ t = 3 \notin [0\ ,2] \qquad OR \quad t = 1 \in [0\ ,2]$

$$d = \left|\int_0^1 v(t)\,dt\right| + \left|\int_1^2 v(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (3t^2 - 12t + 9dt\right| + \left|\int_1^2 (3t^2 - 12t + 9)dt\right| \ldots\ldots \text{اكمل الحل} \quad = 6\ m$$

$$a(t) = \bar{v}(t) = 6t - 12 \Rightarrow 18 = 6t - 12 \Rightarrow 30 = 6t \Rightarrow t = 5\ min$$

س) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 4t + 7)\ m/s$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدأ الحركة ثم جد التعجيل عندها . (2010 د2)

$sol: \ v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 4t + 7 \neq 0$

$$d = \left|\int_0^4 v(t)\,dt\right| = \left|\int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)dt\right| \ldots . \text{اكمل الحل} \quad = 124\ m$$

$$a(t) = \bar{v}(t) = 6t + 4 \ \Rightarrow \ a(4) = 24 + 4 = 28\ m/s^2$$

الدكتور محمد الربيعي

الحجوم الدورانية

اولا :- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ ومحور السينات والمستمرة من $x = a$ الى $x = b$ نستخدم القانون التالي :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

ثانيا :- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ ومحور الصادات والمستمرة من $y = a$ الى $y = b$ نستخدم القانون التالي :

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

س) المنطقة المحددة بين المنحني $0 \le x \le 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات , دارت حول محور السينات , جد حجمها . (2013 د3 , 2011 خارج)

$sol : v = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi$ وحدة مكعبة

س) المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات ,جد حجمها.(2014 د3)

$sol : V = \pi \int_1^4 x^2 \, dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy = \pi[ln\, y]_1^4 = \pi[ln\, 4 - ln\, 1]$

$= \pi \, ln\, 4 = \pi \, ln\, 2^2 = 2\pi \, ln\, 2$ وحدة مكعبة

س) اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني . (2011 د2)

$sol : v = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_0^2 8x \, dx = \pi[4x^2]_0^2 = \pi[16 - 0] = 16\pi$ وحدة مكعبة

س) اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم $x = 0$, $x = 5$ حول المحور السيني . (2012 تمهيدي)

$sol : v = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_0^5 4x^4 \, dx = \pi \left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^5 = \pi \left[\frac{4}{5}(5)^5\right] = 2500\pi$ وحدة مكعبة

س) اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1 \ , x = 2$ حول المحور السيني .

$sol : \ v = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_1^2 x^4 \, dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2 = \pi(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}) = \frac{31}{5}\pi$ وحدة مكعبة

س) اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16 \ , y = 0$ حول المحور الصادي . (2015 تمهيدي)

$sol : v = \pi \int_a^b x^2 \, dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \pi \left[\frac{16 \times 16}{8} - 0\right] = \pi(32 - 0) = 32\pi$

ملاحظة

اذا كان الدوران حول محور السينات وعلمت قيمتين ل (y) فنقوم بتعويضهما في المعادلة الاصلية لاستخراج قيمتي (x) , اذا كان الدوران حول محور الصادات وعلمت قيمتين ل (x) فنقوم بتعويضهما في المعادلة الاصلية لاستخراج قيمتي (y)

س) اوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = 1 \ , \ x = \frac{1}{2}$ دورة كاملة حول المحور الصادي . (2013 د2 , 2015 د3, 2015 د4 رصافة)

$sol : x = 1 \Rightarrow \ y = 1 \quad , \ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy = \pi \int_1^2 y^{-2} \, dy = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi \left(\frac{-1}{2} + 1\right)$

$= \frac{1}{2}\pi$ وحدة مكعبة

ملاحظة

اذا كان الدوران حول محور السينات وعلمت قيمة واحدة ل (x) فنقوم بفرض ان y = 0 ثم نعوضه بالمعادلة الاصلية لاستخراج قيمة (x) الاخرى . اذا كان الدوران حول محور الصادات وعلمت قيمة واحدة ل (y) فنقوم بفرض ان x = 0 ثم نعوضه بالمعادلة الاصلية لاستخراج قيمة (y) الاخرى.

س) اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي . (2013 د1 , 2016 د1 خارج)

$sol: \ y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

$if \ \ x = 0 \Rightarrow y = 1$

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy = \pi \int_1^4 (y-1) \, dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - y\right]_1^4$$

$$= \pi \left[(8-4) - (\frac{1}{2} - 1)\right] = \pi \left[4 - (-\frac{1}{2})\right] = \pi(4 + \frac{1}{2}) = \frac{9}{2}\pi$$ وحدة مكعبة

ملاحظة

اذا كان الدوران حول محور السينات وعلمت y = 0 فنقوم بتعويضها بالمعادلة الاصلية لاستخراج قيمتي (x) . اذا كان الدوران حول محور السينات وعلمت x = 0 فنقوم بتعويضها بالمعادلة الاصلية لاستخراج قيمتي (y)

س) احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي .

$sol: \ y^2 + x = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2 \quad , \quad if \ x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy = \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2)^2 \, dy = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) \, dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_{-1}^1 = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \pi \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right] = \pi \left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right] = \frac{30 - 20 + 6}{15}\pi = \frac{16}{15}\pi$$ وحدة مكعبة

س) احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0 \ , x = 2$ حول المحور السيني . (2014 د2)

$$sol: \ v = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_0^2 x^3 \, dx = \pi \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \pi \left[\frac{1}{4}(2)^4 - 0\right] = 4\pi$$ وحدة مكعبة

الفصل الخامس : المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

المعادلة التفاضلية : هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة او اكثر لدالة مجهولة لمتغير معين يسمى بالمتغير التابع .

المعادلة التفاضلية الاعتيادية : هي علاقة بين متغير مستقل وليكن (x) ودالته غير المعروفة (y) وبعض مشتقات (y) بالنسبة ل (x) .

رتبة المعادلة التفاضلية : وهي تمثل اعلى مشتقة فيها .

درجة المعادلة التفاضلية : وهي اكبر قوة (اس) لاعلى مشتقة فيها .

س) بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الاتية :

1) $\frac{dy}{dx} - 7y + x = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

3) $(y```)^3 + y` - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

4) $y`` + 2y(y`)^3 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

5) $(\frac{dy}{dx})^4 = x^3 - 5$ من الرتبة الاولى والدرجة الرابعة

6) $x^2(\frac{dy}{dx})^4(\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

7) $y^{(4)} + \cos y + x^2yy` = 0$ من الرتبة الرابعة والدرجة الاولى

8) $(x^2 - y^2) + 3xy\frac{dy}{dx} = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

9) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

10) $(y```)^3 - 2y` + 8y = x^3 + \cos x$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

11) $(\frac{d^3y}{dx^3})^2 - 2(\frac{dy}{dx})^5 + 3y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

حل المعادلة التفاضلية :- هو علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة :

1) خالية من المشتقة

2) معرفة على فترة معينة

3) تحقق المعادلة التفاضلية

ملاحظة

اذا كان لدينا حل ومعادلة فان الحل لا يحتوي على مشتقات والمعادلة تحتوي على مشتقات عند الحل نتبع ما يلي :

1) نأخذ الحل (العلاقة) ونشتقه بقدر المشتقات الموجودة في المعادلة التفاضلية .

2) نعوض المشتقات في المعادلة لكلا الطرفين .

3) اذا كان الطرفان متساويان فانه يمثل حل للمعادلة التفاضلية واذا كان الطرفان غير متساويين فانه لا يمثل حل للمعادلة التفاضلية .

س) بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $xy` = x^2 + y$. (1د 2014 , 3د 2013)

sol : $\bar{y} = 2x + 3$ نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS : \ xy` = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

$RHS : \ x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$

$\therefore \ LHS = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) اثبت ان $y = x\ln|x| - x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \ , x > 0$ (3د 2014, 2016 تمهيدي)

sol $y = x\ln|x| - x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \ (1) - 1$

$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x - 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x$

$LHS : x\frac{dy}{dx} = x\ln x$

$RHS : x + y = x + x\ln x - x = x\ln x \quad , \quad \therefore LHS = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) اثبت ان $y = x\ln|x|$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \ , x > 0$ (3د 2014)

sol : $y = x\ln|x| \implies \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\,(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$

LHS : $x\frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x) = x + x\ln x$

RHS : $x + y = x + x\ln x$, $\therefore$ LHS = RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) بين ان $\ln y^2 = x + a \ , a \in R$ حلا للمعادلة $2y` - y = 0$. (2د 2014)

sol : $\left(\frac{1}{y^2}\right)(2y)y` = 1 \implies \frac{2}{y}y` = 1 \Rightarrow 2y` = y \Longrightarrow 2y` - y = 0$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$. (تمهيدي 2014 , 2د 2011)

sol : $y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلا للمعادلة التفاضلية $y`` + 4y = 0$.

(2012 د1 ,2015 تمهيدي , 2016 د2 خارج)

sol : $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$

$y` = -6\sin 2x + 4\cos 2x \Rightarrow y`` = -12\cos 2x - 8\sin 2x$

نقوم بتعويضهما بطرف المعادلة الايسر لينتج

LHS : $y`` + 4y = (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$

$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x = 0$

$\therefore$ LHS = RHS

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

س) هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة $y\,y`` + (y`)^2 - 3x = 5$. (2011 د2 ,2017 د2 احيائي)

sol : $y^2 = 3x^2 + x^3 \Rightarrow 2yy` = 6x + 3x^2$

$2y\,y`` + y`(2)y` = 6 + 6x\,] \div 2 \Rightarrow y\,y`` + (y`)^2 = 3 + 3x$

$y\,y`` + (y`)^2 - 3x = 3 \neq 5$, $\therefore$ LHS $\neq$ RHS

العلاقة المعطاة هي ليست حلا للمعادلة التفاضلية

س) هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة $y\,y`` + (y`)^2 - 3x = 3$ (2015 د1 , 2015د1 نازحين)

** ستكون العلاقة المعطاة حلا للمعادلة التفاضلية

س) بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y`` + y` - 6y = 0$. (2011 خارج ,2015 د4

رصافة , 2017 احيائي د1 خارج , 2018 د2 احيائي داخل)

sol : $y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow y` = 2e^{2x} - 3e^{-3x} \Rightarrow y`` = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$

بالتعويض بطرف المعادلة الايسر

$$LHS = y`` + y` - 6y = 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x})$$
$$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0 = RHS$$

$\therefore$ LHS = RHS اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

س) برهن ان $y = \sin x$ هو حلا للمعادلة $y`` + y = 0$. (2012 خارج)

sol : $y = \sin x \Rightarrow y` = \cos x \Rightarrow y`` = -\sin x$ نقوم بتعويضهما بطرف المعادلة الايسر

$LHS : y`` + y = -\sin x + \sin x = 0 = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) برهن ان $y = \cos x$ هو حلا للمعادلة $y`` + y = 0$ (2014 نازحين)

sol : $y = \cos x \Rightarrow y` = -\sin x \Rightarrow y`` = -\cos x$ نقوم بتعويضهما بطرف المعادلة الايسر

$LHS : y`` + y = -\cos x + \cos x = 0 = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) برهن ان العلاقة $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

sol : $s = 8\cos 3t + 6\sin 3t \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -24\sin 3t + 18\cos 3t$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -72\cos 3t - 54\sin 3t$$

بالتعويض بطرف المعادلة الايسر

$$LHS = \frac{d^2s}{dt^2} + 9s = -72\cos 3t - 54\sin 3t + 9(8\cos 3t + 6\sin 3t)$$
$$= -72\cos 3t - 54\sin 3t + 72\cos 3t + 54\sin 3t = 0 = RHS$$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) هل ان $y = x + 2$ حلا للمعادلة $y`` + 3y` + y = x$ (2017 احيائي د3, 2018 تطبيقي د1خارج)

sol : $y` = 1 \ , \ y`` = 0$ نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS : y`` + 3y` + y = 0 + 3 + x + 2 = x + 5$

$\therefore LHS \neq RHS \Rightarrow$ العلاقة المعطاة هي ليست حلا للمعادلة التفاضلية

س) هل $y = \tan x$ حلا للمعادلة $y`` = 2y(1 + y^2)$. (2018 تطبيقي د2 داخل)

sol : $y = \tan x \Rightarrow y` = \sec^2 x \Rightarrow y`` = 2 \sec x \ (\sec x \tan x) = 2 \tan x \sec^2 x$

بالتعويض بطرفي المعادلة التفاضلية

$LHS = y`` = 2 \tan x \ \sec^2 x$

$RHS = 2y(1 + y^2) = 2 \tan X \ (1 + \tan^2 X) = 2 \tan x \ \sec^2 x$

$\therefore LHS = RHS$ اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلا للمعادلة $y^3 \ y`` = -2$ (2015 د1 خارج , 2016 د2, 2018 د1 احيائي)

sol : $2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 4x + 2y \ y` = 0 \Rightarrow 2y \ y` = -4x] \div 2 \Rightarrow y \ y` = -2x \Rightarrow y` = \dfrac{-2x}{y}$

$$y`` = \frac{y(-2) - (-2x)(y`)}{y^2} = \frac{-2y + 2x(y`)}{y^2}$$

$$= \frac{-2y + 2x(\frac{-2x}{y})}{y^2} = \frac{-2y - \frac{4x^2}{y}}{y^2} = \frac{\frac{-2y^2 - 4x^2}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{-2y^2 - 4x^2}{y^3} = \frac{-2(y^2 + 2x^2)}{y^3} = \frac{-2(1)}{y^3} = \frac{-2}{y^3}$$

بالتعويض بطرف المعادلة التفاضلية الايسر

$$LHS = y^3 \ y`` = y^3 \left(\frac{-2}{y^3}\right) = -2 = RHS$$

$\therefore LHS = RHS$ اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) هل $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ حلا للمعادلة $y^3 y`` = -2$ (2016 د3 خارج) , لاحظ الفرق

س) هل $yx = \sin 5x$ حلا للمعادلة $xy`` + 2y` + 25yx = 0$ (2015 خارج, 2016 , خارج,2018تمهيدي)

sol : $y + xy` = 5 \cos 5x \Rightarrow y` + xy`` + y` = -25 \sin 5x$

$xy`` + 2y` + 25 \sin 5x = 0 \Rightarrow xy`` + 2y` + 25xy =$

اذن العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

س) بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلا للمعادلة $y` + y = 0$ (2012 تمهيدي , 2013 د1)

sol : $y` = -ae^{-x}$ نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الايسر ليكون الجواب صفرا

$LHS : y` + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = RHS$

$\therefore LHS = RHS$ اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

س) بين ان $\ln|y| = x^2 + c$, $c \in R$ هو حلا للمعادلة $y`` = 4x^2y + 2y$.(2013 خارج, 2015 د2)

sol : $\ln|y| = x^2 + c \Rightarrow \frac{1}{y}(y`) = 2x \Rightarrow y` = 2xy$

$y`` = 2xy` + 2y \Rightarrow y`` = 2x(2xy) + 2y \Rightarrow y`` = 4x^2y + 2y$

$LHS = y`` = 4x^2y + 2y$, $RHS = 4x^2y + 2y$

$\therefore LHS = RHS$ اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

الدكتور محمد الربيعي

المعادلات التفاضلية التي تنفصل متغيراتها

خطوات الحل :-

1) كل y' تكتب $\frac{dy}{dx}$

2) نجعل dy في الطرف الايسر و dx في الطرف الايمن (حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الطرفين) .

3) ضع الحدود التي تحتوي على y مع dy في طرف والحدود التي تحتوي على x مع dx في الطرف الاخر

$$g(y)dy = f(x)dx$$

4) نأخذ التكامل للطرفين $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

ملاحظة اذا كان حل المعادلة التفاضلية لا يحتوي على ثوابت اختيارية يسمى حل خاص .

ملاحظة اذا اعطى قيمة x , y في السؤال عند نهاية التكامل نعوض قيمها لايجاد ثابت التكامل c ولايجاد الحل الخاص.

س) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

sol : $y\,dy = (x-1)dx$

$$\int y\ dy = \int (x-1)\ dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c\ ] * 2$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 2c}$$

$$\text{let } 2c = c_1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + c_1}$$

س) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

sol : $dy = (2x+5)dx \Rightarrow \int dy = \int (2x+5)dx \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$

س) حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \cos^2 y \, dx$, $\cos y \neq 0$, $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

sol : $\frac{1}{\cos^2 x} dy = \sin x \ dx$

$\sec^2 x \ dy = \sin x \ dx$

$\int \sec^2 x \ dy = \int \sin x \, dx$

$\tan x = -\cos x + c$

ملاحظة

اذا علمت قيمتي x , y فيجب تعويضهما بالخطوة الاخيرة لاستخراج c ثم اعادة تعويضه بالمعادلة .

س) اوجد حل المعادلة التفاضلية $y` - x\sqrt{y} = 0$ عندما $y = 9 \ , x = 2$ (د1 2016, د1 2017 ت).

sol : $y` - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} dy = x \, dx \Rightarrow y^{\frac{-1}{2}} dy = xdx$

$\int y^{\frac{-1}{2}} \ dy = \int x \ dx \quad \Rightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \quad , x = 2 \ , y = 9$

$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c \Rightarrow \quad 6 = 2 + c \Rightarrow c = 4 \quad , \quad 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4$

س) حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $y = 0$ عندما $x = 0$ (د2 2017 احيائي داخل)

sol : $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{y} \Rightarrow \frac{1}{e^y} dy = e^{2x} \, dx \Rightarrow \quad e^{-y} \, dy = e^{2x} \, dx$

$\int e^{-y} \ dy = \int e^{2x} \ dx \Rightarrow -\int e^{-y} \ (-1)dy = \frac{1}{2}\int e^{2x} \ (2)dx$

$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c \quad , x = 0 \ , y = 0$

$-e^0 = \frac{1}{2}e^0 + c \Longrightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \Longrightarrow c = -1 - \frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$

$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2}] * 2 \Rightarrow \frac{-2}{e^y} = e^{2x} - 3$

س) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$ (د2 2015)

sol : $(x+1)dy = 2ydx \ \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{(x+1)} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{(x+1)}$

$\ln|y| = 2\ln|(x+1)| + c$

س) حل المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات :

1) $y` \cos^3 x = \sin x$

sol : $y` \cos^3 x = \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cos^3 x = \sin x$

$dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \Rightarrow dy = \cos^{-3} x \sin x \, dx$

$\int dy = \int \cos^{-3} x \sin x \, dx \Rightarrow \int dy = -\int \cos^{-3} x (-\sin x) \, dx$

$y = -\left(-\frac{1}{2} \cos^{-2} x\right) + c \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cos^{-2} x \Rightarrow y = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$

2) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad , \; x = 1 \, , y = 2$ (د3 2014 , د2 2013)

sol : $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x - xy$

$\frac{dy}{dx} = x(3 - y) \Rightarrow \frac{1}{3 - y} dy = x \, dx$

$\int \frac{1}{3 - y} dy = \int x \, dx \Rightarrow -\int \frac{-1}{3 - y} dy = \int x \, dx$

$-\ln|3 - y| = \frac{1}{2} x^2 + c \qquad , x = 1 \, , y = 2$

$-\ln|3 - 2| = \frac{1}{2} (1)^2 + c$

$-\ln 1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$

$-\ln|3 - y| = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}$

3) $\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y - 1)$ (د2 2012 , د2 2017 تطبيقي داخل , د1 2018 احيائي خارج)

sol : $\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y - 1)$

$\frac{1}{(y - 1)} dy = (x + 1) dx$

$\int \frac{1}{(y - 1)} dy = \int (x + 1) \, dx$

$\ln|y - 1| = \frac{1}{2} x^2 + x + c$

الدكتور محمد الربيعي

س) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث $x = 2\ , y = 2$ (2012 د2)

4) $(y^2 + 4y - 1)y` = x^2 - 2x + 3$

sol : $(y^2 + 4y - 1)\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 3$

$(y^2 + 4y - 1)dy = (x^2 - 2x + 3)dx$

$\int (y^2 + 4y - 1)dy = \int (x^2 - 2x + 3)dx$

$\frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + c$

5) $y\ y` = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$ (2017 د2 تطبيقي داخل)

sol : $y\ y` = 4\sqrt{(1+y^2)^3} \Rightarrow y\ \frac{dy}{dx} = 4\sqrt{(1+y^2)^3} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\ dy = 4\ dx$

$\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ dy = 4dx \Rightarrow \quad (1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\ ydy = 4dx$

$\int (1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\ y\ dy = \int 4\ dx \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int (1+y^2)^{\frac{-3}{2}}(2y)\ dy = \int 4\ dx$

$\frac{1}{2}\ (-2)(1+y^2)^{\frac{-1}{2}} = 4x + c \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$

6) $e^x dx - y^3 dy = 0$ (2011 د2)

sol : $y^3 dy = e^x dx \ \Rightarrow \int y^3 dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}y^4 = e^x + c$

7) $y` = 2e^x y^3 \qquad , x = 0\ , y = \frac{1}{2}$

sol : $\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = 2e^x dx \ \Rightarrow \int y^{-3} dy = 2\int e^x dx$

$\frac{-1}{2}y^{-2} = 2e^x + c \ \Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$

$\frac{-1}{2(\frac{1}{4})} = 2e^0 + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = 4$

$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4$

س) جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية :

1) $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$ (د1 2016)

sol : $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2 \Rightarrow \quad xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \Rightarrow \quad xy\,dy = (1 - 2y^2)dx$

$$\frac{y}{1-2y^2}\,dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{y}{1-2y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow -\frac{1}{4}\int \frac{-4y}{1-2y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{4}\ln|1-2y^2| = \ln|x| + c$$

2) $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

sol : $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0 \Rightarrow \quad \sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y$

$$\frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \frac{-\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + c$$

3) $x\,\cos^2 y\,dx + \tan y\,dy = 0$

sol : $\tan y\,dy = -x\,\cos^2 y\,dx \Rightarrow \quad \tan y \frac{1}{\cos^2 y}dy = -xdx$

$$\tan y\,\sec^2 y\,dy = -xdx \Rightarrow \int \tan y\,\sec^2 y\,dy = -\int xdx$$

$$\frac{1}{2}\tan^2 y = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

4) $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y$

sol : $\frac{1}{\cos^2 y}dy = \cos^2 x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 y}dy = \int \cos^2 x\,dx$

$$\int \sec^2 y\,dy = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx \quad \Rightarrow \tan y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

الدكتور محمد الربيعي

5) $\tan^2 y\,dy = \sin^3 x\,dx$ (2014 د4 انبار, 2017 د3 تطبيقي داخل)

sol : $\tan^2 y\,dy = \sin^3 x\,dx$

$$\int \tan^2 y\ dy = \int \sin^3 x\ dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1)\ dy = \int \sin x \cdot \sin^2 x\,dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1)\ dy = \int \sin x\ (1 - \cos^2 x)dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1)\ dy = \int (\sin x - \cos^2 x\ \sin x)dx$$

$$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y}$ (2011 د1 , 2014 نازحين , 2018 تطبيقي د2 داخل)

sol: $(3y^2 + e^y)dy = \cos x\,dx$

$$\int (3y^2 + e^y)dy = \int \cos x\,dx$$

$$y^3 + e^y = \sin x + c$$

س1) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2}$ (2011 خارج)

sol : $3y^2 dy = \cos x\,dx$

$$\int 3y^2 dy = \int \cos x\,dx$$

$$y^3 = \sin x + c$$

س2) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{6y^2+e^y}$ (2015 د3)

sol : $(6y^2 + e^y)dy = \sin x\,dx$

$$\int (6y^2 + e^y)dy = \int \sin x\,dx$$

$$2y^3 + e^y = -\cos x + c$$

الدكتور محمد الربيعي

7) $e^{x+2y} + y` = 0$ (2018 تطبيقي د1 داخل)

sol : $e^{x+2y} + y` = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{x+2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^x e^{2y}$$

$$\frac{dy}{e^{2y}} = -e^x dx \Rightarrow e^{-2y} dy = -e^x dx$$

$$\int e^{-2y} dy = -\int e^x dx$$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-2y}(-2)dy = -\int e^x dx$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^x + c$$

$$\frac{-1}{2e^{2y}} = -e^x + c$$

الدكتور محمد الربيعي

المعادلات التفاضلية المتجانسة

ملاحظة

نتعرف على المعادلة التفاضلية على انها متجانسة من خلال :

1) يمكن كتابتها على صورة $\frac{y}{x}$

2) اذا كان مجموع الاسس للمتغيرين x , y متساوي في كل طرف .

3) تحتوي على $(x \pm y)$ او $(x^2 \pm y^2)$ او $(x^3 \pm y^3)$

ملاحظة

لحل المعادلة التفاضلية المتجانسة نتبع الخطوات الاتية :

1) نقسم على اكبر درجة ل x لنكتبها بالصورة $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

2) نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ وتصبح المعادلة بدلالة v لنحصل على معادلة رقم (1) .

3) نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة ل x فنحصل على معادلة رقم (2) $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

4) من المعادلتين (1) و (2) نحصل على الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر $x\frac{dv}{dx} + v = f(v)$

5) ننقل v للطرف الايمن ونرتب المعادلة .

6) حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الطرفين

7) ضع الحدود التي تحتوي على x مع dx في طرف والحدود التي تحتوي على v مع dv في الطرف اخر .

8) بعد فصل المتغيرات نحصل على $\frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dx}{x}$

9) ناخذ التكامل للطرفين $\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x}$ نحصل على الحل العام بدلالة x , v

10) نعوض بعد ذلك عن $v = \frac{y}{x}$ فنحصل على حل المعادلة بدلالة المتغيرين x , y

س) حل المعادلة التفاضلية $y` = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$ (2016 د2 خارج , 2018 د2 احيائي خارج)

الحل : بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})}$$

نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \quad \dots\dots (1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \dots\dots (2$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v\,dv}{v^2 - 1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(2v)dv}{v^2 - 1}$$

$$\ln|x| = \ln|v^2 - 1| + c \qquad , v = \frac{y}{x}$$

$$\ln|x| = \ln\left|(\frac{y}{x})^2 - 1\right| + c$$

س) حل المعادلة التفاضلية $2xyy` - y^2 + x^2 = 0$ (2013 خارج) (لاحظ الفرق مع سؤال الكتاب اعلاه)

س) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

الحل : بقسمة البسط والمقام على $x \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y + x}{x}}{\frac{y - x}{x}} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + \frac{x}{x}}{\frac{y}{x} - \frac{x}{x}} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v + 1}{v - 1} \quad \ldots\ldots (1$$ نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots (2$$ نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v + 1}{v - 1}$$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v + 1}{v - 1} - v \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{(v + 1) - v(v - 1)}{v - 1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v + 1 - v^2 + v}{v - 1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + 2v - v^2}{v - 1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(v - 1)}{(1 + 2v - v^2)}\,dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{(v - 1)}{(1 + 2v - v^2)}dv \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{-2(v - 1)}{(1 + 2v - v^2)}dv$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1 + 2v - v^2| + c \qquad , v = \frac{y}{x}$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left|1 + 2(\frac{y}{x}) - (\frac{y}{x})^2\right| + c$$

س) حل المعادلة $(3x-y)y` = x+y$. (2013 د2)

sol : $(3x-y)y` = x+y \Rightarrow y` = \dfrac{x+y}{3x-y}$

بقسمة البسط والمقام على $x \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \quad \ldots\ldots(1$$

نفرض ان $v = \dfrac{y}{x}$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots(2$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{(1+v)-v(3-v)}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v+v^2}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{(1-v)^2}{3-v}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{(3-v)}{(1-v)^2}\,dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{(3-v)}{(1-v)^2}dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2+(1-v)}{(1-v)^2}dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2}{(1-v)^2}dv + \int \frac{(1-v)}{(1-v)^2}dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = 2\int (1-v)^{-2}\,dv + \int \frac{1}{(1-v)}dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = -2\int (1-v)^{-2}(-1)\,dv - \int \frac{-1}{(1-v)}dv$$

$$\ln|x| = -2[-(1-v)^{-1}] - \ln|1-v| + c$$

$$\ln|x| = \frac{2}{1-v} - \ln|1-v| + c \quad , v = \frac{y}{x}$$

$$\ln|x| = \frac{2}{1-\frac{y}{x}} - \ln\left|1-\frac{y}{x}\right| + c$$

س) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$. (2012 د1 , 2012 تمهيدي,2014 د1 , 2015

تمهيدي , 2015 د1 , 2017 د2 احيائي خارج , 2017 د3 تطبيقي خارج, 2018 تطبيقي داخل)

sol : $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2\neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$ ... ... (1 نفرض ان $v=\frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ... ... (2 نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(v^2-2v+1)\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(v-1)^2$$

$$\frac{1}{2}.\frac{dx}{x}=\frac{1}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx=\int(v-1)^{-2}dv$$

$$\frac{1}{2}\ln|x|=-(v-1)^{-1}+c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x|=\frac{-1}{v-1}+c \quad ,v=\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln|x|=\frac{-1}{\frac{y}{x}-1}+c$$

س) حل كل من المعادلات التفاضلية الاتية :

1) $y`=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$ (2012 د2 , 2013 د1 , 2016 تمهيدي , 2018 د1 تطبيقي خارج)

sol : $\frac{dy}{dx}=v+e^v$ ... ... (1 نفرض ان $v=\frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ... ... (2 نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+e^v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=e^v$$

$$x\frac{dv}{dx}=e^v \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dv}{e^v}$$

$$\frac{dx}{x}=e^{-v}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int e^{-v}dv$$

$$\ln|x|=-e^{-v}+c \Rightarrow \ln|x|=\frac{-1}{e^v}+c \quad , \quad \therefore v=\frac{y}{x} \Rightarrow \ln|x|=\frac{-1}{e^{\frac{y}{x}}}+c$$

2) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$ (2015 د2 خارج , 2017 د3 احيائي داخل)

sol : $x^2dy = -(y^2 - xy)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy - y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{1} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$\frac{dy}{dx} = v - v^2 \ldots\ldots (1$ نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots (2$ نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = -v^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-dv}{v^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -v^{-2}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -v^{-2}dv \Rightarrow \quad \ln|x| = v^{-1} + c \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{v} + c$$

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{x}{y} + c$$

3) $(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0$ (2015 د1 نازحين , 2017 د2 تطبيقي داخل)

sol : $(2x + 3y)dy = -(x + 2y)dx \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(x + 2y)}{2x + 3y} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x - 2y}{2x + 3y}$

بقسمة البسط والمقام على $x \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x - 2y}{x}}{\frac{2x + 3y}{x}} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x}{x} - \frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3y}{x}} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}{2 + 3\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v} \ldots\ldots (1$ نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots (2$ نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v}$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v} - v \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v - v(2 + 3v)}{2 + 3v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v - 2v - 3v^2}{2 + 3v} \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 4v - 3v^2}{2 + 3v} \quad] * (-1)$$

$$-x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2+4v+1}{2+3v} \Rightarrow -\frac{1}{x}dx=\frac{2+3v}{3v^2+4v+1}dv$$

$$-\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2+3v}{3v^2+4v+1}dv \Rightarrow -\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(2+3v)}{3v^2+4v+1}dv$$

$$-\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{6v+4}{3v^2+4v+1}dv$$

$$-\ln|x|=\frac{1}{2}\ln|3v^2+4v+1|+c \qquad ,v=\frac{y}{x}$$

$$-\ln|x|=\frac{1}{2}\ln\left|3(\frac{y}{x})^2+4(\frac{y}{x})+1\right|+c$$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$

الحل : بقسمة البسط والمقام على $x^2\neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2v} \quad \ldots\ldots(1$$ نفرض ان $v=\frac{y}{x}$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots(2$$ نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}$$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{2v\,dv}{1-v^2}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{(-2v)dv}{1-v^2}$$

$$\ln|x|=-\ln|1-v^2|+c \qquad ,v=\frac{y}{x}$$

$$\ln|x|=-\ln\left|1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|+c$$

$$\ln|x|=-\ln\left|1-\frac{y^2}{x^2}\right|+c$$

5) $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$ (2014 د2 , 2017 د1 احيائي داخل , 2017 د3 تطبيقي داخل)

sol : $xydy = -(y^2 - x^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - (\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x})}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - v^2}{v}$ ... ... (1 نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... ... (2 نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2 - v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v^2}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{1 - 2v^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}\int \frac{-4v\,dv}{1 - 2v^2}$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{4}\ln|1 - 2v^2| + c \quad , v = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left|1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| + c \Rightarrow \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left|1 - \frac{2y^2}{x^2}\right| + c$$

6) $x^2ydx = (x^3 + y^3)dy$ (2016 د1 , 2017 د2 احيائي موصل , 2018 د1 تطبيقي داخل)

sol : $x^2ydx = (x^3 + y^3)dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3 + y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^3}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1 + v^3}$ ... ... (1 نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ... ... (2 نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1+v^3)}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v - v^4}{1+v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{1+v^3}{v^4}dv \Rightarrow -\int\frac{1}{x}dx = \int\frac{1+v^3}{v^4}dv$$

$$-\int\frac{1}{x}dx = \int\frac{1}{v^4}dv + \int\frac{v^3}{v^4}dv$$

$$-\int\frac{1}{x}dx = \int v^{-4}\,dv + \int\frac{1}{v}dv$$

$$-\ln|x| = -\frac{1}{3}v^{-3} + \ln|v| + c$$

$$-\ln|x| = -\frac{1}{3v^3} + \ln|v| + c \quad , v = \frac{y}{x}$$

$$-\ln|x| = -\frac{1}{3(\frac{y}{x})^3} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| + c$$

7) $x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$ (2012 خارج , 2014 د4 انبار , 2017 د1 تطبيقي داخل)

sol : $x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \tan v + v$ ..... (1 نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ..... (2 نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = \tan v + v$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \tan v + v - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \tan v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \tan v \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{\tan v}dv \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \cot v\,dv$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{\cos v}{\sin v}dv \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx = \int\frac{\cos v}{\sin v}dv$$

$$\ln|x| = \ln|\sin v| + \ln|c| \quad , v = \frac{y}{x}$$

$$\ln|x| = \ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| + \ln|c|$$

التمارين العامة

س) حل المعادلة التفاضلية $y` = \frac{\cos^2 y}{x}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 1$ (2014 تمهيدي , 2018 د3 تطبيقي داخل)

sol : $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{1}{x}dx$

$\sec^2 y\, dy = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \sec^2 y\, dy = \int \frac{1}{x}dx$

$\tan y = \ln|x| + c \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = \ln 1 + c \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$

$\tan y = \ln|x| + 1$

س) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -2x\tan y$ حيث $x = 0$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$

sol : $\frac{dy}{dx} = -2x\tan y \Rightarrow \frac{dy}{\tan y} = -2xdx \Rightarrow \cot y\, dy = -2xdx$

$\int \cot y\, dy = -2\int xdx \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y}dy = -2\int x\, dx \Rightarrow \ln|\sin y| = -x^2 + c$

$\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 0 + c \Rightarrow \ln 1 = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \ln|\sin y| = -x^2$

س) حل المعادلة التفاضلية $xy` = y - x$ حيث $y = 1$, $x = 1$ (2013 د3 , 2015 د1 خارج)

sol : $x\frac{dy}{dx} = y - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$

$\frac{dy}{dx} = v - 1$ ..... (1 نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ..... (2 نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -1$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$x\frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dv$

$\int \frac{dx}{x} = -\int dv \Rightarrow \ln|x| = -v + c$, $v = \frac{y}{x}$

$\ln|x| = -\frac{y}{x} + c$

$\ln|1| = -1 + c \Rightarrow 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$

$\ln|x| = -\frac{y}{x} + 1$

س) حل المعادلة التفاضلية $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$ (2016 د2)

sol : $2xydy=(x^2+3y^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v} \quad \ldots\ldots(1$$ نفرض ان $v=\frac{y}{x}$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots(2$$ نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}$$ نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{2v\,dv}{1+v^2}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2v\,dv}{1+v^2} \Rightarrow$$

$$\ln|x|=\ln|1+v^2|+c \quad , \quad v=\frac{y}{x}$$

$$\ln|x|=\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|+c$$

س) حل المعادلة التفاضلية $y` = \frac{y^2}{xy+x^2}$ (2015 د4 رصافة) (غير موجود في الكتاب)

الحل :- بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy+x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x})+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v+1} \quad \ldots\ldots(1$$

نفرض ان $v = \frac{y}{x}$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots(2$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1}$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) لينتج

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v^2 - v}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{v+1}$$

$$x(v+1)dv = -vdx$$

$$\frac{(v+1)}{v}dv = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{(v+1)}{v}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{v}{v}dv + \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\int dv + \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$v + \ln|v| = -\ln|x| + c \quad , \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

الفصل السادس : الهندسة الفضائية

اساسيات الهندسة الفراغية والمجسمة:

1) يمكن تشكيل مستو من خلال اربعة حالات مختلفة وهي: -
- لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يوجد مستو وحيد يحتويهما.
- لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوي وحيد يحتويهما.
- لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحتويهما.
- لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوي وحيد يحتويهما.

2) يمكن رسم مستقيم وحيد يوازي مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه عبارة التوازي.

3) في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي او لا تنتمي اليه.

4) يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة تنتمي او لا تنتمي اليه.

5) المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى

6) المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودي على مستويهما.

7) المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودي على الاخر.

8) المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودي على الاخر.

9) المستقيمان العمودان على مستوي واحد متوازيان. كما ان المستقيمان العمودان على مستو واحد متوازيان.

10) يتقاطع المستويان بمستقيم.

11) مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الاخر.

12) إذا وازى مستقيم مستويا معلوما فالمستقيم المرسوم من أي نقطة من نقاط المستوي الموازي للمستقيم المعلوم يكون محتوى.

13) خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث متوازيين.

14) المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الآخر. كما أن المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الآخر أيضا.

15) إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى تساوى قياسهما وتوازي مستويهما

16) العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها وينصف زاوية الرأس. كما انه يكون المثلث متساوي الساقين إذا كان العمود النازل على القاعدة منصف لها.

17) يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. كما انه في المتوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين ومتطابقين.

18) إذا كان كل من مستقيمين متقاطعين موازيا لمستويا معلوما فان مستويهما يوازي المستوي المعلوم.

19) مبرهنة الاعمدة الثلاثة ((إذا رسم من نقطة تنتمي إلى مستوي مستقيمان أحدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم في المستوي فالمستقيم المرسوم من أي نقطة من نقاط المستقيم العمودي على المستوي يكون عموديا على تلك المستقيم في المستوي من نقطة تلاقي المستقيمين))

20) نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة ((إذا رسم من نقطة لا تنتمي إلى مستوي مستقيمان أحدهما عمودي على المستوي والاخر عمودي على مستقيم في المستوي فالمستقيم الواصل بين أثري العمودين يكون عموديا على ذلك المستقيم في المستوي)).

الزاوية الزوجية

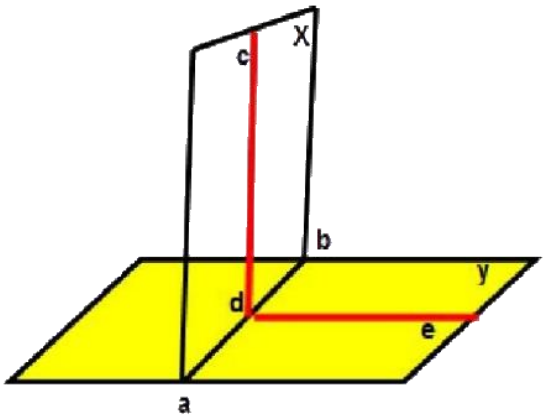
الزاوية الزوجية: وهي الزاوية المحصورة بين مستويين حيث يسمى كل من المستويين وجهي الزاوية الزوجية ويسمى مستقيم التقاطع حرف الزاوية الزوجية. ولا توجد طريقة محددة لقياس الزاوية الزوجية بشكل مباشر الا بعد ربطها بزاوية أخرى تسمى الزاوية العائدة للزاوية الزوجية ومن شروطها أن تحتوي على مستقيمين كل مستقيم موجود في وجه وكلاهما عموديا على حرف الزاوية الزوجية.

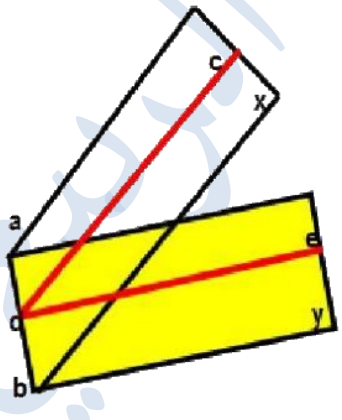
حيث تسمى الزاوية (x)-ab-(y) بالزاوية الزوجية، وتسمى الزاوية cde بالزاوية العائدة للزاوية الزوجية بحيث أن كل من cd,de عموديا على مستقيم تقاطع المستويين ab

تعميم (1) إذا كان المستويان متعامدان فأن قياس الزاوية الزوجية ◈90 أي أن قياس الزاوية العائدة ◈90 اي آن de, cd متعامدان. ((نستفيد منه في إثبات مبرهنة 7))

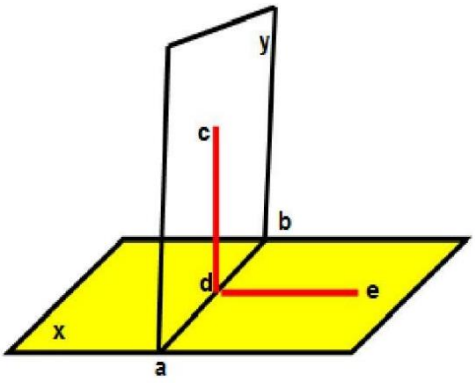
تعميم (2) إذا كان كل من de, cd عموديان على ab وكان كل منهما عموديا على الآخر فان قياس الزاوية العائدة ◈90 أي أن قياس الزاوية الزوجية ◈90 اي ان المستويان متعامدان.(نستفيد منه في إثبات مبرهنة 8)

تعميم (3) كل مستويان متعامدان يجب أن يكونا متقاطعان لكن العكس ليس بالضرورة.





مبرهنة (7) إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على الآخر.



المعطيات

$(x) \perp (y), (x) \cap (y) = \overleftrightarrow{ab}$

$\overleftrightarrow{cd} \subset (y), \quad \overleftrightarrow{cd} \perp \overleftrightarrow{ab}$ in d

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{cd} \perp (x)$

البرهان

في (x) **نرسم** $\overleftrightarrow{ab} \perp \overleftrightarrow{ed}$

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{cd} \perp \overleftrightarrow{ab}$ in d $\overleftrightarrow{\subset (y)}$ (**معطى**)

زاوية edc **هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية** (x) – $\overleftrightarrow{ab}$ - (y) (حسب تعريف الزاوية العائدة للزاوية الزوجية)

بما ان (x) $\perp$ (y) (**معطى**)

(قياس الزاوية الزوجية = قياس الزاوية العائدة لها)

$\overleftrightarrow{ed} \perp \overleftrightarrow{cd}$ إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين = 90◈ فان المستقيمان متعامدان والعكس صحيح

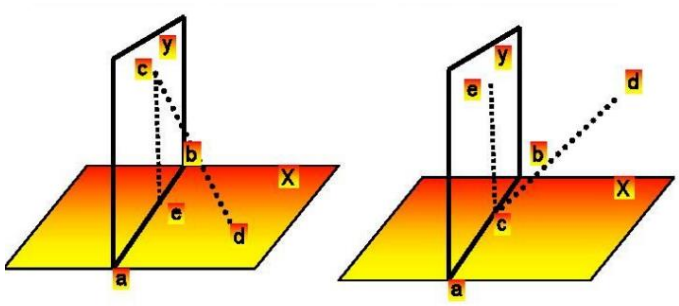
$\overleftrightarrow{cd} \perp \overleftrightarrow{ab}$ in d (**معطى**)

$\overleftrightarrow{x} \perp \overline{cd}$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقطعهما يكون عموديا على مستويهما)

و.ه.م

نتيجة مبرهنة 7 إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في أحدهما والعمودي على المستوي الاخر يكون محتوى فيه

المعطيات



$(x) \perp (y), (x) \cap (y) = ab$

$, c \in (y) \overleftrightarrow{cd} \perp (x)$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{cd} \subset (y)$

البرهان **اذا لم يكن** $\overleftrightarrow{cd} \subset (y)$ **نرسم** $\overleftrightarrow{ce} \subset (y)$, $\overleftrightarrow{ce} \perp \overleftrightarrow{ab}$

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$(x) \perp (y)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{ce} \perp (x)$ (إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودي على الاخر)

$\overleftrightarrow{cd} \perp (x)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{cd} = \overleftrightarrow{ce}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

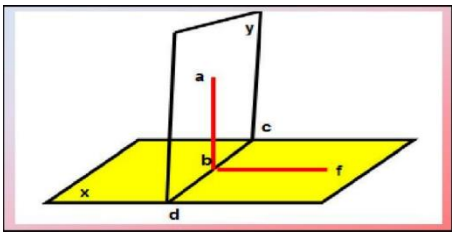
$\overleftrightarrow{cd} \subset (y)$

و.ه.م

الدكتور محمد الربيعي

مبرهنة (8) يتعامد المستويان إذا احتوي أحدهما على مستقيم وكان عمودياً على الاخر او (كل مستو مار بمستقيم عمودياً على مستوياً معلوماً يكون عمودياً عليه)

المعطيات



$\overleftrightarrow{cd} \subset (y), \overleftrightarrow{ab} \perp (x)$

المطلوب اثباته

$(x) \perp (y)$

البرهان

ليكن $(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{cd}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

لتكن $b \in \overleftrightarrow{cd}$ (مستقيم التقاطع يحوي النقاط المشتركة)

في (x) **نرسم** $\overleftrightarrow{bf} \perp \overleftrightarrow{cd}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{ab} \perp (x)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{ab} \perp \overleftrightarrow{cd}$, $\overleftrightarrow{ab} \perp \overleftrightarrow{bf}$

(المستقيم العمودي على مستو يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمرسومة من أثره)

$\overleftrightarrow{ab} \subset (y)$ (معطى)

الزاوية abf **هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية** $(x) - \overleftrightarrow{cd} - (y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

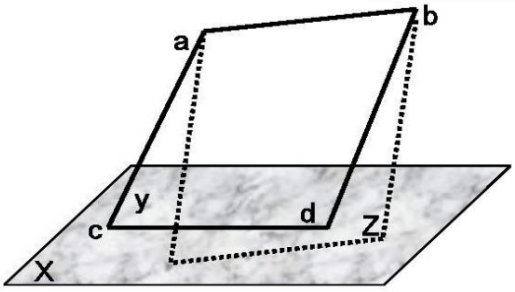
قياس الزاوية العائدة $= 90^\circ$ $\overleftrightarrow{ab} \perp \overleftrightarrow{bf}$

قياس الزاوية الزوجية $= 90^\circ$ $(x) - \overleftrightarrow{cd} - (y)$ (قياس الزاوية الزوجية = قياس الزاوية العائدة لها)

$(x) \perp (y)$ **(إذا كان قياس الزاوية الزوجية** 90° **فان المستويين متعامدين وبالعكس)**

و.ه.م

مبرهنة (9) من مستقيم غير عمودي على مستوي معلوم يوجد مستو وحيد عموديا على المستو المعلوم



المعطيات

$\overleftrightarrow{ab}$ غير عمودي على (x)

المطلوب اثباته

يمكن رسم مستوي (y) بحيث

$\overleftrightarrow{ab} \subset (y)\ ,\ (y) \perp (x)$ والبرهنة على انه وحيد

البرهان

من نقطة a نرسم $\overleftrightarrow{ac} \perp (x)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

ليكن (y) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{ab}\ ,\overleftrightarrow{ac}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحتويهما)

$\overleftrightarrow{ac} \subset (y)\ ,\ \overleftrightarrow{ac} \perp (x)$ بالبرهان

$(x) \perp (y)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر)

ولبرهنة الوحدانية

نفرض وجود مستوي آخر (z) يحوي $\overleftrightarrow{ab}$ عمودي على (x)

$\overleftrightarrow{ac} \perp (x)\ ,\ a \in (z)$ بالبرهان

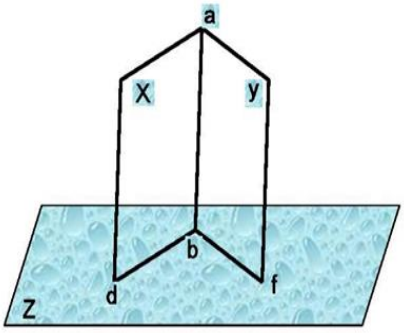
$\overleftrightarrow{ac} \subset (z)$ (إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما والعمودي على المستوي الاخر يكون محتوى فيه)

$\overleftrightarrow{ab}, \overleftrightarrow{ac}$ محتويان في المستويين (z), (y) (غير ممكن)

(z) = (y) (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحتويهما)

و.ه.م

نتيجة مبرهنة (9) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستويا معلوما فان مستقيم تقاطعهما عموديا على المستوي المعلوم



المعطيات

$$(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{ab}$$
$$, (x) \cap (z) = \overleftrightarrow{bd} (x) \perp (z)$$
$$, (y) \cap (z) = \overleftrightarrow{bf} (y) \perp (z)$$

المطلوب اثباته

$$\overleftrightarrow{ab} \perp (z)$$

البرهان

اذا لم يكن $\overleftrightarrow{ab} \perp (z)$

لما وجد اكثر من مستوي واحد يحوي ab **وعمودي على** (z)

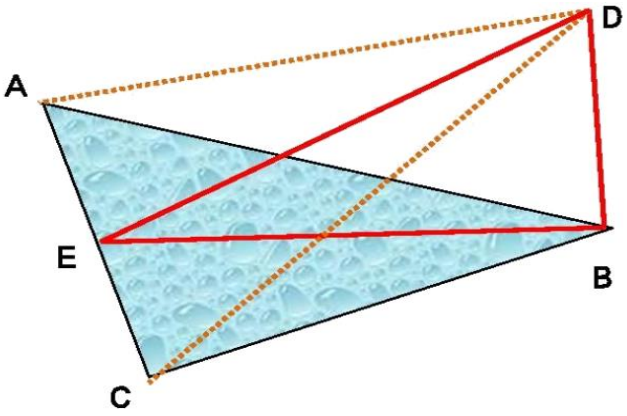
(من مستقيم غير عمودي على مستوي معلوم يمكن رسم مستوي وحيد عمودي على المستوي المعلوم)

$$\therefore \overleftrightarrow{ab} \perp (z)$$

و.ه.م

الدكتور محمد الربيعي

مثال (1) في ΔABC قياس زاوية $A = 30^\circ$ ، $BD \perp (ABC)$ ، $AB = 10cm$,
$BD = 5cm$ ، جد قياس الزاوية الزوجية D-AC-B.



المعطيات

في ΔABC قياس زاوية $A = 30^\circ$

$\overleftrightarrow{BD} \perp (ABC)$

$\overleftrightarrow{AB} = 10cm, \overleftrightarrow{BD} = 5cm$

المطلوب اثباته

قياس الزاوية الزوجية $D - \overleftrightarrow{AC} - B$

البرهان

من نقطة B نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}$

المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{BD} \perp (ABC)$ **(معطى)**

$\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$ **مبرهنة الاعمدة الثلاثة**

DEB هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $D - \overleftrightarrow{AC} - B$ **(تعريف الزاوية العائدة)**

في ΔBEA القائم الزاوية في E

$$\sin 30 = \frac{EB}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EB}{10} \Rightarrow \overleftrightarrow{EB} = 5cm$$

$\overleftrightarrow{DB} \perp (ABC)$ ∵**(معطى)**

$\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{EB}$ **(المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره)**

في ΔDBE القائم الزاوية في B

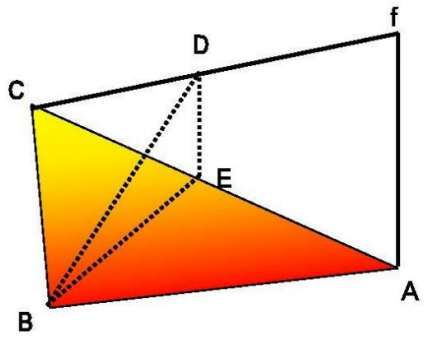
$$\tan E = \frac{DB}{EB} \Rightarrow \tan E = \frac{5}{5} = 1$$

قياس زاوية E تساوي 45° وهي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $D - \overleftrightarrow{AC} - B$

قياس الزاوية الزوجية $D - \overleftrightarrow{AC} - B = 45^\circ$ **(قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)**

مثال (2) ليكن ABC مثلثا وليكن $\overleftrightarrow{AF} \perp (ABC)$ ، $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CF}$

برهن ان $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{CF}$ ، $\overleftrightarrow{BE} \perp (CAF)$



المعطيات

ABC **مثلثا فيه** $\overleftrightarrow{AF} \perp (ABC)$

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CF}$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{CF}$ ، $\overleftrightarrow{BE} \perp (CAF)$

البرهان

$\overleftrightarrow{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$(CAF) \perp (\overleftrightarrow{ABC})$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر)

$\overleftrightarrow{BE} \perp CA$ (معطى)

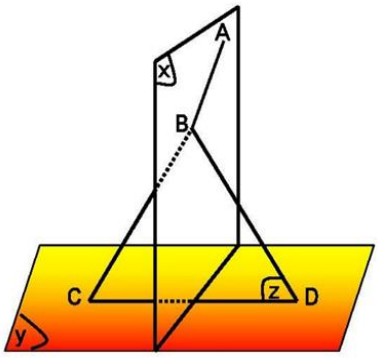
$\overleftrightarrow{BE} \perp (CAF)$ (إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودي على الاخر)

$\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CF}$ (معطى)

$\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و.ه.م

مثال (3) ليكن (Y) , (X) مستويان متعامدان وليكن $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ بحيث ان $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$,
ويقطعان (Y) في النقطتان C,D على الترتيب برهن أن $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB} \subset (y)(x) \perp (y)$,

$\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AB}\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$,

$\overleftrightarrow{BC} \cap (Y) = C, \quad \overleftrightarrow{BD} \cap (Y) = D$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overline{BC}, \overline{BD}$

(لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحتويهما)

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى) **بما ان**

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما

$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$(معطى)

$(x) \perp (z)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر)

$(x) \perp (y)$ (معطى)

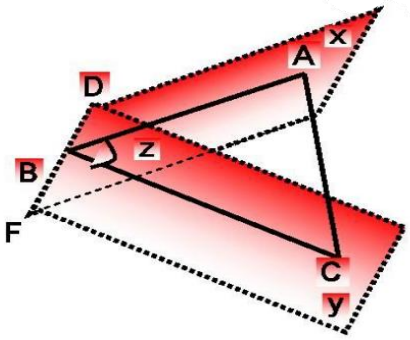
$(z) \cap (y) = \overleftrightarrow{CD}$ (لأنه محتوى في كليهما)

$\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

(إذا كان كل مستويين متقاطعين عموديا على مستويا ثالثا فان مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث).

تمارين (1-6)

1) برهن أن مستوي الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية يكون عموديا على حرفها.



المعطيات

الزاوية ABC هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overline{DF} - (Y)$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{DF} \perp (z)$

البرهان

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DF}$ **(تعريف الزاوية العائدة للزاوية الزوجية)**

$\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{DF}$ **(تعريف الزاوية العائدة للزاوية الزوجية)**

ليكن Z مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$

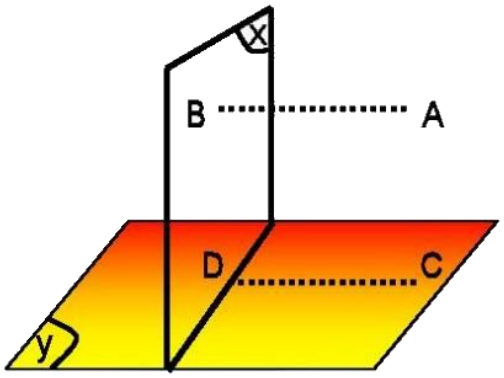
(لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحتويهما)

$\overleftrightarrow{DF} \perp (z)$ **(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعها يكون عموديا على مستويهما)**

و.ه.م

الدكتور محمد الربيعي

2) برهن انه إذا وازى مستقيم مستويا معلوما وكان عموديا على مستو آخر فان المستويين متعامدان



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}//(Y), \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

المطلوب اثباته: $(X) \perp (Y)$

البرهان لتكن $C \in (Y)$

نرسم $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي ....)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

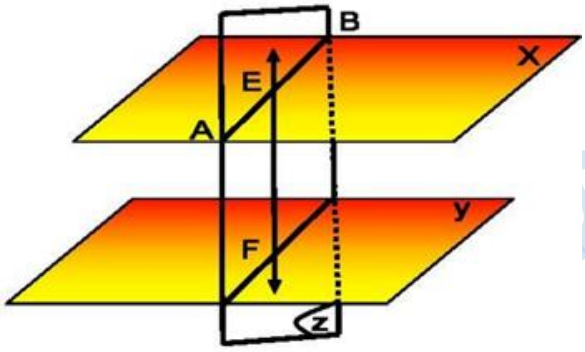
$\overleftrightarrow{AB}//CD$ المستقيمان العمودان على مستوي وحد متوازيان

$c \in (y) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ (إذا وازى مستقيم مستويا معلوما فالمستقيم المرسوم من أي نقطة من نقاط المستوي الموازي للمستقيم المعلوم يكون محتوى فيه)

$(X) \perp (Y)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر)

3) برهن أن المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على المستوي الآخر

المعطيات



$(z) \perp (x) \cdot (x)//(Y)$

$(z) \cap (x) = \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته

$(z) \perp (Y)$

البرهان

نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{EF} \subset (Z), \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(في المستو الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$(z) \perp (x)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{EF} \perp (x)$

(إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودي على الاخر)

بما ان $(x)//(Y)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{EF} \perp (y)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر ايضا)

$(z) \perp (Y)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر)

و.ه.م

4) A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوي واحد بحيث ان $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ ، $E \in \overleftrightarrow{BC}$ فاذا كانت AED هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ برهن ان $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{BD}$

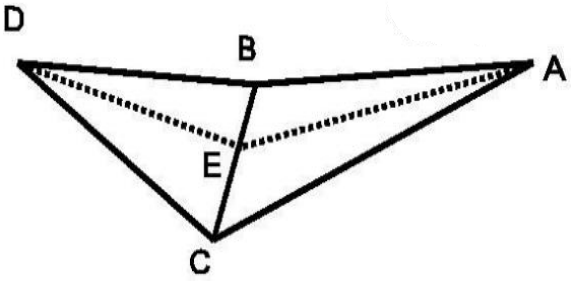
المعطيات

A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوي واحد

بحيث ان $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ ، $E \in \overleftrightarrow{BC}$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{BD}$



البرهان

$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (حسب تعريف الزاوية العائدة)

$\overleftrightarrow{BE} = \overleftrightarrow{CE}$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (حسب تعريف الزاوية العائدة)

قياس زاوية DEB = قياس زاوية DEC (قوائم)

الضلع $\overleftrightarrow{DE}$ مشترك في المثلثين

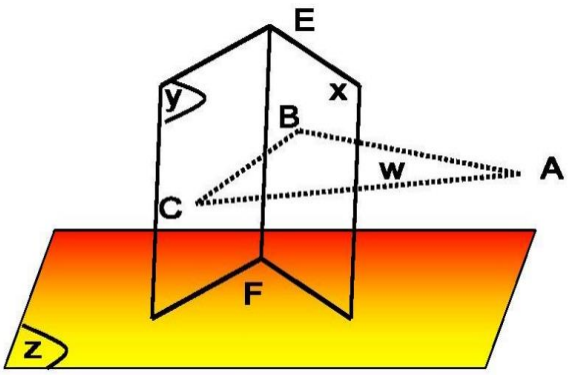
المثلثان DEB,DEC متطابقان (يتطابق المثلثان لتساوي ضلعين وزاوية ومحصورة بينهما)

ومن التطابق ينتج $\overleftrightarrow{DB} = \overleftrightarrow{DC}$

و.ه.م

5) برهن انه إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستويا معلوما وكان عموديين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عموديا على المستوى المعلوم

المعطيات



$\overleftrightarrow{AB}//(Z), \quad \overleftrightarrow{AC}//(Z)$

$, \overleftrightarrow{AC} \perp (y) AB \perp (x)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{EF}$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{EF} \perp (z)$

البرهان

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC} = (W)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحتويهما)

$\overleftrightarrow{AB}//(Z), \ \overleftrightarrow{AC}//(Z)$ (معطى)

$(W)//(Z)$ (إذا كان كل من مستقيمين متقاطعين موازيا لمستويا معلوما فان مستويهما يوازي المستوي المعلوم)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ (معطى) $\overleftrightarrow{AB} \subset (W)$ **بالبرهان**

$(W) \perp (x)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر)

$\overleftrightarrow{AC} \perp (y)$ (معطى) $\overleftrightarrow{AC} \subset (W)$ **بالبرهان**

$(W) \perp (y)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر)

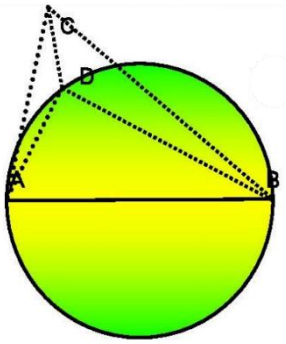
$\overleftrightarrow{EF} \perp (W)$ اذا كان كل مستويين متقاطعين عموديا على مستويا ثالثا فان مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث)

$\overleftrightarrow{EF} \perp (z)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

و.ه.م

6) دائرة قطرها $\overleftrightarrow{AB}$ ، فاذا كان $\overleftrightarrow{AC}$ عموديا على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة ، برهن أن

$(CDA) \perp (CDB)$



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}$ قطر في دائرة ، $\overleftrightarrow{AC} \perp$ الدائرة ،

D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب اثباته

$(CDA) \perp (CDB)$

البرهان

بما ان $\overleftrightarrow{AB}$ هو قطرا للدائرة فان الزاوية ADB قياسها 90◈

(لان قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DB}$ (إذا كانت الزاوية بين مستقيمين قائمة فان المستقيمين متعامدين)

$\overleftrightarrow{AC}$ عمودي على مستوي الدائرة (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

اصبح لدينا كلا من $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{CD}$ (بالبرهان)

$\overleftrightarrow{BD} \perp (ADC)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودي على مستويهما)

$\overleftrightarrow{BD} \subset (CDB)$

$(CDA) \perp (CDB)$

(كل مستوي مار بمستقيم عمودي على مستوي معلوم يكون عموديا عليه)

و.ه.م

الاسقاط العمودي على مستو

1) **مسقط نقطة على مستو**: - هو إثر العمود النازل على المستوي من تلك النقطة.

2) **مسقط مجموعة نقاط على مستو**: - هو مجموعة كل آثار الاعمدة المرسومة على المستوي من تلك النقاط.

3) **مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستو**: هو قطعة المستقيم المحددة باثري العمودين النازلين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة

4) **إذا كان المستقيم موازي للمستوي** فان طوله يساوي طول مسقطه.

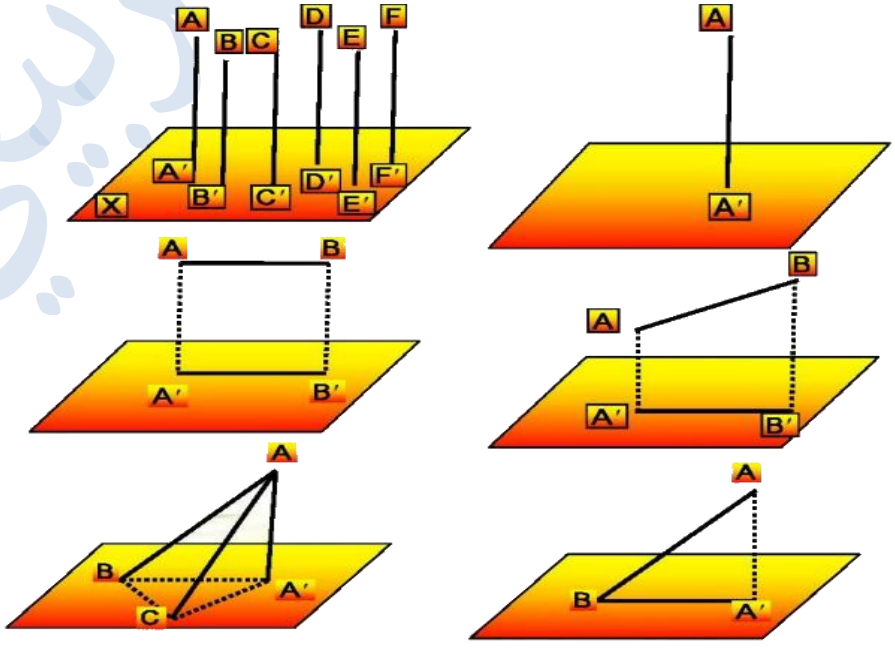
5) **المستقيم المائل على مستو**: - هو المستقيم الغير عمودي على المستوي والقاطع له.

6) **زاوية الميل**: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي

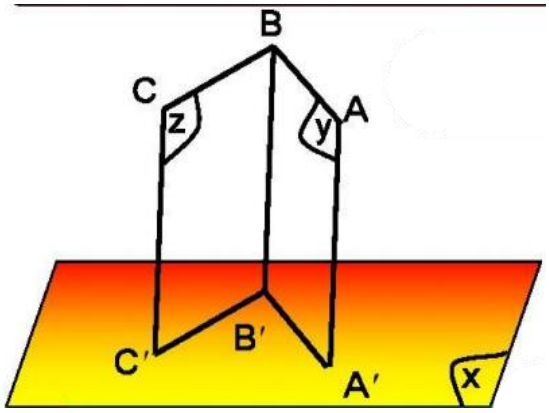
7) **طول المسقط** = طول المستقيم المائل X جيب تمام زاوية ميله على المستوي.

8) **زاوية ميل مستوي على مستوي معلوم** = قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

9) **مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوي** = مساحة المنطقة المائلة X جيب تمام زاوية الميل بينهما.



مثال (4): إذا وازى أحد ضلعي زاوية قائمة مستويا معلوما فأن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان.



المعطيات

ABC قائمة الزاوية في B حيث $\overleftrightarrow{AB}//(x)$

$\overleftrightarrow{A'B'}$ هو مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (x)

$\overleftrightarrow{C'B'}$ هو مسقط $\overleftrightarrow{CB}$ على (x)

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{A'B'} \perp \overleftrightarrow{C'B'}$

البرهان

$\overleftrightarrow{A'B'}$ هو مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (x) (معطى)

$\overleftrightarrow{C'B'}$ هو مسقط $\overleftrightarrow{CB}$ على (x) (معطى)

$\overleftrightarrow{AA'}$ $\overleftrightarrow{BB'}$ $\overleftrightarrow{CC'} \perp (x)$ مسقط قطعة مستقيم على مستوي هو قطعة المستقيم المحددة باثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة

$\overleftrightarrow{AA'}//\overleftrightarrow{BB'}$ // $\overleftrightarrow{CC'}$ (المستقيمان العمودان على مستوي واحد متوازيان)

ليكن (Y) مستوي المستقيمان المتوازيان $\overleftrightarrow{AA'}$ $\overleftrightarrow{BB'}$ لكل مستقيمان متوازيان يوجد مستوي وحيد يحتويهما

ليكن (z) مستوي المستقيمان المتوازيان $\overleftrightarrow{BB'}$ $\overleftrightarrow{CC'}$ لكل مستقيمان متوازيان يوجد مستوي وحيد يحتويهما

$\overleftrightarrow{AB}//(x)$ (معطى)

$(Y) \cap (X) = \overleftrightarrow{A'B'}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{A'B'}$ (مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الآخر)

$\overleftrightarrow{BB'} \perp \overleftrightarrow{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BB'}$ في المستوي الواحد المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الآخر

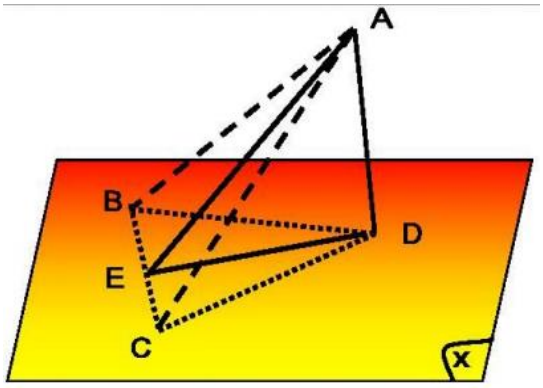
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

$\overleftrightarrow{A'B'} \perp (z)$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الآخر)

$\overleftrightarrow{A'B'} \perp \overleftrightarrow{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

مثال (5):- ABC مثلث فيه $\overline{BC} \subset (X)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي (X) قياسها 60◈ فاذا كان $AB = AC = 13cm,\ BC = 10cm$ جد مسقط ABC على (X) ثم جد مساحة مسقط ABC على (x).



المعطيات

$\Delta\ ABC, \overleftrightarrow{BC} \subset (X)$

قياس(ABC) - BC - (X) = 60◈

$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = 13cm, \quad \overleftrightarrow{BC} = 10cm$

المطلوب اثباته

إيجاد مسقط ABC على (X)

ثم إيجاد مساحة مسقط ABC على (X).

البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ في D (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ مسقط نفسه على (X)

مسقط قطعة مستقيم على مستوي هو قطعة المستقيم المحددة باثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة

$\Delta\ BCD$ هو مسقط $\Delta\ ABC$ على (x)

في $\Delta\ ABC$ نرسم $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AE}$ في E في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمود على آخر من نقطة معلومة

$\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{BC}$ نتيجة الاعمدة الثلاثة

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستو)

بما ان $\overleftrightarrow{AC} = AB$ (معطى)

$\overleftrightarrow{EC} = \overleftrightarrow{BE} = 5cm$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

الزاوية DEA هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - E$ (تعريف الزاوية العائدة)

بما ان قياس الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - E$ = 60◈ (معطى)

في $\Delta\ AEB$ القائم الزاوية في E

$$\overleftrightarrow{AE} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12cm$$

$$\Delta BCD = (\tfrac{1}{2})(6)(10) = 30cm^2 \text{ مساحة} \quad \cos 60 = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow \overleftrightarrow{ED} = 6cm \Rightarrow$$

ملاحظة

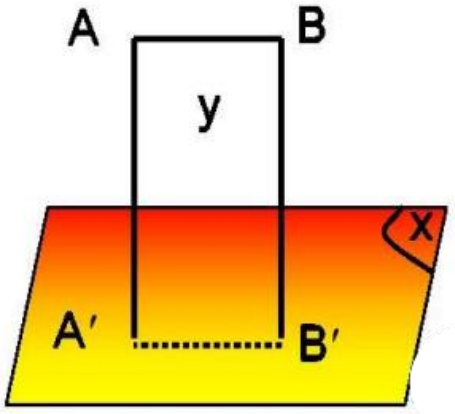
لو كان المطلوب ايجاد مساحة المسقط فقط لأمكننا استخدام القانون السريع

مساحة المسقط = مساحة المنطقة المائلة x جيب تمام زاوية الميل بينهما

مساحة $\Delta BCD = (\frac{1}{2})(12)(10)(\frac{1}{2}) = 30cm^2$

تمارين (2-6)

1) برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوي معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}//(x)$

$\overleftrightarrow{A'B'}$ هو مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (x)

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{A'B'}$

البرهان

$\overleftrightarrow{BB'} \perp (x)$ $\overleftrightarrow{AA'} \perp (x)$

(حسب تعريف مسقط قطعة المستقيم)

$\overleftrightarrow{AA'}//\overleftrightarrow{BB'}$ (المستقيمان العمودان على مستوي واحد متوازيان)

ليكن (Y) مستوي المستقيمين $\overleftrightarrow{AA'}//\overleftrightarrow{BB'}$ لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستو وحيد يحتويهما

$(x) \cap (Y) = \overleftrightarrow{A'B'}$ (يتقاطع المستويان بمستقيم)

$\because \overleftrightarrow{AB}//(X)$ (معطى)

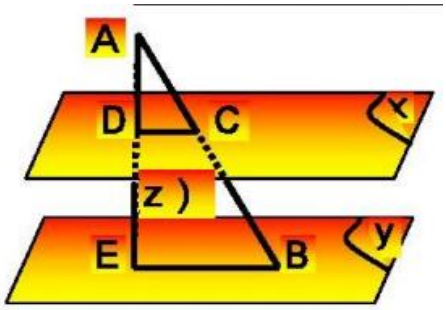
$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{A'B'}$ (مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الآخر)

الشكل الرباعي ABB'A' متوازي أضلاع (يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين)

$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{A'B'}$ (في المتوازي الأضلاع يكون فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين)

و.ه.م

2) برهن أنه إذا قطع مستويان متوازيان مستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر



المعطيات

$(x)//(y)$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (y) , (x) في النقطتين C , B على الترتيب

المطلوب اثباته

زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (x) = زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (y)

البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (x)$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم من نقطة معلومة)

$(x)//(y)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AD}$ او امتداده $ADE \perp (y)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الآخر)

$\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AB}$ يعينان المستوي (Z) (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحتويهما)

$(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}, (Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{EB}$ (يتقاطع المستويان بمستقيم)

$\overleftrightarrow{CD}//\overleftrightarrow{BE}$ (خطا تقاطع مستويان متوازيان بمستو ثالث متوازيان)

زاوية ACD هي زاوية ميل AB على (x)، زاوية ABE هي زاوية ميل AB على (y)

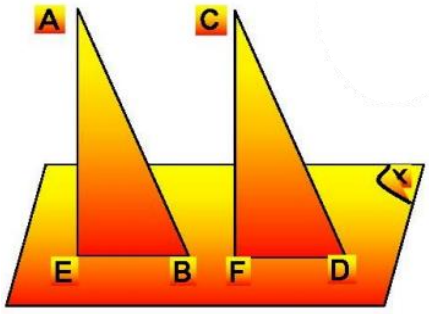
(زاوية الميل هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

قياس زاوية ACD = قياس زاوية ABE (بالتناظر)

زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (Y)

و.ه.م

3) برهن أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه



المعطيات

(x) وكلاهما مائلان على $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته

زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{AE} \perp (X), \overleftrightarrow{CF} \perp (X)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

نصل $\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{EB}$ وهما مسقطي $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ على الترتيب (تعريف مسقط قطعة مستقيم على مستوي)

$\Delta AEB, \Delta CFD$ قائما الزاوية في E , F على الترتيب

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره)

$\overleftrightarrow{AE} // \overleftrightarrow{CF}$ (المستقيمان العمودان على مستو واحد متوازيان)

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

قياس زاوية EAB = قياس زاوية FCD

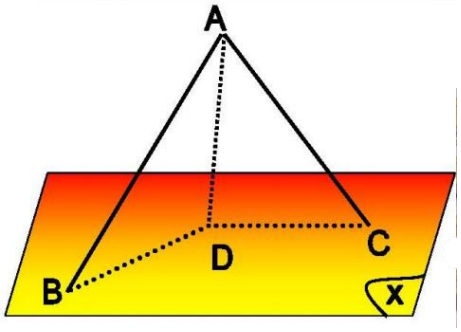
إذا وازى ضلعا زاويا ضلعي زاوية اخرى تساوى قياسهما وتوازي مستويهما

قياس زاوية AEB = قياس زاوية CFD = 90◈ (لأنه مثلث قائم الزاوية)

قياس زاوية ABE = قياس زاوية CDF (مجموع زوايا المثلث = 180◈)

و.ه.م

4) برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم فان اطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر.



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB} > \overleftrightarrow{AC}$

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ مائلان على (X)

المطلوب اثباته

قياس زاوية B أصغر من قياس زاوية C

البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

نصل $\overleftrightarrow{DB}, \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{DB}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين اثري العمودين النازلين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة

$\overleftrightarrow{DC}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

زاوية B هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) زاوية الميل هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي

زاوية C هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره)

ΔADB, ΔADC قائمي الزاوية في D

$\overleftrightarrow{AB} > \overleftrightarrow{AC}$ (معطى)

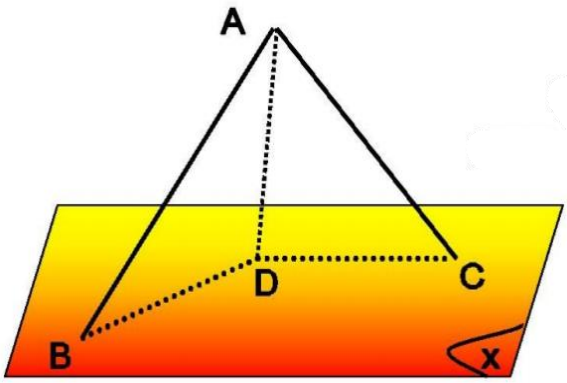
$\frac{AB}{AD} > \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$ من خواص التباين

$\sin B < \sin C \Rightarrow \quad \measuredangle B \quad \measuredangle C$

قياس زاوية B أصغر من قياس زاوية C

و.ه.م

5) برهن أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما على مستوي فأصغرهما ميلا هو الأطول



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ مائلان على (X)

قياس زاوية B أصغر من قياس زاوية C

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{AB} > \overleftrightarrow{AC}$

البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

نصل $\overleftrightarrow{DB}, \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{DB}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\overleftrightarrow{DC}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين اثري العمودين النازلين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة

زاوية B هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

زاوية C هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

زاوية الميل هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BD}\ ,\ \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره)

$\Delta ADB,\ \Delta ADC$ قائمي الزاوية في D

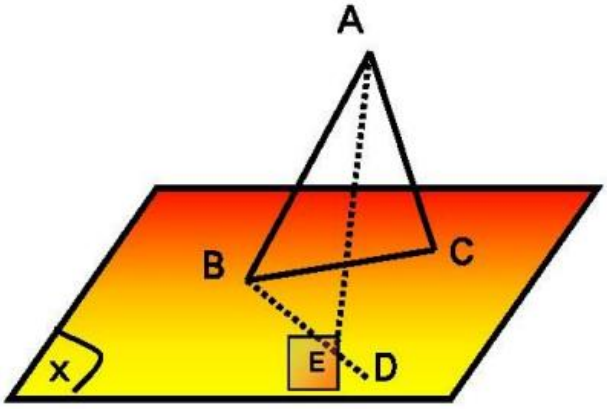
قياس زاوية B أصغر من قياس زاوية C (معطى)

$$\measuredangle B \ \ \measuredangle C \quad \Rightarrow \quad \sin B < \sin C$$

$$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AD} > \frac{AC}{AD} \Rightarrow AB > AC$$

و.ه.م

6) برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستو أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستو



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}$ مائل على (X)

$\overleftrightarrow{BC} \subset (x)$

زاوية ABC محددة ب $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$

زاوية ABD محددة ب $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BD}$

المطلوب اثباته

$M \measuredangle ABC < M \measuredangle ABD$

البرهان

لتكن $E \in \overleftrightarrow{BD}$ بحيث ان $\overleftrightarrow{BE} = \overleftrightarrow{BC}$

نصل AE

نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره)

$\overleftrightarrow{AC} < \overleftrightarrow{AE}$

العمود النازل من نقطة على مستوي هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة واي نقطة اخرى تقع ضمن ذلك المستوي

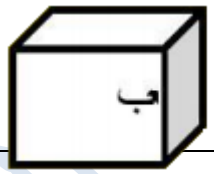
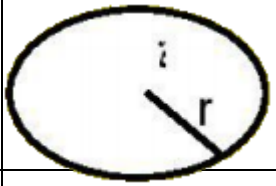
$\overleftrightarrow{AB}$ مشترك ، $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{BE}$ بالبرهان

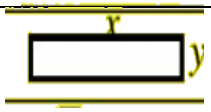
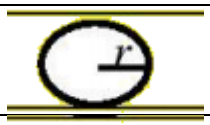
لتكن زاوية $\theta_1 = ABC$ لتكن زاوية $\theta_2 = ABE$

$M \measuredangle ABC < M \measuredangle ABE$ (إذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر واختلف الضلعان الآخران فاصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

و.ه.م

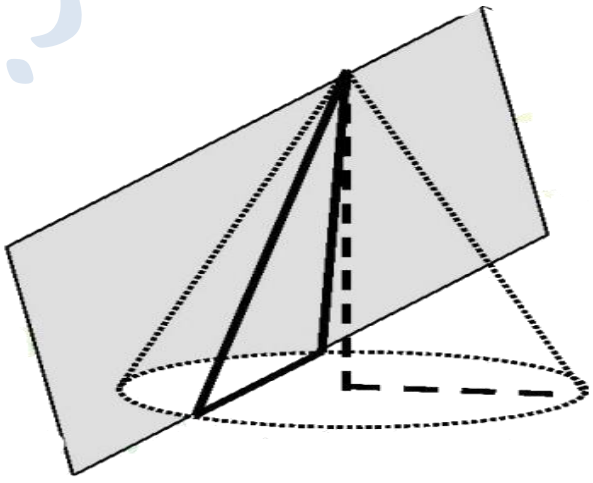
المجسـمات

الشكل	المساحة الجانبية	المساحة السطحية	الحجم
	(طول الضلع)^{2}4 $4x^2$	(طول الضلع)^{2}6 $6x^2$	(طول الضلع)^3 X^3
	محيط القاعدة × الارتفاع $2z(x+y)$	المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة $2xy+2xz+2yz$	مساحة القاعدة × الارتفاع XYZ
	محيط القاعدة × الارتفاع $2\pi rh$	المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة $2\pi rh+2\pi r^2$	مساحة القاعدة × الارتفاع πr^2h
	/	$4\pi r^2$	(نصف القطر)^3 $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}r^3$
	نصف محيط القاعدة X طول المولد	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	ثلث مساحة القاعدة x الارتفاع $\frac{\pi}{3}r^2h$

الشكل		المحيط	المساحة
المربع		4x = طول الضلع x4	X^2 = (طول الضلع)^2
المستطيل		2 (الطول+ العرض) 2(x+y)=	الطول × العرض =xy
الدائرة		$2\pi r$	πr^2
المثلث الاعتيادي		مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة	نصف القاعدة × الارتفاع $\frac{1}{2}hL =$
المثلث القائم الزاوية			نصف حاصل ضرب ضلعيه القائمين $\frac{1}{2}hL =$
المثلث المتساوي الاضلاع			$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ (طول الضلع)^2
شبه المنحرف		مجموع أطوال أضلاعه الأربعة	$\frac{1}{2}$ (مجموع ضلعيه المتوازيين) × الارتفاع

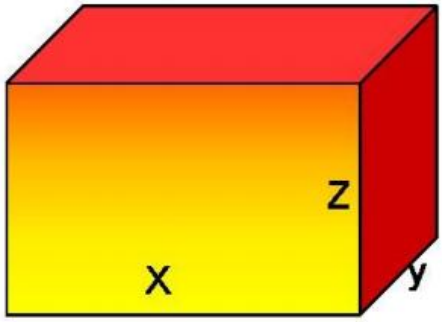
ملاحظة ذو الوجوه الأربعة المنتظم هو هرم قائم بأربعة وجوه قاعدته ووجوهه مثلثات متساوية الأضلاع.

ملاحظة إذا قطع المخروط الدائري القائم بمستو مار من أحد مولداته فان المقطع مثلث ويكون هذا المثلث متساوي الساقين إذا كان المخروط دائري قائم.



تمارين (6-3)

1) إذا كانت المساحة الكلية لمتوازي السطوح المستطيلة $=724cm^2$، ومساحة قاعدته $=132cm^2$، ومساحة أحد اوجهه الاربعة $=110cm^2$، جد ابعاده وحجمه.



المعطيات: متوازي السطوح المستطيلة

مساحته السطحية $= 724cm^2$

ومساحة قاعدته $= 132cm^2$

ومساحة أحد اوجهه الأربعة $= 110cm^2$

المطلوب اثباته

إيجاد أبعاده وحجمه

البرهان: المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + (2) (مساحة القاعدة)

المساحة الكلية $= 2xz + 2yz + 2xy = 2(x + Y)(z) + 2xy$

$$[724 = 2xz + 2yz + 2xy] \div 2 \Rightarrow 362 = xz + yz + xy$$

$$\because xy = 132, \quad yz = 110 \Rightarrow$$

$$362 = xz + 110 + 132 \Rightarrow xz = 120$$

$$x = \frac{120}{z} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1$$

$$\because yz = 110 \Rightarrow y = \frac{110}{z} \cdots\cdots\cdots (2$$

$$\because xy = 132 \Rightarrow \frac{120}{z}, \frac{110}{z} = 132 \Rightarrow 132z^2 = 13200 \Rightarrow z^2 = 100 \Rightarrow z = 10cm$$

$$x = \frac{120}{10} = 12cm, y = \frac{110}{10} = 11cm$$

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع $= xyz$

$$V = (12)(11)(10) = 1320cm^3$$

و.ه.م

ملاحظة

هناك طريقة أخرى لإيجاد الحجم بعد تطبيق قانون المساحة السطحية وهي

$xy = 132, yz = 110, xz = 120$ وبضرب المعادلات الثلاثة ينتج

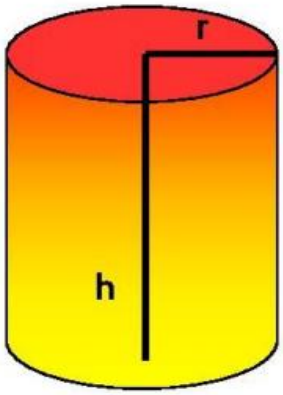
$$x^2y^2z^2 = (132)(110)(120) \Rightarrow (xyz)^2 = (12)(11)(11)(10)(10)(12)$$

بجذر الطرفين ينتج

$$v = xyz = (12)(11)(10) = 1320cm^3$$

2) اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi\ cm^2$، وحجمها $2000\pi\ cm^2$، اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها.

المعطيات



الحجم: $V=2000\pi$

المساحة الجانبية: $A=400\pi$

المطلوب اثباته

إيجاد نصف القطر r ، والارتفاع h

البرهان

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع

$$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 2000\pi = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{2000}{r^2} \ldots\ldots\ldots (1$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

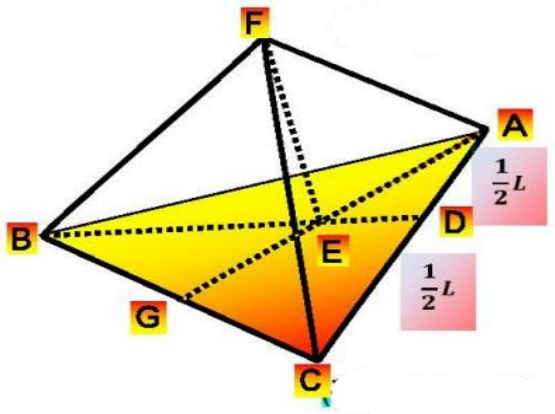
$$A = 2\pi r.\, h \Rightarrow 400\pi = 2\pi r.\, h \Rightarrow 400 = 2\pi r.\frac{2000}{r^2}$$

$$400r = 4000 \Rightarrow r = 10cm$$

$$h = \frac{2000}{100} = 20cm$$

و.ه.م

3) برهن أن حجم ذو الأربعة المنتظم والذي طول حرفه =L هو $\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$ وحدة مكعبة.



المعطيات

F- ABC هرم ذو الوجوه الأربعة المنتظم طول كل حرف

من احرفه = L

المطلوب اثباته

حجم ذو الوجوه الأربعة المنتظم: $\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$

البرهان: نرسم $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

وتلتقي في E

في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة

$\overleftrightarrow{AG}$ ينصف زاوية A العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة

$\overleftrightarrow{BD}$ ينصف زاوية $\overleftrightarrow{AC}$ ينصفها وينصف زاوية الراس

لتكن E منتصفات الاعمدة (الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع تلتقي في نقطة واحدة)

$\overleftrightarrow{EF} \perp ABC$ (يمكن رسم مستقيم وحيد على مستو معلوم من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{EA}$ المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

في Δ AED القائم الزاوية في D

$$\cos 30 = \frac{\frac{1}{2}L}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}L}{AE} \Rightarrow \overleftrightarrow{AE} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

في Δ AFE القائم الزاوية في E وحسب مبرهنة فيثاغورس

$$L^2 = h^2 + (\frac{L}{\sqrt{3}})^2 \Rightarrow L^2 = h^2 + \frac{L^2}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{2L^2}{3} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}}$$

مساحة القاعدة المثلثة (متساوية الأضلاع) $= \frac{\sqrt{3}L^2}{4}$

حجم الهرم = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

وحدة مكعبة $V = (\frac{1}{3})(\frac{\sqrt{3}L^2}{4})(\frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{2}L^3}{12}$

و.ه.م

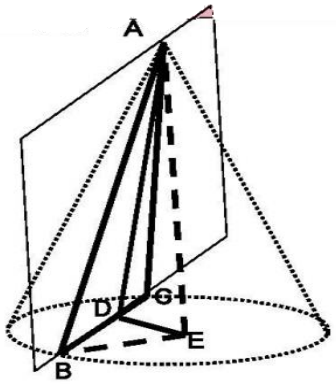
4- مخروط دائري قائم مر برأسه مستو فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار 8cm فاذا كانت مساحة المقطع 102 cm^2 وارتفاع المخروط 15cm احسب حجم المخروط ومساحته الجانبية ومساحته السطحية.

المعطيات

مخروط دائري قائم مركزه E، قطعه المستوي ABC بحيث $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{ED} = 8cm$

مساحة المقطع ABC = 102 cm^2

ارتفاع المخروط = 15cm



المطلوب اثباته

إيجاد حجم المخروط ومساحته الجانبية ومساحته السطحية

البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{AE} \perp$ لدائرة , $\overleftrightarrow{BC}$ محتوى في الدائرة

$ED \perp BC$ (معطى)

$AD \perp BC$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\overleftrightarrow{AE} \perp ED$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره)

في Δ AED القائم الزاوية في E وحسب مبرهنة فيثاغورس

$$(AD)^2 = (AE)^2 + (ED)^2 \Rightarrow (AD)^2 = 225 + 64 \Rightarrow (AD)^2 = 289 \Rightarrow AD = 17cm$$

مساحة المقطع (المثلث) = نصف طول القاعدة × الارتفاع

$$102 = \frac{1}{2}(BC)(AD) \Rightarrow 102 = \frac{1}{2}(BC)(17) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = 12cm$$

في Δ EBD القائم الزاوية في E وحسب مبرهنة فيثاغورس

$$(EB)^2 = (ED)^2 + (BD)^2 \Rightarrow (EB)^2 = 64 + 36 \Rightarrow (EB)^2 = 100 \Rightarrow EB = 10cm$$

أي أن نصف قطر قاعدة المخروط = 10cm

في Δ AEB القائم الزاوية في E وحسب مبرهنة فيثاغورس

$$(AB)^2 = (AE)^2 + (EB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 225 + 100 \Rightarrow (AB)^2 = 325 \Rightarrow AB = 5\sqrt{13}cm$$

حيث يمثل الضلع AB طول الحرف الجانبي (المولد) للمخروط

المساحة الجانبية للمخروط = نصف محيط القاعدة × طول المولد

$$M = (\frac{1}{2})(2)(10)(\pi)(5\sqrt{13}) = 50\sqrt{13}\pi cm^2$$

المساحة السطحية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

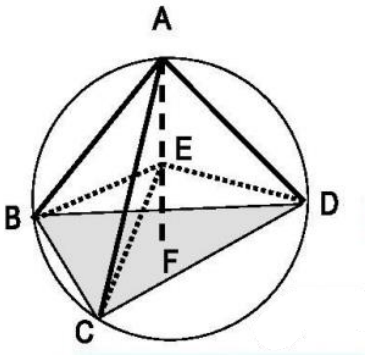
$$Mm = 50\sqrt{13}\pi + 100\pi = 50\pi(\sqrt{13} + 2)cm^2$$

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = (\tfrac{1}{3})(100\pi)(15) = 500\pi cm^3$$

و.ه.م

5) إذا علمت أنـــه يمـــكـن رسم كـرة خارج ذو الوجوه الأربـــعة المنتظم برهـــن أن نصف قطر الكرة = الارتفاع $\frac{1}{3}$.



المعطيات

A -BCD هرم ذو الوجوه الأربعة المنتظم مرسوم داخل كرة مركزها E

ونصف قطرها AE

المطلوب اثباته $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AF}$

البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{AF} \perp BCD$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة معلومة)

نصل $\overleftrightarrow{EB}, \overleftrightarrow{EC}, \overleftrightarrow{ED}$

اصبحت لدينا الاهرامات الأربعة التي رؤوسها (E) وقواعدها المتساوية بالمساحة

(ABD), (ABC), (ACD), (BCD) (الوجوه الأربعة في ذي الوجوه الأربعة تكون متساوية)

قسم الهرم الأصلي الى اربعة أهرامات من ذي الوجوه الأربعة مساوية بالحجم وهي

(E-ABD), (E-ABC), (E-ACD), (E-BCD)

(يتساوى حجما شكلين اذا تطابقت قاعدتيهما وتساوي ارتفاعها)

حجم الهرم الأصلي = 4x حجم الهرم الصغير

حجم الهرم الكبير = 4 × (E-BCD)

$$\frac{1}{3}(BCD)(AF) = (4)(\frac{1}{3})(BCD)(EF)$$

$$\overleftrightarrow{AF} = (4)\ (\overleftrightarrow{EF})$$

$$\overleftrightarrow{AF} = (4)\ (\overleftrightarrow{AF} - \overleftrightarrow{AE})$$

$$\overleftrightarrow{AF} = 4\overleftrightarrow{AF} - 4\overleftrightarrow{AE}$$

$$4\overleftrightarrow{AE} = 3\overleftrightarrow{AF} \Rightarrow \overleftrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overleftrightarrow{AF}$$